

5) наконец, начиная от установленной выше точки *A*, проводим кривые свободной поверхности для отдельных участков заданного русла; при этом сообразуемся с возможными формами свободной поверхности для разных намеченных зон (*a*, *b*, *c*); см рис. 7-31, 7-34, 7-35.

Пример 2. Построить схемы свободных поверхностей для русел на рис. 8-11, *a*, *b*, *в*; для русла на рис. 8-11, *г* изобразить три различные возможные здесь схемы свободной поверхности (характеризующиеся наличием или отсутствием гидравлического прыжка)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 8-1 Чергоусов М. Д. Гидравлика. Специальный курс — М.-Л., Госэнергоиздат, 1962
8-2 Чоу В. Т. Гидравлика открытых каналов. — М.: Стройиздат, 1969

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНОЕ И БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

§ 9-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Будем рассматривать неустановившееся плавно изменяющееся турбулентное движение жидкости, в частности воды. Напомним, что неустановившимся движением несжимаемой жидкости называется такое движение, при котором скорости в точках пространства, занятого жидкостью, изменяются во времени. В общем случае неустановившегося плавно изменяющегося движения несжимаемой жидкости средняя скорость *v* и расход *Q* во всех плоских живых сечениях рассматриваемого потока должны иметь отличные от нуля частные производные по времени:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0.$$

При установившемся плавно изменяющемся напорном движении несжимаемой жидкости в абсолютно жестком (недеформирующемся) русле во всех плоских живых сечениях потока $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$; в случае сжимаемой жидкости к этому условию необходимо добавить второе: $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ или $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

С неустановившимся движением воды часто приходится сталкиваться при проектировании гидростанций: при расчете трубопроводов, подводивших воду к турбинам (при закрытии турбин скорость движения воды и давление в трубах изменяются во времени), при расчете каналов, подводивших воду к гидростанции и отводящих воду от нее, и т. п. С неустановившимся движением встречаемся в практике и при расчете водопроводных сетей.

Наиболее простым (в отношении исследования) случаем неустановившегося движения жидкости является напорное неустановившееся движение жидкости, рассматриваемое с учетом следующих двух допущений:

первое допущение — стенки напорного трубопровода являются абсолютно жесткими (абсолютно не деформируются при изменении давления в трубопроводе);

второе допущение — жидкость, движущаяся в трубе (например, вода), является абсолютно несжимаемой.

Для такого простейшего случая имеем следующие условия движения жидкости:

а) так как стенки трубопровода абсолютно жесткие, то ω вовсе не зависит от времени t ; площадь поперечного сечения трубопровода ω целиком определяется одной координатой s , измеряемой вдоль оси трубы:

$$\omega = f_1(s); \quad (9-1)$$

б) расход воды в трубе, вообще переменный во времени, а данный момент времени одинаков во всех поперечных сечениях трубы; так как жидкость принимается несжимаемой, то для определенного момента времени уравнение неразрывности (3-38) вполне приложимо к расчету трубопровода; применительно к рассматриваемому случаю напорного движения жидкости это уравнение следует переписать в виде:

$$Q = \text{const} \text{ (вдоль потока для данного момента времени)}; \quad (9-2)$$

в связи со сказанным расход воды Q будет функцией только одной переменной:

$$Q = f_2(t); \quad (9-3)$$

в) так как

$$v = Q/\omega,$$

то, в силу сказанного выше, легко видеть, что для данного момента времени скорость

$$v = f(s); \quad (9-4)$$

вообще же

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{f_2(t)}{f_1(s)} = f(s, t). \quad (9-5)$$

В практике встречаются случаи, когда поясненная простейшая модель движения жидкости оказывается вполне приемлемой. Вместе с тем в практике встречаются и такие случаи, когда при исследовании неустановившегося движения нельзя пренебрегать сжимаемостью жидкости и деформируемостью стенок трубопровода. К этим последним случаям относится, в частности, особое явление, называемое гидравлическим ударом. Как будет видно из дальнейшего, гидравлический удар недопустимо исследовать, пользуясь указанной выше простейшей моделью; при изучении его необходимо учитывать сжимаемость жидкости и деформируемость стенок трубопровода.

Далее отдельно рассмотрим следующие три вопроса:

1) неустановившееся плавно изменяющееся напорное движение жидкости в случае, когда можно пренебрегать ее сжимаемостью и деформируемостью стенок трубопровода;

2) неустановившееся напорное движение жидкости в случае, когда приходится учитывать сжимаемость жидкости и деформируемость стенок трубопровода, причем здесь поясним упомянутое выше явление гидравлического удара;

3) неустановившееся безнапорное спокойное движение воды.

Следует в заключение подчеркнуть, что в курсе гидравлики приводятся только основы вопроса о неустановившемся движении жидкости. Дальнейшее развитие этого вопроса дается в специальных курсах (в курсах «Использование двойной энергии» и др.).

А. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ, КОГДА НЕ УЧИТЫВАЕМ ЕЕ СЖИМАЕМОСТЬ, ПРИЧЕМ СТЕНКИ ТРУБОПРОВОДА СЧИТАЕМ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ – НЕДЕФОРМИРУЮЩИМИСЯ (ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ НАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ)

§ 9-2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ В СЛУЧАЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ (УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ, УЧИТЫВАЮЩЕЕ ЛОКАЛЬНЫЕ СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЖИДКОСТИ)

Будем изучать только параллельноструйное и плавно изменяющееся движение вязкой жидкости, т.е. случай, когда имеют место плоские расчетные живые сечения. В связи с этим будем интересоваться только продольными скоростями и ускорениями, всюду нормальными к расчетным живым сечениям.

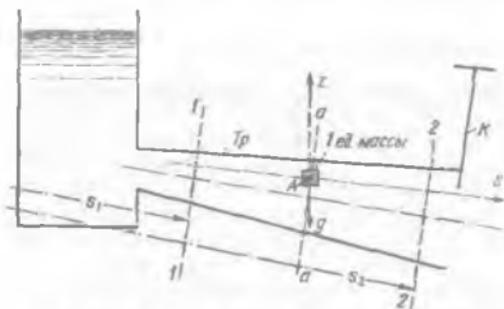


Рис. 9-1. К выводу уравнения Бернулли (9-12)

Представим на рис. 9-1 несколько расширяющийся напорный трубопровод Tr , на протяжении которого от сечения 1-1 до сечения 2-2 происходит указанное движение жидкости. Считаем, что местные потери напора в этом трубопроводе отсутствуют. Положим, что кран K , установленный в конце трубопровода, постепенно закрывается или открывается. При этом расход жидкости Q в трубопроводе должен изменяться во времени; во

времени будут изменяться и скорости u . В трубопроводе будет происходить неустановившееся движение жидкости.

Считаем, что стенки трубопровода абсолютно жестки и что жидкость абсолютно несжимаема. При этом, как отмечалось выше, в данный момент времени средняя скорость v будет являться функцией только координаты s [см. зависимость (9-4)].

Наметим некоторое плоское расчетное живое сечение $a-a$ и на нем точку A (рис. 9-1). Ось координат z направим вертикально вверх. В качестве второй оси выберем направление s (линии тока).

Предположим вначале, что жидкость является идеальной (невязкой). При этом выделим в точке A единицу массы жидкости. Далее выясним все силы, действующие на нее. Сумму проекций всех этих сил (включая силы инерции) на ось s приравняем нулю. В результате получим известное уравнение динамического равновесия рассматриваемой единицы массы в проекциях на ось s , т.е. уравнение Эйлера, написанное для оси s . Это уравнение для единицы массы жидкости может быть представлено в виде (см. § 3-3)

$$\phi_s - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{du}{dt} = 0; \quad (9-6)$$

здесь: ϕ_s – проекция на ось s объемной силы, действующей на единицу массы

жидкости; поскольку в данном случае объемной силой является сила тяжести, потенциальная функция которой

$$U = -gz, \quad (9-7)$$

то

$$\phi_s = \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}(gz); \quad (9-8)$$

$\frac{du}{dt}$ — ускорение частиц жидкости; эта величина представляет собой (см. § 3-3) взятую с обратным знаком силу инерции рассматриваемой единицы массы жидкости; в соответствии с зависимостями (3-8) можем написать

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9-9)$$

Подставляя (9-8) и (9-9) в (9-6), имеем

$$-\frac{\partial}{\partial s}(gz) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (9-10)$$

Деля все слагаемые уравнения (9-10) на вес единицы массы (на величину g), т.е. относя его к единице веса жидкости, проходящей через рассматриваемое живое сечение, переписываем данное уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (9-11)$$

Обратимся к интегрированию полученного уравнения. Интегрировать его будем для данного момента времени ($t = t_0$) по координате s . Умножая уравнение (9-11) на ds и интегрируя его от сечения 1-1 до сечения 2-2, получаем известное уравнение Бернулли, дополненное одним новым членом,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds. \quad (9-12)$$

Это уравнение относится к элементарной струйке идеальной жидкости. Все слагаемые этого уравнения (исключая z_1 и z_2) отвечают одному и тому же моменту времени.

Переходя от элементарной струйки идеальной жидкости к элементарной струйке реальной жидкости, мы должны ввести в уравнение (9-12) потерю напора по длине h'_i , а также величину $\pm h'_{\Delta E}$, поясненную в § 3-16. При этом вместо (9-12) получаем

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \pm h'_{\Delta E} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_i + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds. \quad (9-13)$$

Далее введем новое обозначение:

$$(A) \quad \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds = h'_i; \quad (9-14)$$

в результате вместо (9-13) окончательно получаем¹

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \pm h_{\Delta E} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_1 + h_i. \quad (9-15)$$

Представим величину h_i через расход dQ элементарной струйки. С этой целью напишем

$$dQ = u\delta\omega; \quad u = \frac{dQ}{\delta\omega}, \quad (9-16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\delta\omega} \frac{\partial (dQ)}{\partial t}, \quad (9-17)$$

где площадь сечения элементарной струйки $\delta\omega$ не зависит от времени t , так как стенки рассматриваемой трубы считаются недеформируемыми при изменении давления жидкости.

Следовательно,

$$h_i = \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds = \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\delta\omega} \frac{\partial (dQ)}{\partial t} ds \quad (9-18)$$

или, так как $\frac{\partial (dQ)}{\partial t}$ не зависит от s , то

$$(B) \quad h_i = \frac{1}{g} \frac{\partial (dQ)}{\partial t} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\delta\omega} \quad (9-19)$$

Таким образом, как видно, имеются два выражения для величины h_i : (A) и (B).

Величина h_i имеет размерность длины и может быть названа инерционным напором.² Применение такого термина объясняется следующим.

Сила инерции, отнесенная к единице веса движущейся жидкости, равна³

$$I = -\frac{1}{g} \frac{du}{dt}, \quad (9-20)$$

где $\frac{1}{g}$ — масса единицы веса жидкости.

Уравнение (9-20) согласно (9-9) можно переписать в виде

$$I = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \right], \quad (9-21)$$

¹ Значок «прим» (*) у h_i и h'_i указывает, что эти величины относятся к элементарной струйке, а не к целому потоку.

² Точнее эту величину следовало бы назвать «локальным инерционным напором» (см ниже).

³ Значок «прим» (*) у I , I_x и I_n указывает, что эти величины относятся к единице веса, а не к единице массы. С тем чтобы получить силу инерции одной единицы веса жидкости, безразмерную величину I следует умножить на 1 ед. веса жидкости.

или в виде

$$\Gamma = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2g} \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = \Gamma_k + \Gamma_n, \quad (9-22)$$

где обозначено:

$$\Gamma_k = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = f_1 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right); \quad (9-23)$$

$$\Gamma_n = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = f_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (9-24)$$

Как видно, удельная сила инерции Γ состоит из двух частей:

$\Gamma_k = f_1 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)$, называемой конвективной частью удельной силы инер-

ции; величина Γ_k обуславливается изменением скорости по пути s (по длине струйки). С этой частью силы инерции мы сталкивались ранее, когда рассматривали установившееся движение. Умножив выражение (9-23) на ds и интегрируя его от сечения 1-1 до сечения 2-2, получаем разность скоростных напоров (приращение удельной кинетической энергии при переходе от сечения 1-1 к сечению 2-2):

$$\delta h_k = - \left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} \right). \quad (9-25)$$

Отсюда видно, что разность скоростных напоров, входящих в уравнение Бернулли, полученное для установившегося движения (в § 3-12), учитывает конвективную часть удельной силы инерции, определяемую частной производной $\frac{\partial u}{\partial s}$ (см. § 3-21, п. 3¹).

$\Gamma_n = f_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$, называемой локальной частью удельной силы инерции;

величина Γ_n обуславливается изменением скорости в данной точке пространства во времени. С этой частью силы инерции мы ранее не сталкивались. Она появляется только в случае неустановившегося движения и определяется частной производной $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Умножая (9-24) на ds и интегрируя его от сечения 1-1 до сечения 2-2, получаем величину h_n^i (с обратным знаком). Отсюда и видно, что h_n^i может быть названа инерционным напором, точнее — напором, учитывающим только локальную часть силы инерции. Полученное уравнение (9-15) представляет собой уравнение Бернулли,¹ учитывающее локальные силы инерции. Это уравнение относится к некоторому определенному моменту времени. Поэтому все члены уравнения (9-15) должны вычисляться для одного и того же момента времени.

Заметим в заключение, что данное уравнение мы получили, пользуясь началом Даламбера, поскольку для вывода его было применено уравнение Эйлера. Ранее, рассматривая установившееся движение (см. § 3-12), мы выводили уравнение Бернулли, исходя из теоремы изменения кинетической энергии. Вместе с тем уравнение Бернулли для установившегося движения легко может быть получено и из уравнения (9-15), если в него подставим $h_n^i = 0$.

