I и выражают зависимостью

$$I=\frac{\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha v_1^2}{2g}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha v_2^2}{2g}\right)}{l}, \tag{1.78}$$

или сокращенно

$$I=\frac{H_1-H_2}{l}=\frac{h_{w1-2}}{l}. \tag{1.78'}$$

Линия полного напора $E—E$ всегда понижается, т. е. при движении реальной жидкости часть напора затрачивается на преодоление сил трения.

При равномерном движении жидкости линия полного напора $E—E$ будет параллельна пьезометрической линии $p—p$ и гидравлический уклон будет равен пьезометрическому $I_p=I$.

Для идеальной жидкости линия полного напора $E—E$ будет параллельна плоскости сравнения и совпадать с линией начального напора, т. е. $h_w=0$.

С энергетической точки зрения уравнение Бернулли представляет тот или иной вид удельной энергии, т. е. энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости. Из уравнения (1.75) видно, что полная удельная энергия потока состоит из удельной энергии положения z, удельной энергии давления p/γ и удельной кинетической энергии $\frac{\alpha v^2}{2g}$, которая уменьшается по длине потока в направлении движения из-за преодоления сил трения.

Таким образом, уравнение Бернулли представляет собой сумму потенциальной $\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$ и кинетической $\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ удельных энергий и выражает частный случай общего закона сохранения энергии в природе, доказанного великим русским ученым М. В. Ломоносовым.

Глава 4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ И РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

4.1. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

При изучении движения реальной жидкости встречаются трудности, обусловленные характером движения и влиянием различных факторов, происходящих при этом процессе. Поэтому наряду с аналитическими расчетами гидравлических явлений широко применяются экспериментальные исследования. Сочетание их позволяет получать надежные результаты.

Обычно экспериментальные гидравлические исследования проводят в натуральных условиях (в натуре) и в лабораториях на моделях. При отсутствии натурных объектов, находящихся в стадии рабочего проектирования, проводят экспериментальные лабораторные исследования, получают поправочные коэффициенты к расчетным формулам или эмпирические зависимости, отражающие связь между изучаемыми факторами.

В этом случае должно быть обосновано моделирование явлений, происходящих в натуре и на модели, т. е. необходимо добиваться гидромеханического подобия изучаемых процессов. *Гидромеханически подобными* считаются явления, если в них одинаковы отношения всех геометрических элементов, плотностей и сил, действующих в соответствующих точках и направлениях. При этом различают геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Геометрически подобными будут те потоки (в натуре и на модели), у которых линейные размеры $l_н$ и $l_м$, площади $\omega_н$ и $\omega_м$ и объемы $W_н$ и $W_м$ находятся в соотношении

$$\frac{l_н}{l_м}=M_l;\quad \frac{\omega_н}{\omega_м}=M_\omega=M_l^2;\quad \frac{W_н}{W_м}=M_W=M_l^3, \qquad (1.79)$$

где M_l — линейный масштаб моделирования, индексами «н» и «м» обозначены величины, относящиеся соответственно к натуре и модели.

Кинематически подобными будут те потоки, у которых частицы жидкости совершают геометрически подобные перемещения и выполняются соотношения

$$\frac{t_н}{t_м}=M_t;\quad \frac{v_н}{v_м}=M_v;\quad \frac{a_н}{a_м}=M_a, \qquad (1.80)$$

где M_t, M_v, M_a — масштабы моделирования соответственно времени, скорости и ускорения.

Динамически подобными будут те потоки, для которых соотношения между соответствующими силами, действующими в натуре и на модели, одинаковы, т. е.

$$\frac{F_н}{F_м}=\frac{P_н}{P_м}=\frac{T_н}{T_м}=M_F=\mathrm{idem}, \qquad (1.81)$$

где F, P и T — соответственно силы инерции, силы тяжести и силы вязкости.