¹ См сноску на стр. 110 (об авторстве)

**§ 9-3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЦЕЛОГО ПОТОКА
РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ, УЧИТЫВАЮЩЕЕ ЛОКАЛЬНЫЕ СИЛЫ ИНЕРЦИИ
ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ
ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ)**

Рассматривая плавно изменяющееся движение на всем пути от сечения 1-1 до сечения 2-2, мы должны всюду пренебрегать составляющими скоростей и ускорений, направленными вдоль расчетных (плоских) сечений (см. рис. 3-12). Поэтому составляющие силы инерции, в частности локальной, направленные вдоль расчетных живых сечений, в случае плавно изменяющегося движения не учитываются.

Распространяя уравнение Бернулли, полученное в § 9-2 для элементарной струйки, на целый поток, характеризующий плавно изменяющимся движением, рассуждаем примерно так же, как и в случае уравнения Бернулли, относящегося к установившемуся движению (см. § 3-19, 3-20). В результате получаем уравнение Бернулли, относящееся к целому потоку жидкости в виде

$$(I) \quad z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_i + h_l, \quad (9-26)$$

где все члены, кроме последнего, известны из предыдущего. Что касается нового члена h_i , учитывающего напор, затрачиваемый в среднем на преодоление локальной силы инерции единицы веса жидкости, находящейся в данный момент времени между сечениями 1-1 и 2-2, то он, согласно указаниям, приведенным в § 3-19 (см. п. 1-3), может быть записан в виде

$$h_i = \frac{\int (h_i') \gamma dQ dt}{\gamma Q dt} = \frac{\int \left[\frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds \right] dQ}{Q} = \frac{1}{gQ} \int_{s_1}^{s_2} \left[\int u \frac{\partial u}{\partial t} d\omega \right] ds, \quad (9-27)$$

где dQ — расход элементарной струйки

Выражая величину h_i через среднюю скорость v , вместо зависимости (9-27) получаем (для данного момента времени)¹

$$(A) \quad h_i = \frac{\alpha_0}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (9-28)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \omega \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (9-29)$$

а следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (9-30)$$

выражение (9-28) для члена h_i можно еще представить в следующей форме:

¹ Вывод зависимости (9-28), относящийся только к безвихревому потоку, приведен в приложении в [9-10; с. 297].

$$(Б) \quad h_i = \frac{\alpha_0}{g} \frac{dQ}{dt} \int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega} \quad (9-31)$$

Подчеркнем, что интеграл, входящий в эту формулу,

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega} \quad (9-32)$$

для трубопровода заданной геометрической формы имеет вполне определенный геометрический смысл.

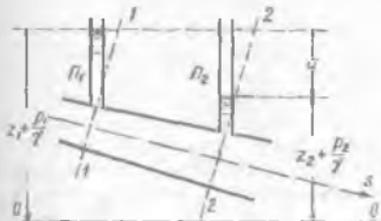


Рис 9-2 К пояснению уравнения Бернулли (9-35)

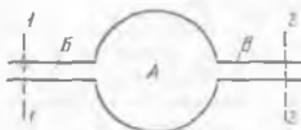


Рис 9-3 К пояснению уравнения Бернулли (9-35)

Приведем теперь вторую форму записи уравнения Бернулли (9-26). С этой целью на рис. 9-2 изобразим трубопровод, снабженный двумя пьезометрами P_1 и P_2 . Разность отметок горизонтов жидкости в этих пьезометрах

$$a = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right). \quad (9-33)$$

Согласно же (9-26) величина

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{\alpha}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + h_i + h_{\Sigma} \quad (9-34)$$

отсюда заключаем, что разность a отметок горизонтов жидкости в пьезометрах, приключенных к сечениям 1-1 и 2-2, в случае неустановившегося движения (в каждый данный момент времени)

$$(II) \quad a = \frac{\alpha}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + h_i + h_{\Sigma}. \quad (9-35)$$

В заключение приведем еще отдельные замечания, касающиеся уравнений (9-26) и (9-35).

1. При неустановившемся движении, в связи с отсутствием необходимых данных, потерю напора h_i приходится обычно вычислять по формулам установившегося равномерного движения, что, строго говоря, не совсем правильно (эпюры скоростей u при установившемся и неустановившемся движениях различны).

2. Когда движение жидкости во времени изменяется достаточно медленно, член h_i уравнения Бернулли оказывается незначительным, в связи с чем им можно пренебрегать. При этом получаем для неустановившегося движения обычное уравнение Бернулли (см. § 3-20). С примерами такого медленно изменяющегося движения, движения, рассматриваемого по обычному уравнению Бернулли, встретимся далее (см. § 10-10, 10-11).

3. В случае установившегося движения уравнением Бернулли, как известно, можно пользоваться, если в районе сечений 1-1 и 2-2, соединяемых этим уравнением, движение является плавно изменяющимся; наличие резко изменяющегося движения в промежутке между сечениями 1-1 и 2-2 не может служить препятствием к применению данного уравнения при установившемся движении (когда $h_i = 0$).

В случае неустановившегося движения уравнением Бернулли, содержащим дополнительный член h_i , можно пользоваться лишь тогда, когда на всем протяжении потока движение является плавно изменяющимся. Это ясно из того, что выражение для дополнительного члена h_i было получено нами в предположении плавно изменяющегося движения жидкости на пути от сечения 1-1 до сечения 2-2. Однако, если поток (рис. 9-3) имеет форму, характеризующую резко изменяющимся движением в области A , причем эта область, в свою очередь, характеризуется весьма малым значением интеграла, входящего в зависимость (9-31), то локальными силами инерции для области A вообще можно пренебречь и не считаться с наличием резко изменяющегося движения жидкости между сечениями 1-1 и 2-2. В случае потока, изображенного на рис. 9-3, локальные силы инерции при использовании уравнения Бернулли приходится учитывать только для областей потока B и B' , где движение плавно изменяющееся.

4. В уравнения (9-26) и (9-35), в отличие от (3-101), входит только потеря напора по длине; эти уравнения получены для случая, когда местные потери напора между сечениями 1-1 и 2-2 отсутствуют (узлам, где возникают местные потери, свойственно резко изменяющееся движение). Практически, однако, уравнения (9-26) и (9-35) могут применяться и к трубопроводам, по длине которых встречаются местные потери, но в ограниченном количестве. В этом случае поступают следующим образом:

а) при подсчете члена h_i пренебрегают локальной силой инерции, свойственной узлам, где возникают местные потери (эту силу инерции мы не можем рассчитывать);

б) в уравнении Бернулли (9-26) или (9-35) вместо члена h_i вводят полную потерю напора h_f , причем местные потери напора, так же как и потери по длине, вычисляют по обычным формулам, относящимся к установившемуся движению.

5. Введем обозначения:

V_0 — объем жидкости, заключенный между неподвижными сечениями 1-1 и 2-2 (рис. 9-1); $KЭ$ (или E_0) — кинетическая энергия всего этого объема в данный момент времени.

Используя такие обозначения, можно показать, что величина h_i , выражаемая формулой (9-28) или (9-31), оказывается также равной:

$$h_i = \frac{\text{приращение (за время } dt) \text{ КЭ объема } V_0}{\text{вес жидкости, протекающей за время } dt \text{ через любое сечение потока}} \quad (9-36')$$

т. е.

$$h_i = \frac{dE_0}{\gamma Q dt} \quad (9-36'')$$

Справедливость этого соотношения будет доказана (только для частного случая горизонтальной цилиндрической трубы, по которой движется идеальная жидкость) в конце § 9-4.

§ 9-4. ОБЩАЯ РАСЧЕТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Для цилиндрической трубы (рис. 9-4) в рассматриваемый момент времени

$$v_1 = v_2. \quad (9-37)$$

При этом уравнение Бернулли (9-35) переписывается в виде:

$$(Ш)_{\text{цилиндр}} \quad a = h_1 + h_2. \quad (9-38)$$

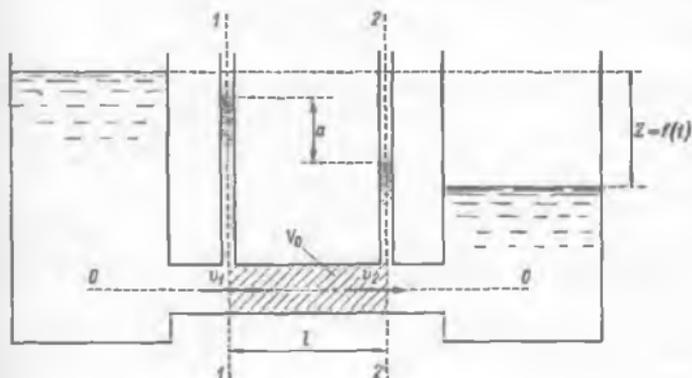


Рис. 9-4. К расчету цилиндрической трубы

V_0 — рассматриваемый объем пространства, занятый движущейся жидкостью

Рассмотрим два слагаемых правой части (9-38).

1. Потеря напора по длине h_l :

$$h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} = \zeta_l \frac{v^2}{2g}, \quad (9-39)$$

где ζ_l — коэффициент сопротивления по длине, вычисляемый условно по зависимостям установившегося движения.

2. Член уравнения h_1 , учитывающий локальные силы вверсии. В случае цилиндрического трубопровода

$$\omega = \text{const (по длине потока)}.$$

Поэтому для такого трубопровода

$$h_1 = \frac{\alpha_0}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\omega} = \frac{\alpha_0}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\omega} \right) \int_{s_1}^{s_2} ds = \frac{\alpha_0 l}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (9-40)$$

или, так как

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (9-41)$$

(поскольку $\frac{dv}{ds}$ для цилиндрического трубопровода равно нулю), то вместо (9-40) можем для цилиндрического трубопровода написать

$$(A)_{\text{цил. трубопр.}} \quad h_t = \frac{\alpha_0 l}{g} \frac{dv}{dt}, \quad (9-42)$$

где

$$l = s_2 - s_1. \quad (9-43)$$

3. Окончательная расчетная зависимость. Подставляя (9-39) и (9-42) в (II)_{цилиндр}, получаем

$$(II)_{\text{цилиндр}} \quad a = \zeta_f \frac{v^2}{2g} + \frac{\alpha_0 l}{g} \frac{dv}{dt}. \quad (9-44)$$

По этому уравнению и удобно вести расчет трубопроводов при отсутствии местных потерь. Оно может быть использовано также и для расчета трубопроводов, имеющих не слишком много местных сопротивлений. При расчете трубопроводов с учетом местных потерь в уравнение (9-44) вместо коэффициента ζ_f следует вводить полный коэффициент сопротивления ζ_f (см. п. 4 в конце § 9-3), определяемый по уравнению (5-18).

4. Дополнительные замечания. Уравнение (9-42) для случая горизонтальной цилиндрической трубы (рис. 9-4) легко может быть получено непосредственно из рассмотрения уравнения динамического равновесия объема жидкости V_0 , находящегося между сечениями 1-1 и 2-2. Действительно, рассматривая этот объем (заштрихован на рисунке) и только для простоты пояснения считая жидкость идеальной ($h_t = 0$), можем написать следующую зависимость:

$$(\omega p_1 - \omega p_2) = (p/\omega) \frac{dv}{dt}, \quad (9-45)$$

где в левой части данного уравнения представлена горизонтальная сила, действующая на рассматриваемый объем жидкости, а в правой части уравнения — масса данного объема жидкости, умноженная на ускорение. Именно это уравнение и отражает (для простейшего случая) зависимость (9-6), которая была составлена Эйлером для общего случая движения единицы массы жидкости.

Деля уравнение (9-45) на величину $\omega (pg) = \omega \gamma$, получаем

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{l}{g} \frac{dv}{dt} = h_{t, \text{теор.}} \quad (9-46)$$

что для рассматриваемого частного случая соответствует зависимости (9-42). Для этого частного случая дополнительно можем написать еще следующие соотношения:

E_0 — величина кинетической энергии, принадлежащей объему V_0 жидкости:

$$E_0 = (\omega \gamma) \frac{v^3}{2g}, \quad (9-47)$$

dE_0 — изменение кинетической энергии E_0 (за время dt):

$$dE_0 = \frac{\gamma}{g} l \omega v dv = \frac{\gamma}{g} l Q dv. \quad (9-48)$$

Как видно, деля dE_0 на величину $\gamma Q dt$, получаем:

$$\frac{dE_0}{\gamma Q dt} = \frac{\gamma}{g} \frac{IQ dt}{\gamma Q dt} = \frac{l}{g} \frac{dv}{dt} = h_t, \quad (9-49)$$

что соответствует соотношениям (9-36).

§ 9-5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ
 ДЛЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
 В ТРУБОПРОВОДЕ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ
 (НЕДЕФОРМИРУЮЩИМИСЯ) СТЕНКАМИ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ
 СМЫСЛ ИНЕРЦИОННОГО НАПОРА

Рассматривая уравнение Бернулли (9-26), будем различать: случай ускоряющегося во времени движения жидкости и случай замедляющегося во времени движения жидкости (когда величина h_t в уравнении приобретает отрицательное значение).

1. В случае ускоряющегося во времени движения полный напор в некотором сечении 1-1

$$H_{e_1} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\omega_1^2}{2g} \quad (9-50)$$

затрачивается:

а) на образование полного напора H_{e_2} в сечении 2-2;

б) на работу сил трения в пределах от сечения 1-1 до сечения 2-2, которая переходит в тепло и рассеивается; величина этой безвозвратно теряемой части напора равна h_t ;

в) на преодоление локальных сил инерции жидкости между сечениями 1-1 и 2-2; эта часть энергии, мерой которой является величина h_t (см. ниже), не должна рассматриваться как потеря напора.

2. В случае замедляющегося во времени движения получаем иную картину. Кинетическая энергия в некотором количестве (измеряемом величиной h_t), высвобождается из объема V_0 жидкости (см. ниже) заключенного между сечениями 1-1 и 2-2 (так как кинетическая энергия этого отска жидкости в данном случае со временем уменьшается). При этом высвобождающаяся удельная энергия h_t вместе с напором H_{e_1} в первом сечении, т.е. величина ($H_{e_1} + h_t$) затрачивается:

а) на образование напора H_{e_2} в сечении 2-2;

б) на работу сил трения, которая переходит в тепло (в размере h_t).

Имея в виду сказанное, уравнение Бернулли можно геометрически интерпретировать следующим образом:

1) пример ускоряющегося во времени движения; см. рис. 9-5, на котором представлено равномерное в данный момент времени (см. § 3-11, п. 1^а, 2), но ускоряющееся во времени движение:

$$H_{e_2} = H_{e_1} - h_t - |h_t|; \quad (9-51')$$

$$H_{e_1} = H_{e_2} + h_t + |h_t|; \quad (9-51'')$$

2) пример замедляющегося во времени движения; см. рис. 9-6, на котором представлено равномерное в данный момент времени (см. § 3-11, п. 1^а, 2), но замедляющееся во времени движение:

$$H_{e_2} = H_{e_1} + |h_t| - h_t; \quad (9-52')$$

$$H_{e_1} + |h_t| = H_{e_2} + h_t. \quad (9-52'')$$

Как видно, в случае замедляющегося во времени движения жидкости, если

$$h_1 < h_2, \quad (9-53)$$

полный напор H_e по течению может возрасти, причем напорная линия $E-E$ будет подниматься по течению, как показано на рис. 9-6, данном для случая $h_1 < h_2$.

Необходимо подчеркнуть, что изображенные на рис. 9-5 и 9-6 картины относятся к одному определенному моменту времени (рассматриваемому согласно Эйлери, а не по Лагранжу; см. § 3-2). В следующий момент времени все линии $E-E$, $P-P$, $i-i$ в общем случае должны занять новое положение (рис. 9-5 и 9-6 являются как бы фотографиями, фиксирующими расположение упомянутых определенных линий, отвечающих определенному моменту времени).

Обратимся теперь к более подробному пояснению энергетического смысла инерционного напора h_i . С этой целью покажем для примера:

Рис 9-5. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для ускоренного (во времени) движения (по Эйлери: для данного момента времени)

горизонтальной цилиндрической трубе, когда величина h_i должна быть неизменна во времени: $h_i = \text{const}$ (во времени), поскольку $\frac{dv}{dt} = \text{const}$ [см., например, формулу (9-42)];

б) на рис. 9-8 неравнозамедленное движение идеальной жидкости (также в горизонтальной цилиндрической трубе), когда $h_i \neq \text{const}$, в этом случае величина скорости v уменьшается во времени, но неравномерно.

Оба отмеченных случая движения жидкости легко себе представить, считая, что в баке B уровень жидкости все время поддерживается на постоянной отметке; в трубе же (правее сечения 2-2) расположен поршень Π , которому мы можем придавать любую скорость, любым образом изменяющуюся во времени

Рассматривая рис. 9-7 (когда $h_i = \text{const}$ во времени), выпишем для этой схемы уравнение Бернулли (относящееся к определенному моменту времени) в виде:

а) на рис. 9-7 равноускоренное движение идеальной жидкости в

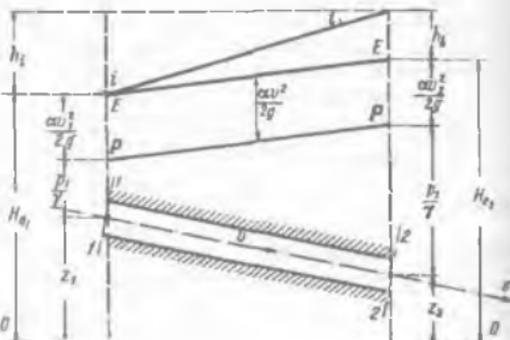


Рис 9-6 Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для замедленного (во времени) движения (по Эйлери: для данного момента времени)

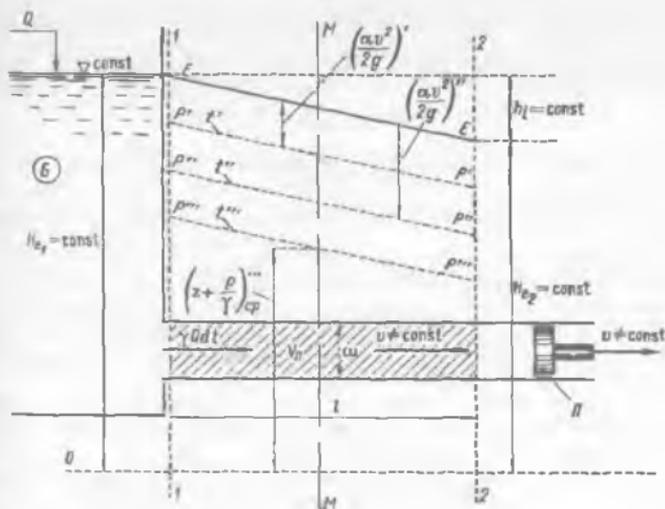


Рис. 9-7. Равноускоренное движение идеальной жидкости в цилиндрической трубе; случай $\frac{dv}{dt} = \text{const}$ (в начальный момент времени — до приложения к жидкости поршня Π — жидкость находилась в покое)

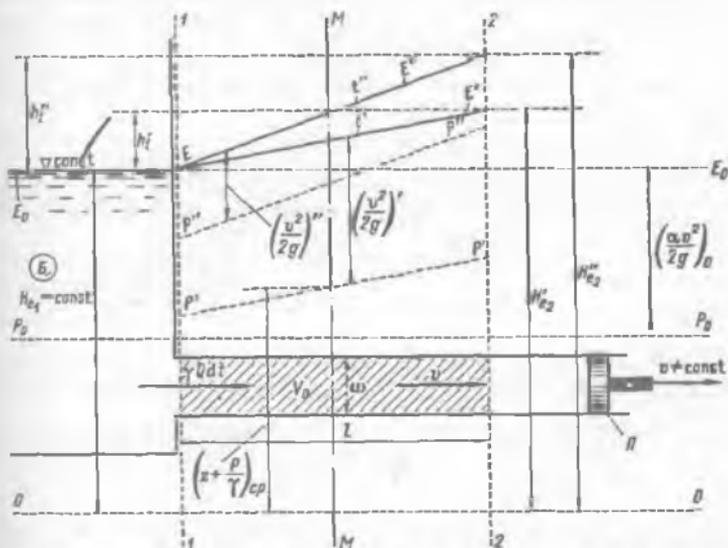


Рис. 9-8. Неравнозамедленное движение идеальной жидкости в цилиндрической трубе; случай $\frac{dv}{dt} \neq \text{const}$

$(E_0 - E_0)$ и $(P_0 - P_0)$ — горизонтальные напорная и пьезметрическая линии до начала неустановившегося движения идеальной жидкости (когда поршень Π в трубе отсутствует и скорость $v = v_0 = \text{const}$ во времени)

$$H_{e_1} - H_{e_2} = h_i; \quad (9-54)$$

далее умножим это уравнение на $\gamma Q dt$, причем dt будем считать бесконечно малой величиной. В результате такой операции получаем:

$$H_{e_1} (\gamma Q dt) - H_{e_2} (\gamma Q dt) = h_i (\gamma Q dt). \quad (9-55)$$

Это уравнение мы можем рассматривать (с некоторым допустимым приближением) как уравнение баланса энергии, составляемого для объема V_0 пространства, расположенного между неподвижными сечениями 1-1 и 2-2.

Из уравнения (9-55) видно следующее. Разность полных энергий [см. левую часть (9-55)]: а) внесенной жидкостью за время dt в объем V_0 пространства через сечение 1-1 и б) вынесенной жидкостью из этого объема через сечение 2-2, равна [см. правую часть (9-55)] приращению (за время dt) собственной энергии, объема жидкости V_0 . Очевидно, это приращение энергии обусловлено работой силы, приложенной к поршню П.

Из сказанного можно заключить, что при неустановившемся движении объем пространства V_0 , занятый жидкостью, является как бы «жидким аккумулятором» механической энергии:

при ускоренном (во времени) движении жидкости этот «аккумулятор» заряжается: в нем накапливается механическая энергия в размере

$$h_i (\gamma Q dt) = d(E_{KЭ}), \quad (9-56)$$

при замедленном (во времени) движении поршня П, «жидкий аккумулятор» разряжается; он выдает через сечение 2-2 ранее накопившуюся в нем энергию; величина этой «выдаваемой» энергии также равна $h_i (\gamma Q dt)$.¹

При рассмотрении указанных процессов необходимо учитывать, что в течение интересующего нас интервала времени:

а) при ускоренном движении жидкости (рис. 9-5) пьезометрическая линия $P-P$ опускается, причем потенциальная энергия объема жидкости V_0 уменьшается, частично переходя в кинетическую энергию;

б) при замедленном движении (рис. 9-6) получаем уменьшение кинетической энергии и соответствующее возрастание потенциальной энергии.²

Что касается потенциальной энергии (ПЭ) жидкости, находящейся в объеме V_0 , то эту энергию следует подсчитывать (подробнее см. п. 4^c, § 2-8) по формуле:

$$ПЭ (\text{объема } V_0) = \gamma l_0 \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)_{ср}, \quad (9-57)$$

где размер $\left(z + \frac{p}{\gamma} \right)_{ср}$ — указан на рис. 9-7 и 9-8.

Из всего сказанного ясно, что величину h_i можно рассматривать как особую «потерю напора», отличающуюся от обычной потери напора h_f следующим:

а) величина h_i является потерей напора невозвратимой: здесь за счет сил трения соответствующая часть механической энергии переходит в тепло, которое диссипируется;

¹ Здесь можно провести аналогию: имеем маховик, вращающийся на оси; при приложении к нему внешней силы он начинает вращаться ускоренно и «накапливает» механическую энергию; переходя в режим замедленного вращения этот маховик, как аккумулятор, начинает разряжаться.

² Обратим внимание на то, что в этом случае движение жидкости происходит в сторону большего давления p .

б) величина же h_f является «потерей напора» (при ускоренном во времени движении жидкости) возвратной: при наличии в последующем замедленного движения данная «потеря» возвращается потоком (благодаря «разрядке аккумулятора», поясненного выше).¹

§ 9-6. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ В АТМОСФЕРУ

На рис. 9-9 представлен сосуд, от которого отходит цилиндрическая труба T с краем K на конце. Положим, что мы мгновенно полностью открыли кран K . После этого можно различать два разных периода истечения жидкости.²

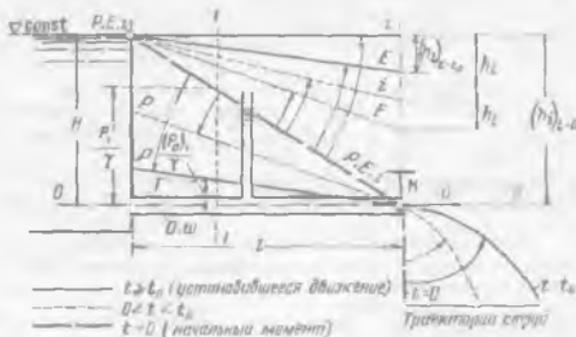


Рис. 9-9. Деформация (во времени) напорной и пьезометрической линий после мгновенного открытия крана K

Первый период:³

$$0 < t < t_0 \quad (9-58)$$

где t_0 измеряется иногда долями секунды. Этот начальный период истечения характеризуется неустановившимся движением жидкости. Напор H (рис. 9-9) в пределах этого периода затрачивается не только на потерю напора h_f и на образование скоростного напора $v^2/(2g)$ в выходном сечении трубы;⁴ в течение времени t_0 за счет напора H кинетическая энергия жидкости, находящейся в трубе (все время, однако, обновляющейся), постепенно увеличивается от нуля до величины, свойственной установившемуся движению.

Второй период:

$$t \geq t_0 \quad (9-59)$$

Это — период установившегося движения, рассматривавшийся нами ранее (в гл. 5).

Первый период движения жидкости в трубе может быть исследован на основании полученного выше уравнения $(\Pi)_{\text{цилиндр}}$ (9-44).

¹ Более подробно см. Сборник научно-методических статей по гидравлике. Вып. 4. — М.: Высшая школа, 1981.

² Мгновенное закрытие трубы краем K анализировать при помощи модели, рассматриваемой в настоящем подразделе (жидкость несжимаемая и стенки трубопровода недеформирующиеся) нецелесообразно.

³ Время t отсчитывается от момента открытия крана K .

⁴ Местной потерей на вход пренебрегаем и учитываем только потерю напора по длине h_f .

Результаты такого анализа следующие ¹

1 В первое мгновение после открытия крана K весь напор H будет затрачиваться на преодоление инерции массы жидкости, находящейся в трубе. Следовательно, для этого мгновения будем иметь:

$$h_1 = H; \quad v = 0; \quad v^2/(2g) = 0; \quad h_1 = 0. \quad (9-60)$$

Отсюда заключаем, что в первое мгновение жидкость в трубе будет находиться в покое, причем известные три линии $E-E$, $P-P$, $i-i$ в первое мгновение будут сливаться в одну прямую линию, показанную на рис. 9-9 жирными штрихами

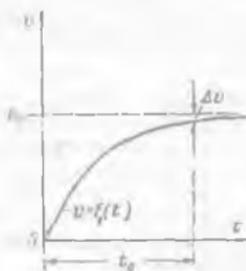


Рис. 9-10 Изменение скорости v в сечении $I-I$ (рис. 9-9) с течением времени после открытия крана K

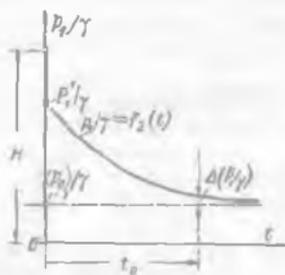


Рис. 9-11 Изменение давления p в сечении $I-I$ (рис. 9-9) с течением времени после открытия крана K

Жидкость, находящаяся в самом конце трубы, в рассматриваемый начальный момент будет иметь нулевую скорость «истечения», в связи с этим жидкость в данный момент времени, выйдя из трубы (под действием своего веса), должна падать по вертикали вниз.