Для движущихся потоков одни из основных сил — силы инерции, которые можно выразить в виде произведения массы

m на ускорение a:

$$\frac{F_н}{F_м}=\frac{m_н a_н}{m_м a_м}=\frac{\rho_н l_н^2 v_н^2}{\rho_м l_м^2 v_м^2}\ ;\qquad \frac{F_н}{\rho_н l_н^2 v_н^2}=\frac{F_м}{\rho_м l_м^2 v_м^2}=\mathrm{Ne}. \qquad (1.82)$$

Выражение (1.82) — общий закон гидромеханического подобия, установленный в 1686 г. И. Ньютоном, который можно сформулировать так: в динамически подобных потоках между двумя соответственными силами $F_н$ и $F_м$ должно существовать постоянное соотношение Ne, называемое критерием Ньютона.

4.2. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Общие положения. Условие гидромеханического подобия гидравлических явлений — это соблюдение равенства (1.82) для всех сил (тяжести, давления, инерции, трения, поверхностного натяжения), под действием которых происходит это явление. Влияние указанных сил ввиду их разной физической природы проявляется неодинаково. Поэтому устанавливают частные критерии подобия для случаев, когда в качестве преобладающей принимается какая-нибудь одна из действующих сил. Критерии частичного подобия можно получить из критерия Ньютона, подставляя в него силу тяжести G, при этом получим условие подобия только сил тяжести (критерий Фруда Fr), или силу трения τ — получим условие подобия только сил трения (критерий Рейнольдса Re) и т. д.

Критерий Фруда. При моделировании истечения из отверстий и насадок через водосливы преобладают силы тяжести при пренебрежимо малом влиянии сил поверхностного натяжения и вязкости. Из отношения сил инерции и тяжести можно получить критерий Фруда, или закон гравитационного подобия:

$$\frac{\text{Силы инерции}}{\text{Силы тяжести}}=\frac{\rho l^2 v^2}{\gamma l^3}=\frac{v^2}{gl}=\mathrm{Fr}=\mathrm{idem}. \qquad (1.83)$$

Следовательно, при преобладании сил тяжести потоки будут подобными, если будут равны числа Фруда для натуры и для модели, т. е. $\mathrm{Fr}_н=\mathrm{Fr}_м$. Так как обычно в подобных потоках ускорения силы тяжести $g_н=g_м$, критерий Фруда несколько упростится:

$$\frac{v_н^2}{l_н}=\frac{v_м^2}{l_м}=\mathrm{Fr}. \qquad (1.83')$$

Переход от модели к натуре в этом случае может быть выполнен по следующим зависимостям:

для скорости

$$\frac{v_н^2}{v_м^2}=\frac{l_н}{l_м}=M_l \text{ или} \tag{1.84}$$

$$v_н=v_м\sqrt{M_l};$$

для расхода

$$\frac{Q_н}{Q_м}=\frac{\omega_н v_н}{\omega_м v_м}=M_l^2\sqrt{M_l} \tag{1.85}$$

или

$$Q_н=Q_м M_l^2\sqrt{M_l};$$

для времени

т. к. $v_н=\dfrac{l_н}{t_н}$, $\quad v_м=\dfrac{l_м}{t_м}$ и $\dfrac{v_н}{v_м}=\dfrac{l_н t_м}{t_н l_м}$, $\quad \dfrac{t_н l_м}{t_м l_н}=\dfrac{v_м}{v_н}$,

то

$$\frac{t_н}{t_м}=\frac{v_м l_н}{v_н l_м}, \quad t_н=t_м\sqrt{M_l}. \tag{1.86}$$

Критерий Рейнольдса. При моделировании движения жидкости в трубах, реках и каналах преобладают силы трения (вязкости), поэтому закон гидромеханического подобия будет представлен в ином виде:

$$\frac{\text{Силы инерции}}{\text{Силы трения}}=\frac{\rho l^2 v^2}{\mu l v}=\frac{vl}{\nu}=\mathrm{Re}=\mathrm{idem}, \tag{1.87}$$

где силы трения найдены по зависимости (1.6).