2 С течением времени линии $E-E$, $P-P$, $i-i$ будут расходиться все более и более, причем $E-E$ и $i-i$ будут подниматься, а $P-P$ будет опускаться (см. линии, показанные на рис. 9-9 для некоторого промежуточного момента времени тонкими штрихами). При этом ось струи, выходящей из трубы, будет перемещаться вправо, постепенно поднимаясь.

3 В момент времени $t = t_0$ линия $i-i$ примет горизонтальное положение ($h_1 = 0$): линии $E-E$ и $P-P$ будут отвечать условиям установившегося движения (см. сплошные линии на рис. 9-9). Дальность боя струи, выходящей из трубы, в этот момент достигнет наибольшей величины, свойственной рассматриваемому движению.

4 Из сказанного выше ясно, что в течение рассматриваемого периода скорость v в трубе и пьезометрическая высота p/γ в каком-либо сечении $I-I$ трубы изменяются так, как показано на графиках рис. 9-10 и 9-11, где через v_0 и p_0/γ обозначены соответствующие величины, относящиеся к установившемуся движению.

Как видно из рис. 9-10 и 9-11, теоретически период неустановившегося движения длится в течение $t_0 = \infty$: кривые v и p/γ на графиках асимптотически приближаются к соответствующим горизонтальным прямым, отвечающим установившемуся режиму. Однако, пренебрегая некоторыми небольшими величинами Δv и $\Delta\left(\frac{p}{\gamma}\right)$, получаем практическое время t_0 , в течение которого наблюдается неустановившееся движение.

¹ Самого анализа здесь не приводим.

§ 9-7. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О КОЛЕБАНИИ ГОРИЗОНТА ВОДЫ В УРАВНИТЕЛЬНОМ РЕЗЕРВУАРЕ ГИДРОСТАНЦИЙ

Так называемые деривационные гидростанции устраивают по схеме, представленной на рис. 9-12, где изображены: *I* — водохранилище, *II* — напорный туннель; *III* — уравнительный резервуар; *IV* — напорный турбинный трубопровод; *V* — здание гидростанции, в котором установлены турбины.

В следующем разделе будет указано, что при достаточно быстром закрытии конца какого-либо напорного трубопровода в нем возникает гидравлический удар (повышение или понижение давления). Причем этот удар будет тем сильнее, чем больше длина напорного трубопровода. Чтобы уменьшить гидравлический удар и устраивают уравнительный резервуар, который расчленяет напорный тракт, соединяющий водохранилище и гидростанцию, на две отдельные части (*II* и *IV*; см. чертеж), причем при наличии такого резервуара сила гидравлического удара определяется длиной только *IV* части

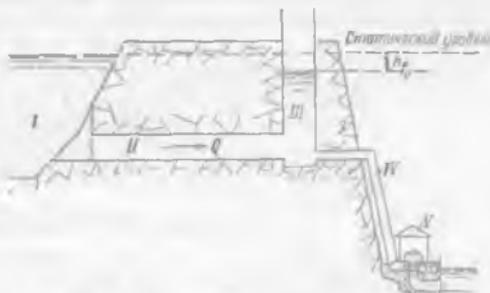


Рис. 9-12 Схема деривационной гидростанции

напорного тракта (а не всей его длиной).

Ясно, что при установившемся движении горизонт воды в уравнительном резервуаре будет стоять ниже горизонта воды в водохранилище на величину h_{f0} (h_{f0} — потеря напора в туннеле при установившемся движении).

Поясним, что будет происходить с горизонтом воды в уравнительном резервуаре после мгновенного закрытия или мгновенного открытия регулирующих органов турбин.

Случай мгновенного закрытия регулирующих органов турбин. После мгновенного закрытия регулирующих органов турбин масса воды, находящаяся в туннеле *II*, благодаря своей инерции будет стремиться продолжать двигаться в направлении к уравнительному резервуару *III*, в связи с чем горизонт воды в нем



Рис. 9-13 Колебания уровня воды в уравнительном резервуаре после мгновенного закрытия регулирующего органа турбин: а — для идеальной и б — для реальной жидкости

будет подниматься до определенной высоты и начнется колебательное движение горизонта воды в уравнительном резервуаре относительно статического уровня. Если представить себе, что жидкость, находящаяся в туннеле *II* и уравнительном резервуаре *III*, является идеальной, то колебательное движение горизонта воды в уравнительном резервуаре *III* будет незаглушающим (рис. 9-13, а). Колебания же горизонта реальной жидкости в резервуаре *III* будут затухать, как показано на рис. 9-13, б.

Случай мгновенного открытия



Рис. 9-14 Колебание уровня воды в уравнительном резервуаре после мгновенного открытия регулирующих органов турбин

регулирующих органов турбин. В этом случае в резервуаре возникнет колебание горизонта воды (относительно уровня, отвечающего установившемуся движению) — см. рис 9-14. Как видно, горизонт воды в резервуаре в некоторые моменты времени будет занимать самое высокое положение, определяемое отметкой V_0 (рис. 9-13, б), в другие же моменты — самое низкое положение, определяемое отметкой V_0' (рис 9-14).

При проектировании уравнительного резервуара необходимо знать отметки V_0 и V_0' . Они могут быть найдены при помощи уравнения Бернулли (9-26). Данный вопрос подробно рассматривается в курсе «Использование водной энергии» [9-2].

Б. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ, КОГДА УЧИТЫВАЕТСЯ ЕЕ СЖИМАЕМОСТЬ, ПРИЧЕМ СТЕНКИ ТРУБОПРОВОДА СЧИТАЮТСЯ НЕ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ (УПРУГИМИ, ДЕФОРМИРУЮЩИМИСЯ). ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР

§ 9-8. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Гидравлическим ударом называется повышение или понижение гидромеханического давления в напорном трубопроводе, вызванное изменением во времени (в каком-либо сечении трубопровода) средней скорости движения жидкости. Явление гидравлического удара обуславливается инерцией той массы жидкости, заключенной в трубопроводе, скорость которой изменяется во времени.

Гидравлический удар в трубопроводе может достигать большой силы. Давление в трубопроводе может значительно изменяться благодаря изменению во времени скорости движения жидкости. Поэтому при расчете толщины стенок трубопроводов (например, трубопроводов гидростанций) приходится учитывать силу гидравлического удара.

Положим, что мы имеем трубу, на конце которой установлен кран K . Жидкость, находящаяся в трубе, будучи остановлена закрытием крана, благодаря своей инерции окажет большое давление на закрытый кран.

Если при рассмотрении такого явления пренебрежем сжимаемостью жидкости и деформируемостью стенок трубы, как делали выше в разделе А, то при этом получим в трубе так называемый «абсолютно жесткий» удар, что, как показывает опыт, вовсе не отвечает действительности.

На характер явления гидравлического удара оказывают большое влияние сжимаемость жидкости и деформируемость стенок трубопровода, т. е. способность стенок трубопровода соответствующим образом деформироваться с изменением гидромеханического давления в трубе. Благодаря этим обстоятельствам в трубопроводе при закрытии или открытии крана K получается упругий удар, качественно отличающийся от «абсолютно жесткого» удара. В случае упругого удара давление вдоль трубопровода распространяется волнами, причем эти волновые явления оказываются весьма резко выраженными, и с ними нельзя не считаться при изучении гидравлического удара.

Достаточно точное исследование задачи о гидравлическом ударе было впервые выполнено Н. Е. Жуковским (в 1898 г.), который дал дифференциальные уравнения, описывающие явление удара, а также полное решение этих уравнений, кроме того, Н. Е. Жуковский проверил свою теорию специально поставленными им опытами на Московской водопроводной сети.

Основные соотношения, полученные Н. Е. Жуковским, можно найти, с некоторым приближением, исходя из теоремы количества движения и уравнения неразрывности движения жидкости.

§ 9.9. ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

Представим себе, что в горизонтальную трубу T , наполненную жидкостью, введен поршень Pr (рис. 9-15). Если жидкость и поршень неподвижны, то при этом в жидкости всюду будет некоторое давление, определяемое горизонтальной пьезометрической линией $P'P''$ (см. пьезометрическую высоту p/γ , указанную на рисунке). Если представить себе, что поршень Pr в некоторый момент $t=0$ начал мгновенно двигаться со скоростью v , то в случае абсолютно несжимаемой жидкости и абсолютно жестких (недеформирующихся) стенок трубопровода, жидкость в момент $t=0$ также начнет двигаться с той же скоростью v сразу по всей длине трубопровода.

Иная картина получается при наличии сжимаемой жидкости и упругих стенок трубопровода.

В этом случае поршень Pr , приведенный в движение, будет выводить жидкость, находящуюся в трубе, из состояния покоя постепенно. Такое положение обуславливается, с одной стороны, сжимаемостью жидкости и упругостью стенки трубопровода и, с другой стороны, наличием сил инерции жидкости. Для некоторого момента времени t' (после начала движения поршня) будем иметь граничную вертикаль $W-W$, которая разделяет жидкость, заполняющую трубу, на два разных объема (см. чертеж):

а) объем левее вертикали $W-W$; здесь жидкость находится еще в состоянии покоя, и давление в этой жидкости то же, что было до начала движения поршня, т. е. равное p/γ ;

б) объем правее вертикали $W-W$; здесь жидкость находится уже в состоянии движения, причем скорость движения жидкости в любом живом сечении, взятом в пределах данного объема, равна скорости v движения поршня.

Важно подчеркнуть, что по мере движения поршня влево со скоростью v упомянутая выше граничная вертикаль $W-W$ движется также влево со скоростью c , причем c значительно больше скорости v :

$$c \gg v. \quad (9-61)$$

Область жидкости B , расположенную правее вертикали $W-W$, можно назвать зоной возмущения или зоной упругой деформации жидкости; скорость c — скоростью распространения возмущения или скоростью распространения упругой деформации жидкости.

Как видно из соотношения (9-61), длина (протяженность) области возмущения B с течением времени должна расти: расстояние между поршнем и границей $W-W$ должно изменяться от нуля до сколь угодно большой величины.

Зона возмущения B , имеющая подвижную границу $W-W$, характеризуется еще следующими обстоятельствами:

1) гидродинамическое давление внутри этой зоны оказывается всюду повышенным на величину, измеряемую высотой $h_{зд}$:

$$h_{зд} = \left(\frac{p}{\gamma} \right)_B - \frac{p}{\gamma}. \quad (9-62)$$

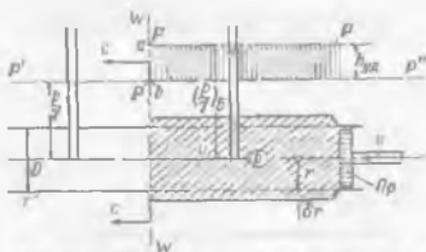


Рис. 9-15. Распространение (со скоростью c) зоны возмущения B после начала движения поршня Pr со скоростью v

где $(p/\gamma)_B$ — пьезометрическая высота, соответствующая области B ; p/γ — пьезометрическая высота для трубы, имевшая место до начала движения поршня.

Эпора величин $h_{уп}$ на чертеже может быть представлена вертикально заштрихованным прямоугольником, выражающим волну повышения давления.¹ «Лоб» ab этой

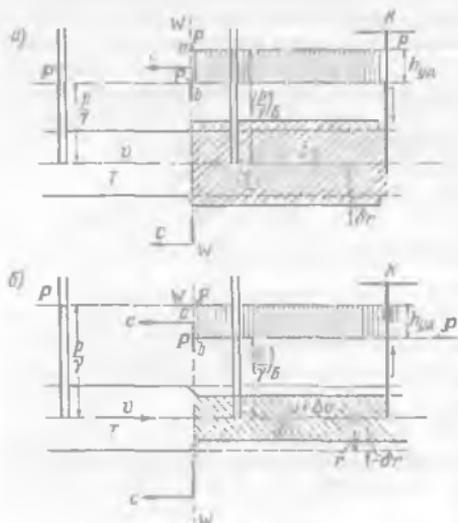


Рис 9-16. Явление гидравлического удара: а — при закрытии крана K , б — при открытии крана K

данную трубу неподвижным поршнем, т. е. задвижкой K . Здесь в момент $t = 0$ у задвижки зарождается зона возмущения B , и граница $W-W$ этой зоны начинает перемещаться со скоростью c вдоль трубы. Такой случай закрытия задвижки показан на рис. 9-16, а. На этом чертеже изображено частичное закрытие задвижки, когда скорость v в конце трубы уменьшается не до нуля, а до величины, равной $(v - \Delta v)$.²

В случае открытия задвижки, когда скорость v в трубе (у задвижки) увеличивается до величины, равной $(v + \Delta v)$, получаем картину, показанную на рис. 9-16, б; как видно, здесь возникает волна понижения давления, причем эта волна распространяется вдоль трубы со скоростью c .

При рассмотрении гидравлического удара полезно иметь в виду следующую аналогию. Представим себе обычную спиральную пружину, имеющую достаточно большую длину. Положим, что эта пружина падает

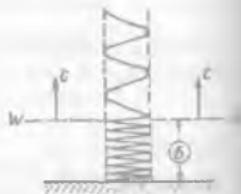


Рис. 9-17. К пояснению гидравлического удара

¹ Как здесь, так и ниже потерями напора в жидкости пренебрегаем.

² Под $(\pm \Delta v)$ здесь и далее следует понимать любое приращение скорости (во времени) — хотя бы весьма большое.

на горизонтальную плоскость. Очевидно, до момента, когда пружина еще не коснулась этой плоскости, расстояние между витками пружины будет всюду одинаковым. После же того, как пружина коснулась горизонтальной плоскости, получим картину, представленную на рис. 9-17: ниже подвижной границы $W-W$, перемещающейся вверх с некоторой скоростью c , расстояние между витками пружины относительно мало (эта область будет соответствовать области возмущения B , рассмотренной выше).

Из всего сказанного видно, что описанное явление, представляющее собой явление гидравлического удара, характеризуется следующими двумя основными величинами:

- 1) приращением давления $h_{уд}$ (положительным или отрицательным), дающим величину гидравлического удара;¹
- 2) скоростью c распространения возмущений, т.е. скоростью распространения гидравлического удара (скоростью движения «лба» волны повышения или понижения давления).

Найдем соответствующие расчетные зависимости для величины $h_{уд}$ и c .

§ 9-10. РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ВЕЛИЧИНЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА И СКОРОСТИ ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Изобразим на рис. 9-18 цилиндрический трубопровод T , в конце которого имеется частично открытый кран K . Будем считать, что в трубопроводе, в частности в сечении W_0-W_0 , намеченном непосредственно у крана, скорость движения жидкости равна v_0 . Представим себе далее, что в момент времени $t = 0$ открытие крана K мгновенно изменилось, в связи с чем скорость в сечении W_0-W_0 также мгновенно изменилась (например, уменьшилась) на величину Δv . При этом непосредственно у крана зародится область возмущения B .

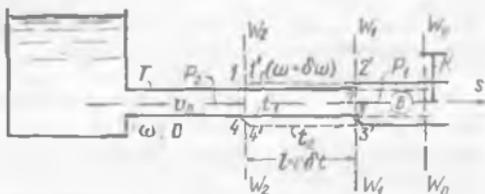


Рис. 9-18. К пояснению зависимостей (9-64) и (9-70)

Будем считать, что в некоторый произвольный момент времени t_1 граница области возмущения занимает положение W_1-W_1 ; в некоторый же момент $t_2 = t_1 + \delta t$ эта граница переместится в положение W_2-W_2 . Расстояние между вертикалями W_1-W_1 и W_2-W_2

$$l = c \delta t; \quad (9-63)$$

явно, что за время δt стенки трубы на длине l раздадутся и примут положение, показанное на чертеже штриховой линией.

Применяя к отрезку жидкости W_1-W_2 , заключенному между сечениями W_1-W_1 и W_2-W_2 , уравнение неразрывности и теорему количества движения, получаем следующие расчетные зависимости:

- а) Зависимость для величины $h_{уд}$:²

¹ Как здесь, так и ниже приращение пьезометрической высоты $h_{уд}$, обусловленное гидравлическим ударом, будем называть приращением давления.

² Вывод зависимостей (9-64) и (9-67) приводится петитом в [9-10; с. 309].

$$h_{уд} = \frac{P_{уд}}{\gamma} = -\frac{c}{g} \Delta v, \quad (9-64)$$

где Δv – положительное или отрицательное приращение (во времени) скорости движения жидкости.

Именно таким образом выражается величина гидравлического удара. Как видно, при положительном Δv , т.е. при увеличении начальной скорости v_0 , получаем отрицательное значение $h_{уд}$, обуславливающее возникновение волны понижения давления.¹

В случае полного закрытия крана K , когда

$$\Delta v = -v_0, \quad (9-65)$$

величина гидравлического удара оказывается равной

$$h_{уд} = \frac{c}{g} v_0. \quad (9-66)$$

б) Зависимость для величины c (в случае круглой трубы):

$$c = \sqrt{\frac{g}{\gamma} E_{ж}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{E_{ж}}{E_r}}}, \quad (9-67)$$

где $E_{ж}$ – модуль объемной упругости жидкости; E_r – модуль упругости материала стенок трубы; D – внутренний диаметр трубы; e – толщина стенок трубы.

Величина

$$\sqrt{\frac{g}{\gamma} E_{ж}} = c_0 \text{ (обозначение)} \quad (9-68)$$

представляет собой скорость распространения звука в покоящейся жидкости, причем для воды

$$c_0 = 1425 \text{ м/с.} \quad (9-69)$$

Учитывая это, выражение (9-67) для относительной скорости распространения гидравлического удара в круглой тонкостенной трубе, заполненной водой, можно окончательно представить в виде

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{E_{ж}}{E_r}}}, \text{ м/с.} \quad (9-70)$$

Как видно, для данной жидкости

$$c = f\left(\frac{D}{e}, \frac{E_{ж}}{E_r}\right) \quad (9-71)$$

и не зависит от характера возмущения.

Надо заметить, что величина c может измеряться сотнями и даже тысячами метров в секунду.

¹ Понижение давления может обусловить возникновение в жидкости вакуума, который, однако, не может быть больше «предельного» (стр. 229), когда сплошность движения жидкости оказывается нарушенной.

§ 9-11. ПРЯМОЙ (НАЧАЛЬНЫЙ) И ОТРАЖЕННЫЙ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ УДАРЫ. КОЛЕБАНИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В НЕПОДВИЖНОМ ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ТРУБЫ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ

Представление о гидравлическом ударе будет неполным, если мы не учтем еще следующего существенного обстоятельства.

Изобразим на рис. 9-19, а трубу, заполненную жидкостью;¹ один конец трубы открыт (см. сечение 1—1), другой же конец прикрывается краном К (см. сечение 2—2). Как уже известно, в случае мгновенного закрытия крана в жидкости зарождается волна положительного давления, имеющая вертикальный «лоб» *ab*, причем эта волна движется вдоль трубы.²

Как только «лоб» указанной положительной волны доходит до открытого конца трубы, в этом месте (в сечении 1—1) возникает отраженная отрицательная волна, представляющая собой как бы зеркальное отображение прямой волны, повернутое на 180°. «Лоб» *a'b'* отрицательной отрицательной волны движется с той же скоростью *c* в сторону, противоположную положительной волне (рис. 9-19, б); положительные давления прямой (начальной) волны и отрицательные давления отраженной волны складываются; в результате на участке трубы, охваченном в данный момент времени отраженной волной, давление, обусловленное гидравлическим ударом, оказывается равным нулю (см. пьезометр P_2).

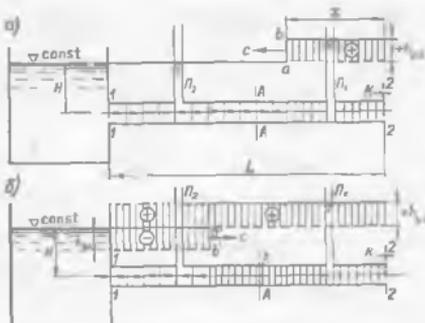


Рис. 9-19. Прямой (начальный) и отраженный гидравлические удары

Как только «лоб» указанной отрицательной волны доходит до закрытого конца трубы, в этом месте (в сечении 2—2) возникает отраженная отрицательная волна, движущаяся со скоростью *c* в сторону, противоположную той отрицательной волне, которая подошла к сечению 2—2.

Высказанные положения об отражении волн давления от открытого и закрытого концов трубы можно представить себе физически.

Когда «лоб» *ab* положительной волны (рис. 9-19, а) подойдет к начальному сечению 1—1 трубы, вся жидкость в трубе будет сжата повышенным давлением, причем сжатие ее будет значительно большим, чем в сосуде.

После этого, начиная с левого конца трубы (рис. 9-19, б) будет происходить постепенное «разжатие» жидкости (расширение ее объемов, показанное на рисунке редкой вертикальной штриховкой), причем некоторые (весьма малые) объемы «разжавшейся» жидкости будут вытекать через сечение 1—1 из трубы в сосуд. В результате и возникает отрицательная волна давления, которая в данный момент времени должна охватывать ту часть трубы, в пределах которой уже «разжавшиеся» (расширившиеся) объемы жидкости движутся в сторону сосуда. Давление жидкости в этой части трубы должно определяться горизонтом жидкости в сосуде.

Когда «лоб» *a'b'* отрицательной волны (рис. 9-19, б) подойдет к крану К (к закрытому концу трубы), вся жидкость, заполняющая трубу, «разожмется», причем в этот момент

¹ Здесь всюду жидкость считаем невязкой.

² На рис. 9-19 и других масштаб длин $h_{уд}$ принят отличным от масштаба длин *H*. Величина *H* может оказаться пренебрежимо малой сравнительно с величиной $h_{уд}$.

времени скорости движения расширяющейся жидкости по всей трубе будут направлены от крана K к сечению $1-1$. Такое положение благодаря инерции жидкости вызовет отрицательную волну давления, которая от крана начнет распространяться в сторону сечения $1-1$.

Важно запомнить, что у открытого конца трубы $1-1$ всегда зарождаются отраженные волны обратного знака (по отношению к прямым волнам, подошедшим к этому концу); у закрытого же конца трубы $2-2$ всегда зарождаются отраженные волны того же знака, что и прямые волны, подошедшие к этому концу.

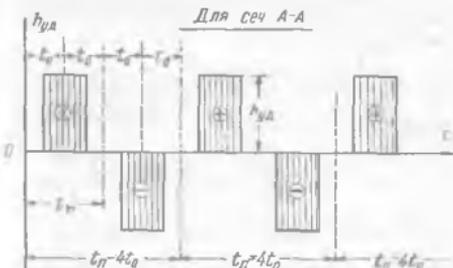


Рис 9-20. Колебание гидромеханического давления в неподвижном поперечном сечении трубы (при гидравлическом ударе)

должно быть равным нулю (т.е. отвечающим горизонту жидкости в сосуде);
 в) в момент времени $t_3 = 3t_0$ давление по всей длине трубы должно быть равным $-h_{уд}$;
 г) в момент времени $t_4 = 4t_0$ давление по всей длине трубы должно быть равным нулю, и т. д.

Таким образом, полный период t_n колебания давления в любом неподвижном поперечном сечении трубы будет равен четырем кратному времени пробега «лбом» волны расстояния L :

$$t_n = 4t_0 = 4 \frac{L}{c}. \quad (9-72)$$

Если наметим на трубе неподвижное сечение $A-A$, то, как ясно из сказанного выше, давление в этом сечении будет изменяться во времени так, как показано на рис. 9-20.² Такое колебание давлений будет иметь место в случае невязкой жидкости. В реальных условиях указанное колебание величины давления должно постепенно затухать.

§ 9-12. СЛУЧАЙ ПОСТЕПЕННОГО ЗАКРЫТИЯ КРАНА. ПОЛНЫЙ И НЕПОЛНЫЙ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ УДАРЫ

Положим, что мы имеем истечение в атмосферу из весьма длинной горизонтальной трубы T , присоединенной к сосуду B (рис. 9-21, а). Будем считать, что кран K , установленный в конце трубы, закрывается не мгновенно, а так, что скорость $v_{кр}$ в самом конце трубы (перед краном) уменьшается, например, по

¹ Здесь и ниже имеется в виду давление, обусловленное только ударом.

² Предполагается, что волна пониженного давления не дает слишком большого вакуума (при котором может возникнуть разрыв сплошности жидкости).

линейному закону от $v_{\text{кн}} = v_0$ до $v_{\text{кн}} = 0$ (см. прямую AB на рис. 9-21, б), где v_0 — скорость в трубе при установившемся движении, когда кран полностью открыт.

Обозначим время полного закрытия крана через t_s . В момент t_s , отсчитываемый от начала закрытия крана, скорость в конце трубы уменьшается на величину $\Delta v = v_0$ и становится равной нулю. Представим себе, что скорость $v_{\text{кн}}$ уменьшается не по линейному закону, а по графику в виде ступенчатой линии (показанной на рис. 9-21, б штриховой линией), причем высоту каждой намеченной достаточно малой («элементарной») ступени обозначим через δ (Δv).

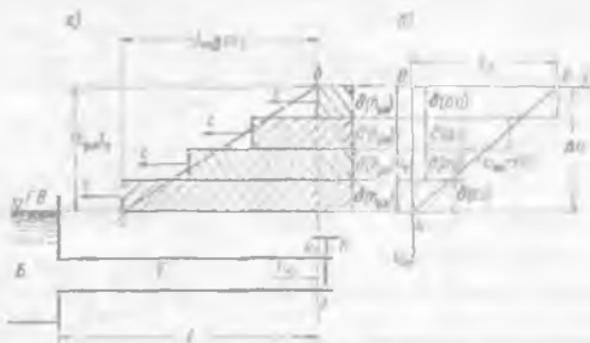


Рис. 9-21. Нарастание величины гидравлического удара при постепенном закрытии крана K

Уменьшая скорость $v_{\text{кн}}$ на элементарную величину δ (Δv), будем посылать в трубу элементарный гидравлический удар,

$$\delta(h_{\text{уд}}) = -\frac{c}{g} \delta (\Delta v). \quad (9-73)$$

В момент времени t_s , когда в трубу будет послан последний элементарный удар $\delta(h_{\text{уд}})$, будем иметь ступенчатый график волны повышения давления, показанный штриховкой на рис. 9-21, а. В данном случае назовем полным ударом $(h_{\text{уд}})_n$ величину

$$(h_{\text{уд}})_n = \frac{c}{g} v_0. \quad (9-74)$$

Из графика на рис. 9-21, а видно следующее:

а) в момент t_s полного закрытия крана в конце трубы (у крана) получается полный гидравлический удар

$$(h_{\text{уд}})_n = \sum \delta(h_{\text{уд}}) = \frac{c}{g} v_0, \quad (9-75)$$

величина которого здесь сохраняется на протяжении последующего времени;

б) длина нарастания полного удара, т. е. длина графика волны, на протяжении которой давление возрастает от нуля до $(h_{\text{уд}})_n$

$$l_{\text{нар}} = ct_s. \quad (9-76)$$

¹ На рис. 9-21, а и б вертикальные масштабы графиков взяты такими, что $h_{\text{уд}}$ и Δv измеряются отрезками одинаковой длины; «отношение этих масштабов» равно c/g [см. формулу (9-74)].