Следовательно, при преобладании силы трения потоки будут подобными, если критерий Рейнольдса для обоих потоков одинаков, т. е.

$$\mathrm{Re}_н=\mathrm{Re}_м \quad \text{или} \quad \frac{v_н l_н}{\nu_н}=\frac{v_м l_м}{\nu_м}. \tag{1.87'}$$

Переход от модели к натуре в этом случае может быть выполнен по следующим формулам при $\nu_н=\nu_м$:
для скорости

$$v_н=\frac{v_м}{M_l};$$

для расхода

$$Q_н=Q_м M_l;$$

для времени

$$t_н = t_м M_l^2. \qquad (1.88)$$

4.3. π-ТЕОРЕМА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

В тех случаях, когда не удается получить теоретические зависимости для описания гидравлического явления, прибегают к методу анализа размерностей (π-теореме), который позволяет установить структуру формулы, связывающей физические факторы исследуемого гидравлического явления.

Допустим, требуется найти параметры критериального уравнения для экспериментального определения любой физической величины

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0,$$

например, критерии Fr и Re, когда движение жидкости описывается уравнением, определяемым пятью параметрами:

$$f(l, t, \rho, g, \nu) = 0.$$

Рассмотрим размерности входящих величин, выбрав за основные длину, время и массу:

$$l[L], t[T], \rho\left[\frac{M}{L^3}\right], \quad g\left[\frac{L}{T^2}\right], \quad \nu\left[\frac{L^2}{T}\right].$$

В соответствии с π-теоремой функциональную зависимость можно выразить безразмерными комплексами в количестве (K—3), где K — число параметров уравнения. Для рассматриваемого случая (K—3) = (5—3) = 2, т. е. два—π:

$$\Pi_1 = e^{x_1} t^{y_1} \rho^{z_1} g;$$

$$\Pi_2 = e^{x_2} t^{y_2} \rho^{z_2} \nu \qquad (1.89)$$

или с учетом размерностей для каждого π можем записать:

$$\Pi_1 = [L]^{x_1} [T]^{y_1} \left[\frac{M}{L^3}\right]^{z_1} \left[\frac{L}{T^2}\right];$$

$$\Pi_2 = [L]^{x_2} [T]^{y_2} \left[\frac{M}{L^3}\right]^{z_2} \left[\frac{L^2}{T}\right]. \qquad (1.89')$$

Уравнения преобразуются к виду

$$\pi_1 = L^{x_1 - 3z_1 + 1} T y_{1-2} M^{z_1};$$

$$\pi_2 = L^{x_2 - 3z_2 + 2} T y_{2-1} M^{z_2}, \qquad (1.90)$$

откуда, приравнивая показатели степени при L, T, M к нулю, для каждого из двух π получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1-3z_1+1&=0;\\ y_1-2&=0;\\ z_1&=0.\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} x_2-3z_2+2&=0;\\ y_2-1&=0;\\ z_2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.90'}$$

Решая каждую из двух систем, находим

$$\begin{aligned} &\text{для } \pi_1: x_1=-1;\ y_1=2;\ z_1=0;\\ &\text{для } \pi_2: x_2=-2;\ y_2=1;\ z_2=0.\end{aligned} \tag{1.90''}$$

Далее определяем вид безразмерных параметров:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1&=\frac{gt_1^2}{l}=\frac{gl}{v^2}=\frac{1}{\mathrm{Fr}};\\ \pi_2&=\frac{t\nu}{l^2}=\frac{\nu}{vl}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\end{aligned}\right\} \tag{1.91}$$

и записываем общий вид критериального уравнения движения вязкой жидкости:

$$F(\mathrm{Fr},\mathrm{Re})=0.$$

4.4. РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА

Давно было замечено, что существует два режима движения жидкости: *ламинарный* (от латинского слова *lamina* — слой), при котором поток жидкости движется отдельными слоями (струйками) без перемешивания, и *турбулентный* (от латинского слова *turbulentus* беспорядочный), при котором происходит беспорядочное интенсивное перемешивание движущихся частиц жидкости.

В природе ламинарный режим движения жидкостей встречается при движении жидкостей с большой вязкостью: нефти, мазута, смазочных масел и в порах грунта при движении подземных вод.

Турбулентный режим движения жидкостей встречается при движении маловязких жидкостей (вода, бензин, спирт) в трубах, каналах, реках. Характер режима движения жидкости зависит от соотношения действующих в них сил. Если при движении жидкости преобладают силы вязкости, то мы наблюдаем ламинарный режим, если преобладают силы инерции, то наблюдаем турбулентный режим движения потока. На это обстоятельство указывал в 1880 г. великий русский ученый Д. И. Менделеев в работе «О сопротивлении жидкости и воздухоплавании», которое было полностью изучено в 1883 г. английским физиком

О. Рейнольдсом на весьма простой экспериментальной установке (рис. 1.25).