Будем теперь уменьшать высоту ступени δ (Δz) (рис. 9-21, б) до нуля, т. е. приближать ступенчатый график к прямой линии АВ. Легко видеть, что при этом формулы (9-75) и (9-76) будут сохранять свою силу; графическое же изображение «лба» волны в пределе примет «остроконечную» форму, как показано линией ab на рис. 9-21, а и 9-22 (см. график I).

Следует запомнить, что при постепенном закрытии крана, когда скорость $v_{ж}$ в конце трубы уменьшается по линейному закону, имеем следующее:

а) «лоб» волны оказывается очерченным не вертикальной линией ab , а наклонной прямой ab ;

б) длина этого «остроконечного лба» (длина нарастания полного удара) получается равной $l_{нар} = ct$;

в) полный удар в конце трубы наступает в момент t_1 (когда кран полностью закрывается), причем эта величина удара сохраняется в дальнейшем.

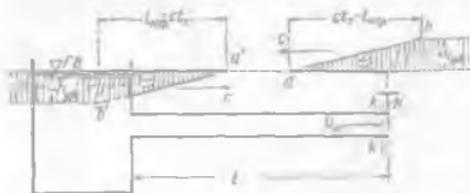


Рис. 9-22. К пояснению полного и неполного гидравлических ударов

Выше мы рассмотрели весьма длинную трубу, для которой в конечном счете всегда получается полный удар. Имея в виду теперь трубу любой длины, будем различать при постепенном закрытии крана два разных случая.

1) полного гидравлического удара; 2) неполного гидравлического удара

С тем, чтобы пояснить вопрос о неполном ударе, обратимся к рис. 9-22. При постепенном закрытии крана К, когда положительная волна давления (см. график I на рис. 9-22) отражается от жидкости в сосуде, мы получаем отрицательную отраженную волну, изображенную графиком II (рис. 9-22)¹.

Если длина нарастания полного удара $l_{нар}$ оказывается большей, чем удвоенная длина L трубы,

$$l_{нар} > 2L, \quad (9-77)$$

то гидравлический удар у крана К в процессе его закрытия, постепенно нарастая, но еще не достигнув своей полной величины в некоторый момент времени перестает увеличиваться благодаря тому, что отрицательная отраженная волна, успев подойти к крану до момента его полного закрытия, начинает накладываться в этом месте на положительную волну.

Можно сказать, что

1) полным гидравлическим ударом называется наибольшая величина постепенно нарастающего (до определенной величины) прямого (начального) гидравлического удара, не сниженная отраженным ударом (имеющим другой знак и не успевшим дойти до места зарождения данного прямого удара к моменту завершения его роста);

2) неполным гидравлическим ударом называется наибольшая величина гидравлического удара, получающаяся в месте зарождения прямого (начального) удара при условии, когда отраженный удар успевает прийти к указанному месту раньше, чем постепенно нарастающий прямой удар достигнет полной своей величины.

¹ В этом легко убедиться, если оперировать, как и выше, элементарными «ступенчатыми» волнами (рис. 9-21).

Величина полного гидравлического удара выражается формулой (9-74), величина же неполного удара

$$(h_{уд})_{неп} < (h_{уд})_п \quad (9-78)$$

или

$$(h_{уд})_{неп} < \frac{c}{g} v_0 \quad (9-79)$$

Условие, при котором получается неполный удар, записывается в виде (9-77) или в виде

$$ct_s > 2L \quad (9-80)$$

или

$$t_s > t_{r1} \quad (9-81)$$

где

$$t_r = \frac{2L}{c} \quad (9-82)$$

причем t_r — время пробега лобовой точкой a волны давления от крана до сосуда и обратно от сосуда до крана (время t_r иногда называют фазой гидравлического удара)¹.

Величина неполного гидравлического удара $(h_{уд})_{неп}$ будет равна тому гидравлическому удару $(h_{уд})_п$, который получается у крана в момент времени t_r , когда точка a отрицательной отраженной волны только подойдет к крану. По истечении времени t_r величина гидравлического удара перестает расти (хотя кран и продолжает закрываться). Величину $(h_{уд})_п$ находим из соотношения

$$\frac{(h_{уд})_п}{(h_{уд})_п} = \frac{t_r}{t_s} \quad (9-83)$$

откуда

$$(h_{уд})_п = \frac{t_s}{t_r} (h_{уд})_п \quad (9-84)$$

Подставляя в (9-84) вместо $(h_{уд})_п$ искомую величину $(h_{уд})_{неп}$ и вместо t_r и $(h_{уд})_п$ их выражения (9-82) и (9-74), получаем:

$$(h_{уд})_{неп} = 2 \frac{v_0 L}{gt_s} \quad (9-85)$$

Из этой формулы видно, что стремясь уменьшить давление жидкости в трубопроводе, следует увеличивать время закрытия крана t_s и уменьшать длину рассматриваемого напорного трубопровода L .

С целью снижения давления в трубопроводе, на которое ведется расчет толщины его стенок, применяют также различные конструктивные меры борьбы с гидравлическим ударом: гидравлический удар снижают при помощи особых открывающихся предохранительных клапанов, устроенных на трубопроводе, и т. п.

Попутно отметим, что явление гидравлического удара иногда может обуславливать и положительный эффект: например, используя силу гидравлического удара, устраивают особые насосы (так называемые гидравлические тараны), служащие для поднятия жидкости [9-5].

¹ Впрочем, фазой гидравлического удара в некоторых литературных источниках называют также и время, равное $\frac{1}{2} t_r$.

V. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ

§ 9-13. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ БЕЗНАПОРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ. ТЕРМИНОЛОГИЯ

Ограничимся рассмотрением только спокойного движения. В практике приходится сталкиваться со случаями, когда в некотором сечении $W-W$, намеченном или в начале, или в конце водотока (канала), резко изменяются отметка z уровня воды и (или) расход Q .

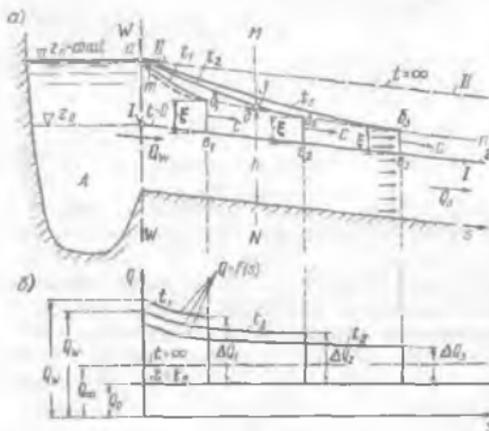


Рис. 9-23. Положительная исходящая волна перемещения, возникающая при быстром поднятии горизонта воды в водоеме A : a — продольные профили поверхности воды, отвечающие различным моментам времени: t_1, t_2, t_3, \dots ; b — график изменения расходов Q вдоль потока для различных моментов времени t

волны (рис. 9-23 и 9-24). Такой случай возникает, когда в начальном сечении $W-W$ канала происходит резкое увеличение отметки z и (или) расхода Q .

На рис. 9-23 представлена схема водоема A , из которого вода поступает в канал. Предполагается, что горизонт воды в водоеме A был быстро поднят с отметки z_0 до отметки z_1 , которая в дальнейшем сохраняется постоянной. В течение некоторого периода времени после поднятия уровня воды в водоеме A (периода неустановившегося движения) свободная поверхность потока в канале также поднимается от «начального» положения $I-I$ до «конечного» положения $II-II$ (отвечающего новому уровню воды в водоеме A).

Как видно, за период времени, отвечающий неустановившемуся движению, водой должен быть заполнен объем, заключенный между свободными поверхностями $I-I$ и $II-II$. Заполнение этого объема в данном случае происходит так, как показано на рис. 9-23, a , где изображен ряд свободных поверхностей ab_1v_1z ; ab_2v_2z ; ab_3v_3z , соответствующих различным моментам времени t_1, t_2, t_3 (причем $t_3 > t_2 > t_1$). На графике рис. 9-23, b пред-

Такого рода изменения z и (или) Q в упомянутом сечении обуславливаются:

- а) резким изменением отметки горизонта воды в одном из водоемов, соединяемых каналом (верховом или низовом);
- б) резким увеличением или уменьшением степени открытия водопропускных отверстий в начале или в конце канала.

Изменение z и Q в сечении $W-W$ русла влечет за собой соответствующие изменения во времени величин z и Q , относящихся к другим сечениям русла.

Эти последние изменения происходят в течение определенного периода времени — периода, отвечающего неустановившемуся движению воды.

Можно различать следующие случаи безнапорного неустановившегося движения.

1. Случай положительной исходящей

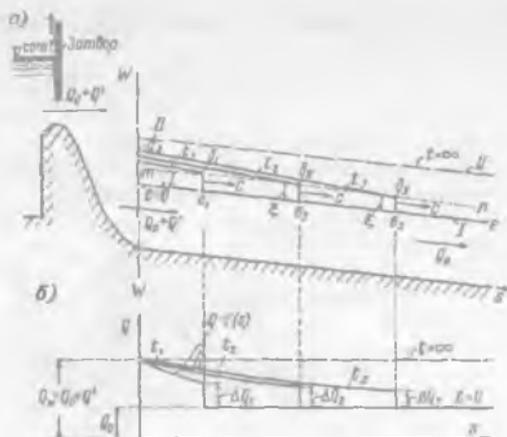


Рис 9-24. Положительная нисходящая волна перемещения, возникающая при открытии затвора: а — продольные профили поверхности воды, отвечающие различным моментам времени t_1, t_2, t_3 ; б — график изменения расходов Q вдоль потока для различных моментов времени t

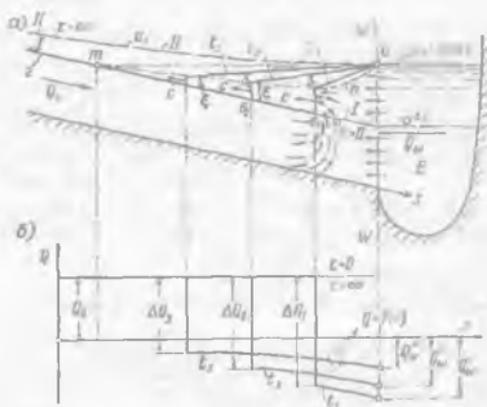


Рис. 9-25. Положительная восходящая волна при поднятии горизонта воды в водоеме В: а — продольные профили поверхности воды, отвечающие различным моментам времени: t_1, t_2, t_3, \dots ; б — график изменения расходов Q вдоль потока для различных моментов времени t

ставлены кривые изменения расхода Q вдоль потока, также отвечающие различным моментам времени.¹

На рис. 9-24 в качестве дополнительного примера изображен случай, когда благодаря быстрому открытию затворов в начале канала, расход, обрасываемый в канал, резко увеличивается от Q_0 до $(Q_0 + Q')$, причем величина расхода $(Q_0 + Q')$ в дальнейшем сохраняется постоянной. Здесь также на рис. 9-24, а показаны схемы свободных поверхностей *абвг* потока, а на графике рис. 9-24, б — кривые $Q = f(s)$, отвечающие различным моментам времени.²

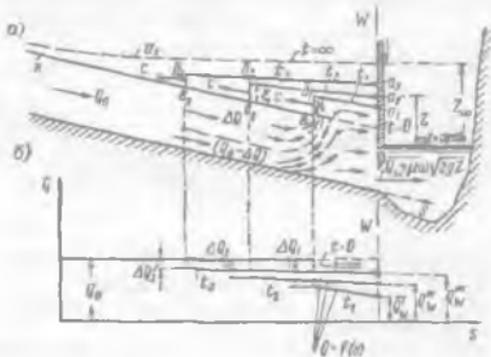


Рис. 9-26. Положительная восходящая волна при закрытии затвора: а — продольные профили поверхности воды, отвечающие различным моментам времени: t_1, t_2, t_3, \dots ; б — график изменения расходов Q вдоль потока для различных моментов времени t

2. Случай положительной восходящей волны (рис. 9-25 и 9-26). Такой случай возникает, когда в конечном сечении $W-W$ канала происходит резкое увеличение отметки z и резкое уменьшение (иногда до отрицательной величины) расхода Q .

На рис. 9-25, а представлена схема водоема В, в который поступает вода из открытого русла. Предположим, что горизонт воды в водоеме В был быстро поднят от отметки z_0 до отметки z_n , которая в дальнейшем сохраняется постоянной. При таком поднятии горизонта воды в водоеме В в открытом русле возникнет свободная поверхность *абвг*, которая будет изменять свою форму во времени (см. ряд свободных поверхностей *абвг*, показанных на чертеже для различных моментов времени).³ Кривые $Q = f(s)$, отвечающие различным моментам времени, для данного случая показаны на графике рис. 9-25, б.

¹ На рис. 9-23 и других (см. ниже) соответствующие схемы даются в искаженном масштабе. При этом на всех этих схемах детали свободной поверхности потока (например, «входной» перепад свободной поверхности на рис. 9-23, особая форма свободной поверхности в районе так называемого лба волны и т. п.) не показаны.

² На рис. 9-24 представлено так называемое неподтопленное истечение из отверстий, образуемых затворами. При таком истечении расход $(Q_0 + Q')$ не зависит от отметки горизонта воды в канале. При подтопленном истечении вопрос усложняется в связи с тем, что при изменении уровня воды в канале будет изменяться и величина расхода $(Q_0 + Q')$, поступающего в канал.

³ Подобные свободные поверхности возникают, например, в реках, выдающихся в моря, где наблюдаются приливные явления.

На рис. 9-26 дополнительно показан случай, когда благодаря частичному закрытию затворов, установленных в конце канала, расход в сечении $W-W$ уменьшился от Q_0 до Q_1 . Как видно, в этом случае получаем деформирующуюся во времени свободную поверхность *абвг*.

3. Случай отрицательной нисходящей волны. Это случай, когда в начальном сечении $W-W$ канала происходит резкое уменьшение отметки z и расхода Q (рис. 9-27, *а* и *б*).

4. Случай отрицательной восходящей волны. Здесь в конечном сечении $W-W$ открытого русла происходит резкое снижение отметки z (рис. 9-28, *а*) или резкое увеличение расхода Q (рис. 9-28, *б*).

Как видно из приведенных чертежей, нарушение условий движения воды в некотором сечении $W-W$ вызывает возмущение, распространяющееся по длине канала в виде волны. Поэтому неустановившееся движение в открытом русле иногда называют волновым.

Разумеется, волны, возникающие на свободной поверхности при рассмотренном выше неустановившемся движении жидкости, по своему характеру существенно отличаются от так называемых ветровых волн (см. гл. 19). При наличии ветровых волн мы часто не наблюдаем перемещения воды по длине водного пространства.

Волны же потока, поясненного выше, переносят иногда значительные объемы воды. В связи с этим обстоятельством волны, представленные на рис. 9-23—9-28, называют иногда волнами перемещения.

Поясним некоторые дополнительные термины (см., например, рис. 9-23):

1. Участок *бв* волны называется «лобом» волны. Иногда этот участок свободной поверхности бывает крутым (даже вертикальным), причем в его районе возникает резко изменяющееся движение. Иногда же данный участок бывает пологим (см., например, рис. 9-27).

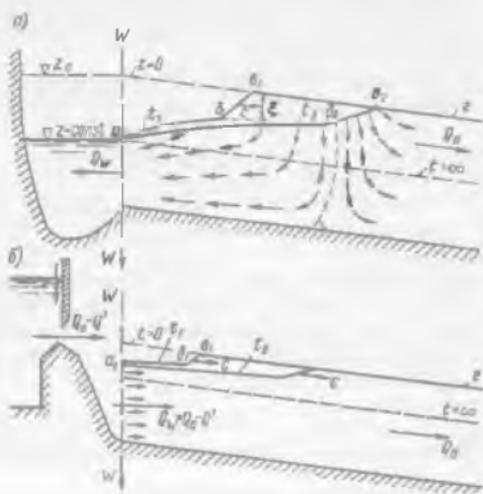


Рис. 9-27. Отрицательная нисходящая волна

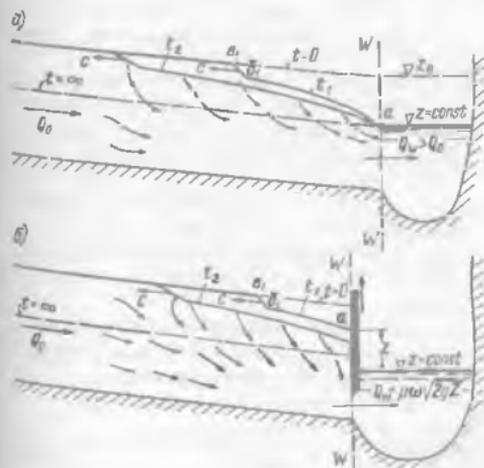


Рис. 9-28. Отрицательная восходящая волна

Форма лба волны в некоторых случаях бывает сходной с формой свободного волнистого прыжка (рис. 8-5). Начертание лба волны в плане называют фронтом волны.

2. Участок ab отвечает телу волны. В районе тела волны всегда имеет место плавное и медленно изменяющееся движение. В связи с этим после прохода лба волны через данное сечение русла отметка горизонта воды в нем должна изменяться медленно.

3. Линия MN (штриховая), которая представляет собой траекторию точки b лба волны (см., например, рис. 9-23, *a*), называется волновой границей.

При рассмотрении описанного неустановившегося движения приходится интересоваться следующими величинами:

- а) скоростью движения фронта волны; эту скорость обозначаем через c ;
- б) высотой «лба» волны; эту величину обозначаем через ξ ;
- в) так называемым волновым расходом ΔQ (см., например, график на рис. 9-23, *b*).

Соответствующие расчеты безнапорного неустановившегося движения воды, при помощи которых выявляются величины c , ξ и ΔQ , приходится вести, в частности, при проектировании гидростанций, например, в связи с так называемым суточным регулированием расходов, а также с анализом гидравлической картины, получающейся при включении или выключении турбин гидростанции, и т. п.

В настоящем курсе даем только основные понятия из области рассматриваемого неустановившегося движения.¹

§ 9-14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ И ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ОБ ИХ РЕШЕНИИ

Рассматриваемое движение воды, имеющее место в пределах тела волны, может быть описано двумя дифференциальными уравнениями: уравнением неразрывности и уравнением динамического равновесия.

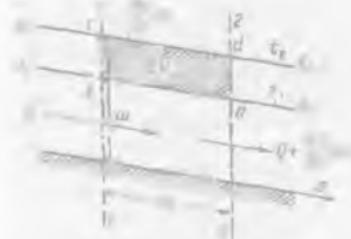


Рис 9-29 К выводу уравнения неразрывности

1°. Уравнение неразрывности (уравнение баланса расхода). Представим на рис. 9-29 продольный разрез тела волны, причем изобразим на этом чертеже две свободные поверхности: A_1B_1 , отвечающую моменту времени t_1 , и A_2B_2 , отвечающую моменту времени t_2 ($t_2 = t_1 + dt$). Наметим два неподвижных (скрепленных с неподвижным пространством) сечения потока: 1-1 и 2-2, причем расстояние ds между этими сечениями считаем бесконечно малым. Будем рассматривать отсек пространства, заключенный между упомянутыми сечениями.

Обозначим через dV элементарный объем жидкости, выраженный на чертеже площадью $abcd$ и заключенный между свободными поверхностями A_1B_1 и A_2B_2 в пределах рассматриваемого отсека пространства. Для величины dV можно написать два разных выражения.

С одной стороны,

$$dV = Q dt - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds \right) dt = - \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt, \quad (9-86)$$

¹ Дальнейшее развитие этого вопроса излагается в специальных курсах («Использование водной энергии» и т. п.).

где Q – расход в сечении 1–1; $\left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds\right)$ – расход в сечении 2–2.

Выражение (9-86) представляет собой разность объемов воды, поступившей за время dt через сечение 1–1 в рассматриваемый отсек пространства и вытекшей из него за то же время dt через сечение 2–2.

С другой стороны,

$$dV = \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} dt\right) ds, \quad (9-87)$$

где $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} dt\right)$ – приращение (за время dt) площади живого сечения ω (измеряемой в сечении 1–1).

Очевидно, выражение (9-87) дает приращение за время dt объема воды, заключенной в рассматриваемом отсеке пространства.

Считая воду несжимаемой, можем приравнять выражения (9-86) и (9-87). При этом и получаем первое искомое дифференциальное уравнение:

$$-\frac{\partial Q}{\partial s} ds dt = \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} dt\right) ds, \quad (9-88)$$

или

$$(I) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (9-89)$$

В случае прямоугольного призматического русла данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (9-90)$$

или

$$\frac{\partial(hv)}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (9-91)$$

2°. Уравнение динамического равновесия. Здесь, как и в предыдущем пункте, рассматриваем элементарный отсек потока между сечениями 1–1 и 2–2, ограниченный свободной поверхностью A_1B_1 (рис. 9-29). При этом, выяснив все силы, действующие на данный отсек (включая силы инерции), проектируем эти силы на направление движения; сумму проекций этих сил согласно принципу Даламбера приравняем нулю и в результате получаем искомое дифференциальное уравнение.

Идя по такому пути, получаем известное дифференциальное уравнение неравномерного плавно изменяющегося движения (7-12); однако это уравнение в случае неустановившегося движения оказывается дополненным одним новым членом, выражающим локальную часть сил инерции. Данное уравнение имеет вид (если примем $\alpha = \alpha_0 = 1$).

$$J = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (9-92)$$

Здесь последний член правой части учитывает упомянутую локальную часть силы инерции: $\frac{1}{g}$ – масса единицы веса жидкости; $\frac{\partial v}{\partial t}$ – локальная часть ускорения. Что касается остальных членов (9-92), то, как было показано в § 7-3:

величина J представляет собой уклон свободной поверхности:

$$J = i - \frac{\partial h}{\partial x}; \quad (9-93)$$

выражение $\frac{v^2}{C^2 R}$ даст нам уклон трения:

$$i_f = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{K^2}. \quad (9-94)$$

С учетом (9-93) и (9-94) уравнение (9-92) можно переписать в виде

$$(II) \quad i - \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{Q^2}{K^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (9-95)$$

3. Общие замечания о существующих методах решении дифференциальных уравнений (I) и (II). Полученные выше уравнение баланса расхода (I) и уравнение динамического равновесия (II) представляют собой систему двух дифференциальных уравнений, которые принято называть уравнениями Сен-Венана.

В результате решения этой системы, вообще говоря, мы должны получить две функции:

$$Q = f_1(t, s) \text{ и } \omega = f_2(t, s). \quad (9-96)$$

Если бы эти функции были известны, то можно было бы решать различные практические задачи, например, можно было бы построить свободную поверхность тела волны, отвечающую данному моменту времени, и т. п. В результате решения этих уравнений можно также получить высоту вертикального лаба волны ξ и скорость c движения волны.

Система уравнений (I) и (II) является системой нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа. Решение этой системы уравнений представляет значительные математические трудности.

Существует целый ряд различных методов приближенного решения данной системы уравнений. Главнейшие из этих методов могут быть разбиты на следующие две группы.

1. Первая группа решений Сюда относятся методы, основанные на использовании ЭВМ, без введения в расчет каких-либо особых дополнительных допущений.

Здесь имеют место два разных пути:

а) использование разностных методов (методов численного интегрирования); общая идея таких методов достаточно хорошо известна: эти методы получили в настоящее время широкое развитие (в частности, благодаря работам сотрудников Сибирского отделения АН СССР);

б) использование так называемого прямого метода; в этом случае исходные уравнения представляют в виде сумм по выбранным системам линейно-независимых функций; здесь неизвестными функциями являются коэффициенты сумм, которые в свою очередь являются функциями от новых независимых переменных; упомянутые коэффициенты определяют, используя соответствующие граничные условия, по методу Бубнова-Галеркина; в конечном счете такого рода задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений; этим решениям посвящены, в частности, работы Н. А. Картевшливили.

2. Вторая группа решений Сюда относятся методы, основанные на использовании дополнительных допущений [несколько упрощающих исходные уравнения (I) и (II)]:

а) метод характеристик, основанный на присоединении к исходным уравнениям (I) и (II) соответствующих им уравнений характеристик; при этом исходные уравнения (I) и (II) несколько упрощают, например, в этих уравнениях пренебрегают уклонами dna и силами гидравлического сопротивления; такого рода метод разрабатывался в СССР С. А. Христиановичем;

б) метод мгновенных режимов, основанный на последовательном рассмотрении картин движения воды, относящихся соответственно к моментам времени t_1 и t_2 при условии, что величина $\Delta t = t_1 - t_2$ является достаточно малой; при этом здесь в исходных уравнениях пренебрегают членами $\frac{1}{g} \frac{\partial \tau}{\partial t}$ и $\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s}$; впервые этот метод нашел отражение в работах Н. М. Бернадского;

в) методы, основанные на использовании теории волн малой амплитуды (эти методы нашли отражение в работах Н. Т. Мелешенко, Г. Г. Самородова, В. П. Симонова и др.); здесь рассуждают следующим образом. Имеем, например, бьеф суточного регулирования гидростанции; горизонт воды в этом бьефе колеблется вокруг некоторого среднего положения. В найденные дифференциальные уравнения вместо h , Q и т. д. вводят величины $h_{cp} + \Delta h$, $Q_{cp} + \Delta Q$ и т. д., где h_{cp} и Q_{cp} — параметры, отвечающие упомянутому выше среднему положению уровня воды в бьефе. Далее, после некоторого преобразования рассматриваемых уравнений, получаем отдельные члены уравнений, содержащие произведения $\Delta h \Delta Q$, $(\Delta h)^2$, $(\Delta Q)^2$. Пренебрегая этими членами ввиду их малости, получаем линейные дифференциальные уравнения. Такая линеаризация уравнений и позволяет решить задачу.

Кроме отмеченных выше методов, существуют еще и другие предложения по решению рассматриваемой задачи, в основу которых заложены более смелые допущения. При этом иногда данную задачу некоторые авторы предлагают решать графоаналитическим способом.

Надо сказать, что в СССР, помимо названных выше ученых, в рассматриваемой весьма сложной и вместе с тем весьма актуальной области, работали многие другие исследователи (В. А. Архангельский, Н. М. Бернадский, В. В. Ведерников, И. В. Егязаров, В. М. Маккаев, Н. В. Мاستицкий, А. Н. Рахманов и др.).

Ниже мы ограничимся кратким освещением только решения Сен-Венана, относящегося к простейшему частному случаю потока воды.

§ 9-15. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ, ОТНОСЯЩЕГОСЯ К ПРОСТЕЙШЕМУ СЛУЧАЮ РУСЛА. ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим призматическое русло прямоугольного поперечного сечения с горизонтальным дном; потерями напора будем пренебрегать, считая, что жидкость идеальная.