К баку *1* с водой присоединена прозрачная трубка *2* с вентилем *3* на конце, регулирующим скорость движения воды в трубке *2*. Из сосуда *4* по трубке *5* в устье трубки *2* поступает подкрашенная жидкость.

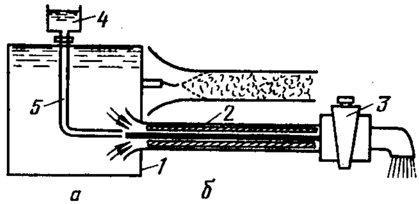

Рис. 1.25. Режимы движения жидкости:

1 — бак; *2* — прозрачная трубка; *3* — вентиль; *4* — сосуд; *5* — трубка.

При малом открытии вентиля *3* поток в трубке *2* будет двигаться с малой скоростью. Если в поток пустить подкрашенную жидкость, то она будет иметь вид натянутой нити, не смешиваясь с окружающей ее водой. Такое движение жидкости будет ламинарным.

При большом открытии вентиля *3* поток в трубке *2* будет двигаться с большой скоростью. Сначала подкрашенная нитевидная струйка изгибается, затем разрушается и превращается в отдельные вихри, распределяясь по всему живому сечению трубки. Такое движение О. Рейнольдс называл турбулентным.

Опыты О. Рейнольдса показали, что переход от ламинарного режима движения жидкости к турбулентному происходит при определенной скорости, которую называют *критической*. Как показывают опыты, значение этой скорости прямо пропорционально кинематической вязкости ν и обратно пропорционально диаметру трубки d:

$$v_{кр} = \mathrm{Re}_{кр} \frac{\nu}{d}, \qquad (1.92)$$

чаще всего это выражение записывают следующим образом:

$$\mathrm{Re}_{кр} = \frac{v_{кр} d}{\nu}, \qquad (1.92')$$

где $\mathrm{Re}_{кр}$ — безразмерное число Рейнольдса.

Число Рейнольдса, при котором ламинарный режим движения жидкости переходит в турбулентный, называют критическим и обозначают $\mathrm{Re}_{кр}$. Опытами установлено, что в момент перехода ламинарного режима в турбулентный $\mathrm{Re}_{кр} = 2320$. Следовательно, при движении в трубах $\mathrm{Re} < 2320$ и движение жидкости будет ламинарным, а при $\mathrm{Re} > 2320$ — турбулентным.

При безнапорном движении жидкости число Рейнольдса определяют не через диаметр трубы, а через гидравлический радиус R по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{vR}{\nu},$$

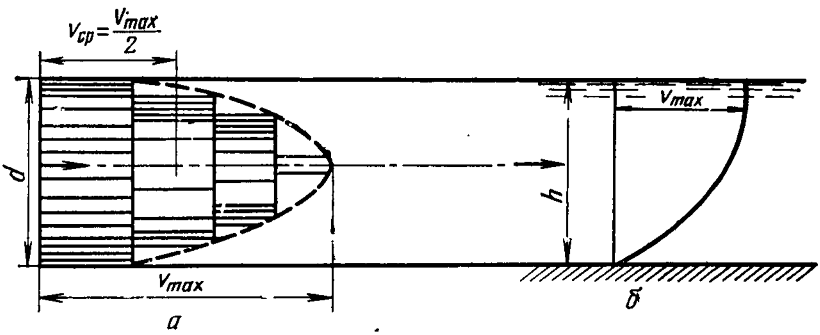

Рис. 1.26. Распределение скоростей движения жидкости в трубе и открытом канале при ламинарном режиме движения:

а — в трубе; *б* — в открытом канале.

где $R=d/4$, т. е. для безнапорного движения жидкости критическое число Рейнольдса будет в 4 раза меньше, чем при движении в трубах, $Re_{кр}=580$. Следовательно, при безнапорном движении жидкости при $Re<580$ будет иметь место ламинарный режим, а при $Re>580$ — турбулентный.

Ламинарное движение жидкости в цилиндрической трубе схематически изображают телескопическим, т. е. движущаяся жидкость как бы разделяется на бесконечно большое число тонких концентричных относительно оси трубопровода слоев (рис. 1.26). Иными словами, при ламинарном движении жидкости в цилиндрической трубе распределение скоростей по сечению имеет вид параболы: у стенок трубы скорости равны нулю, а при удалении от них скорости плавно возрастают и достигают максимального значения на оси трубы.

Для открытых потоков график распределения скоростей при ламинарном режиме показан на рисунке 1.26, *б*.

Определим закон распределения скоростей в живом сечении потока при ламинарном режиме. Для этого выделим внутри горизонтального трубопровода объем жидкости в виде цилиндра радиусом r и длиной l (рис. 1.27) и составим уравнение равновесия всех действующих сил:

$$\pi r^2(P_1-P_2)=-2\pi r l \mu \frac{du}{dr}, \qquad (1.93)$$

где $\pi r^2(P_1-P_2)$ — разность сил давления в сечениях *1* и *2*; $-2\pi r l \mu \frac{du}{dr}$ — сила трения на боковой поверхности цилиндра, на основании формулы (1.6). Знак «минус» в формуле Ньютона взят потому, что du/dr отрицательно, поскольку с увеличением r скорость убывает.

При равномерном движении жидкости, при котором все живые сечения по длине потока одинаковы как по форме, так и по

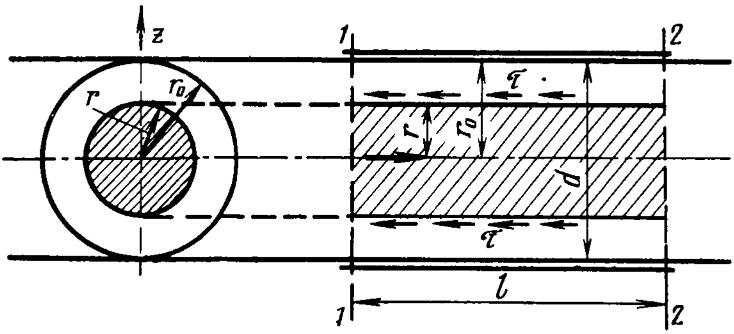

Рис. 1.27. К определению закона распределения скоростей в трубе при ламинарном режиме движения жидкости.

размерам, и скорости в соответственных точках живых сечений также одинаковы. Скорость — функция исключительно одного r:

$$du = -\frac{(P_1 - P_2)\,r}{2l\mu}\,dr. \tag{1.94}$$

С учетом гидравлического уклона

$$I = \frac{P_1 - P_2}{\gamma l} = h_W/l,$$

получим

$$du = -\gamma\frac{Ir}{2\mu}\,dr. \tag{1.95}$$

Интегрируя по сечению трубы от $r=r$ и $r=r_0$, учитывая, что при $r=r_0$ скорость $u=0$, получим закон распределения скоростей в живом сечении потока:

$$u = \gamma\,\frac{I}{4\mu}\,(r_0^2 - r^2), \tag{1.96}$$

для центральной струйки при $r=0$

$$u_{\max} = \gamma\,\frac{I}{4\mu}\,r_0^2. \tag{1.96$'$}$$

Расход жидкости через трубу определится из выражения

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r dr u = \int_0^{r_0} 2\pi r dr\,\frac{I}{4\mu}\,(r_0^2 - r^2)\,\gamma; \tag{1.97}$$

$$Q = \gamma\frac{\pi}{2}\,\frac{I}{\mu}\left(\frac{r_0^4}{2} - \frac{r_0^4}{4}\right) = \frac{\pi}{8}\,\gamma\,\frac{I}{\mu}\,r_0^4, \tag{1.97$'$}$$

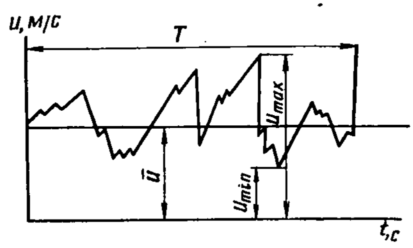

Рис. 1.28. График пульсации скоростей.

отсюда средняя скорость

$$v = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \gamma \frac{I}{8\mu} r_0^2, \qquad (1.98)$$

а соотношение между максимальной и средней скоростью

$$\frac{u_{max}}{v} = 2. \qquad (1.99)$$

Турбулентный режим движения жидкости характеризуется беспорядочным движением частиц. При этом режиме частицы жидкости движутся по произвольным траекториям и с различной скоростью, причем скорость в любой точке потока непрерывно изменяется как по величине, так и по направлению около некоторого среднего значения. Такое изменение во времени мгновенной местной скорости называется *пульсацией скорости* (рис. 1.28). А среднюю по времени скорость называют *осредненной местной скоростью,* или *осредненной скоростью.* Аналитически связь между осредненной скоростью и мгновенной скоростью может быть выражена зависимостью

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u\,dt, \qquad (1.100)$$

где T — период наблюдений.

Распределение осредненных скоростей течения в живом сечении трубопровода, полученное на основе опытных данных, может быть представлено схематически (рис. 1.29). Из рисунка видно, что распределение скоростей течения в этом случае выглядит иначе, чем при ламинарном режиме движения. Только в погра-

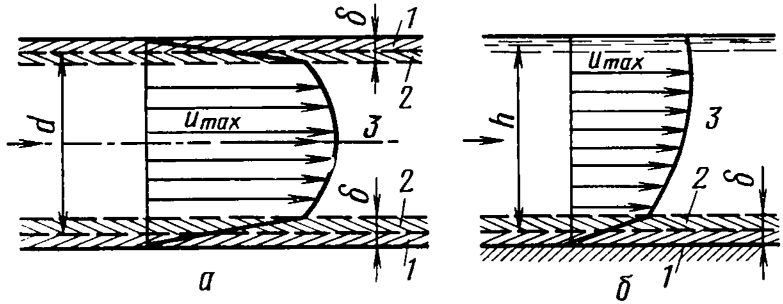

Рис. 1.29. Распределение скоростей течения в трубе и открытом канале при турбулентном режиме движения:

а — в трубе; *б* — в открытом канале; *1* — ламинарная пленка; *2* — переходной слой; *3* — ядро турбулентного течения.

ничном слое (ламинарная пленка+переходной слой) скорости течения изменяются так же, как при ламинарном режиме движения. В переходной зоне зарождаются вихри, обусловленные увеличением скорости движения и влиянием выступов шероховатости. Причем если выступы шероховатости меньше ламинарной пленки, то стенка будет гидравлически гладкой. Если же величина выступов будет превышать толщину ламинарной пленки, то неровности стенок будут увеличивать беспорядочность движения и стенка будет гидравлически шероховатой.

Возникающие в пограничном слое вихри проникают в центральную часть потока и образуют ядро турбулентного течения. В ядре турбулентного течения происходит интенсивное и непрерывное перемешивание частиц жидкости, возникают дополнительные напряжения, обусловленные турбулентностью потока.

Глава 5. ПОТЕРИ НАПОРА (УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ) ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Сопротивления, возникающие при движении жидкости, называются *гидравлическими сопротивлениями*. На преодоление этих сопротивлений тратится некоторая часть удельной энергии движущейся жидкости, которую называют *потерей удельной энергии*, или *потерей напора*.

В уравнении Бернулли для потока реальной жидкости потери напора обозначаются h_W.

Все гидравлические сопротивления разделяются на два вида: сопротивления по длине потока и местные сопротивления.

Гидравлические сопротивления по длине потока обуславливаются действием сил трения. Местные гидравлические сопротивления обуславливаются местным препятствием потоку жидкости в виде изгиба трубы, внезапного сужения или расширения русла, при обтекании клапанов, решеток, диафрагм, кранов, которые деформируют обтекающий их поток.

Таким образом, потери напора при движении жидкости будут равны сумме потерь напора на трение, вызванных гидравлическими сопротивлениями по длине потока и потерь напора на местные сопротивления, т. е.

$$h_W = h_{\text{тр}} + h_{\text{м}}.$$

5.1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Как уже указывалось выше, *равномерным движением жидкости* называют такое движение, при котором все живые сечения по длине потока одинаковы как по форме, так и по раз-