Этот случай, решенный А. Сен-Венаном, характеризуется условиями

$$i = 0; \quad i_f = \frac{Q^2}{K^2} = 0. \quad (9-97)$$

Подставляя соотношения (9-97) в уравнение (9-95), получаем систему дифференциальных уравнений в виде [см. также уравнение (9-91)]:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{\partial(hv)}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0; \\ \text{(II)} \quad & -g \frac{\partial h}{\partial s} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (9-98)$$

Полученную систему уравнений, используя обычные методы математики [9-9], можно легко решить. Не останавливаясь здесь на этой чисто математической стороне вопроса, ограничимся пояснением только окончательных результатов решения.

Изобразим на рис. 9-30 продольный разрез рассматриваемого русла. Горизонтальной линией $N-N$ на чертеже покажем свободную поверхность, отвечающую случаю установившегося движения. (Напомним, что потерями напора при движении жидкости пренебрегаем.) На схемах $a, б, в, г$ этого чертежа представим известные четыре случая волны перемещения (см. § 9-13).

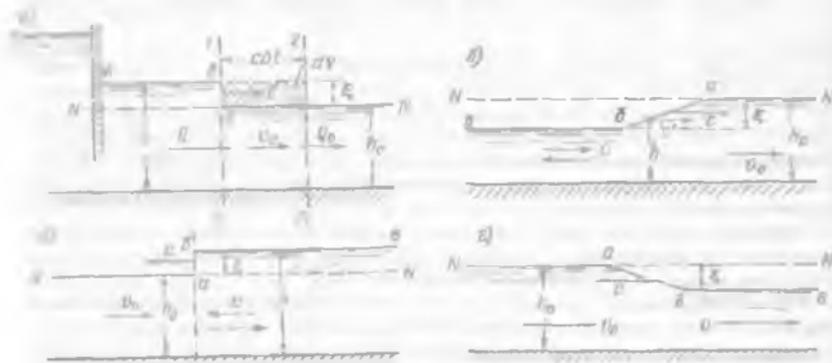


Рис. 9-30 Волны перемещения в призматическом прямоугольном русле (жидкость идеальная)

Соответствующее исследование полученных уравнений показывает, что в случае положительной волны (рис. 9-30, a и $б$) «лоб» волны ab практически можно принимать вертикальным, как показано на чертеже. Что касается отрицательной волны (рис. 9-30, $в$ и $г$), то здесь «лоб» волны ab оказывается достаточно пологим, причем в различных точках линии ab имеем разную скорость, которую обозначим через c' . Для этих отрицательных волн под скоростью c (скорость движения фронта волны) следует понимать среднюю величину из скоростей c' , относящихся к разным точкам линии ab .

Упомянутое решение системы (9-98) дает следующие расчетные зависимости.¹

$$c = v_0 \pm \sqrt{gh_0} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\xi}{h_0} \right); \quad (9-99)$$

$$c' = v_0 \pm (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}); \quad (9-100)$$

¹ Формула (9-99) получена в результате некоторого упрощения соответствующих математических выражений. Более точное рассмотрение вопроса дает нам вместо (9-99) зависимость

$$c = v_0 \pm \sqrt{gh_0} \sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{h_0} \right)^2}. \quad (9-99')$$

где индексом «0» обозначены элементы, относящиеся к установившемуся режиму, который имел место до возникновения неустановившегося движения; ξ — высота «лба» волны; h — глубина потока при неустановившемся движении в той точке линии ab (рис. 9-30, в), где измеряется скорость c' .

Часто высота волны ξ мала сравнительно с глубиной h_0 , отвечающей установившемуся движению. Поэтому, пренебрегая отношением $\xi:h_0$, формулу (9-99) можно представить в виде

$$c = v_0 \pm \sqrt{gh_0}, \quad (9-101)$$

где c является абсолютной скоростью перемещения лба волны.

Если волна распространяется в бьефе, находившемся до момента возникновения неустановившегося движения в покое ($v_0 = 0$), то скорость движения фронта волны c оказывается равной

$$c_0 = \sqrt{gh_0}; \quad (9-102)$$

c_0 следует рассматривать также как относительную скорость перемещения лба волны (по отношению к движущейся воде); формула (9-102) называется формулой Лагранжа.

Приведенные выше зависимости (9-99)–(9-101) содержат после скорости v_0 два знака (\pm). Подчеркнем, что плюс относится к случаю нисходящей волны, т. е. распространяющейся вниз по течению (рис. 9-30, а и в); минус относится к восходящей волне, т. е. к распространяющейся вверх по течению (рис. 9-30, б и г). В случае отрицательной волны (рис. 9-30, в и г) величину ξ в формуле (9-99) следует считать отрицательной.

Рассматривая далее положительную волну (рис. 9-30, а и б), установим дополнительную связь между величиной ξ и волновым расходом $\Delta Q = Q - Q_0$. Для этого на рис. 9-30, а наметим два неподвижных сечения: 1–1 и 2–2; будем считать, что расстояние между этими сечениями равно $c\Delta t$. Обозначим через dV объем воды, отложившейся за время Δt в отсеке 1–2 между указанными сечениями. Очевидно, для величины dV можно написать два различных выражения:

$$dV = Q\Delta t - Q_0\Delta t = (Q - Q_0)\Delta t; \quad (9-103)$$

$$dV = B\xi c\Delta t. \quad (9-104)$$

где B — ширина прямоугольного русла.²

Приравняв выражения (9-103) и (9-104), имеем:

$$(Q - Q_0)\Delta t = B\xi c\Delta t \quad (9-105)$$

или

$$\Delta Q = Q - Q_0 = B\xi c, \quad (9-106)$$

или

$$\xi = \frac{\Delta Q}{Bc} = \frac{Q - Q_0}{Bc}. \quad (9-107)$$

Располагая зависимостью (9-106) или (9-107), а также (9-101) или (9-99), можно решать различные задачи. Например:

¹ В действительности положительной волне предшествует передний вал, высота которого составляет примерно $\frac{3}{2}\xi$.

² Если бы рассматривали непрямоугольное русло (см. ниже), то под величиной B надо было бы понимать ширину потока на высоте половины волны.

а) положим, что мы мгновенно увеличили открытие шита (рис. 9-30, а) так, что расход Q_0 возрос на величину ΔQ . Требуется найти высоту волны ξ и скорость c ее распространения вдоль канала. Для решения этой задачи по формуле (9-101) вычисляем c и далее по формуле (9-107) находим ξ . Получив ξ , величину c можно уточнить по формуле (9-99), а затем по найденной уточненной величине c снова определить по (9-107) значение ξ и т. д.;

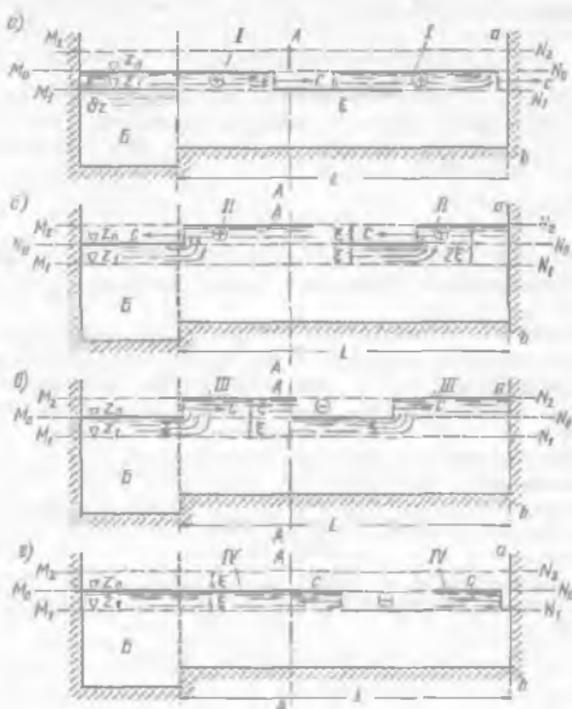


Рис. 9-31. Отражение волн перемещения

б) положим, что мы резко подняли горизонт воды в конце канала на величину ξ над линией $N-N$ (рис. 9-30, б). Требуется найти волновой расход и скорость распространения волны вдоль канала. Для решения этой задачи по формуле (9-99) или (9-101) находим c ; по формуле же (9-106) вычисляем ΔQ .

В случае отрицательной волны решение подобных задач несколько осложняется необходимостью строить по формуле (9-100) очертание линии ab .

В заключение приведем следующие замечания:

1. При выводе приведенных выше зависимостей мы пренебрегали потерями напора. Гидравлические сопротивления здесь мало влияют на результаты расчета.

2. Приведенное выше решение с некоторым приближением может быть распространено и на случай любых правильных цилиндрических русел. При этом только в зависимостях для скорости c под величиной h_0 следует понимать отношение $\frac{\omega_0}{B}$, где ω_0 — площадь живого сечения потока до возникновения неуставившегося движения, B — его ширина на высоте половины волны.

3. Рассмотрим для примера случай движения воды, показанный на рис. 9-23. Наметим некоторое произвольное вертикальное сечение $M-N$. Для момента времени t_2 в этом сечении будем иметь глубину воды h , показанную на чертеже.

Величина расхода Q_{MN} в данном сечении (в момент времени t_2) будет определяться величиной уклона J свободной поверхности в этом же сечении, согласно формуле (9-92). Пренебрегая же силами инерции в рассматриваемом сечении, величину Q_{MN} можно с некоторым приближением выразить через уклон J при помощи известной формулы Шези.

Очевидно, расход Q_{MN} можно представить в виде суммы:

$$Q_{MN} = Q' + \Delta Q_2 + Q_0, \quad (9-108)$$

где Q_0 — расход, отвечающий «начальной» свободной поверхности $I-I$ в канале;

ΔQ_2 — волновой расход;

$$\Delta Q_2 = \xi Bc; \quad (9-109)$$

причем здесь c приближенно можно установить по формуле (9-101);

Q' — расход воды, которая заполняет объем, расположенный выше кривой $d-b_2$ и обуславливает подъем свободной поверхности $a-b_2$.

Руководствуясь этими соображениями, можно более подробно с качественной стороны проанализировать схемы движения воды, показанные на рис. 9-27 и 9-28.

4. Рассмотрим волну перемещения в русле конечной длины. Здесь сталкиваемся с явлением отражения этой волны, аналогичным отражению волны давления при гидравлическом ударе (см. рис. 9-19, и 9-20).

На схемах рис. 9-31 представлен случай движения идеальной жидкости в призматическом горизонтальном русле после того, как горизонт жидкости в бассейне B был мгновенно поднят на величину δz (от уровня M_1N_1 до уровня M_0N_0).

Из этого чертежа видно, что от «закрытого» конца русла (от стенки ab) волна перемещения отражается с тем знаком, который имеет волна, подошедшая к стенке ab : от «открытого» же конца канала (от бассейна B) волна перемещения отражается с обратным знаком.

Незатухающие колебания горизонта идеальной жидкости в некотором сечении $A-A$ русла, обусловленные поясненным волновым движением, изображены графиком на рис. 9-32.



Рис. 9-32. Незатухающие колебания горизонта идеальной жидкости в сечении $A-A$ (рис. 9-31)

§ 9-16. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЙ СПОКОЙНОГО И БУРНОГО ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК КАК ОСТАНОВИВШАЯСЯ ВОЛНА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В § 7-6 понятия спокойного и бурного движения нами были определены чисто формально. Мы говорили, что спокойным движением называется случай, когда $h > h_c$, а бурным — случай, когда $h < h_c$. Осветив в настоящей главе вопрос о волнах перемещения и установив величину скорости c движения этих

волн, мы можем теперь дать более точное и физически ясное определение понятий спокойного и бурного движений.

Рассмотрим, например, формулу (9-101), причем будем иметь в виду случай восходящей волны, т. е. волны, имеющей теиденцию перемещаться вверх по течению. Для такого случая упомянутую формулу следует переписать в виде

$$c = v_0 - \sqrt{gh_0} = v_0 - c_0, \quad (9-110)$$

где через c_0 обозначено относительное перемещение лба волны (по отношению к воде, движущейся со скоростью v_0):

$$c_0 = \sqrt{gh_0}. \quad (9-111)$$

Очевидно, что при соотношении

$$c_0 > v_0 \quad (9-112)$$

возмущение в виде волны, возникшее (по тем или другим причинам) на свободной поверхности (см. рис. 9-30, б), будет перемещаться вверх по течению; в случае же обратного соотношения:

$$c_0 < v_0 \quad (9-113)$$

указанное возмущение свободной поверхности (в виде волны) должно перемещаться («сноситься» течением) только вниз по течению.

Именно этот последний случай движения жидкости, характеризуемый неравенством (9-113), не рассматривавшийся нами выше в настоящей главе, и называется бурным движением; случай же, характеризуемый неравенством (9-112), называется спокойным движением.

Таким образом, можно сказать, что *спокойное движение жидкости есть такое движение, при котором то или другое возмущение, например, искусственно созданное на свободной поверхности, будет распространяться как вверх, так и вниз по течению; при бурном же движении указанное возмущение будет распространяться только вниз по течению.*

Исходя из такого определения бурного и спокойного движений, вообще говоря, можно различать русла (например, составного поперечного профиля, см. рис. 6-3, е), в одной части живого сечения которых (например, в центральной части) мы можем иметь бурное движение; в другой же части рассматриваемого живого сечения — спокойное движение.

В связи со сказанным следует различать частный случай, когда

$$v_0 = c_0, \quad (9-114)$$

т. е. когда скорость движения воды v_0 оказывается равной скорости c_0 относительного движения (вверх по течению) волны перемещения. Очевидно, в этом случае возникшая волна перемещения окажется неподвижной в пространстве; для нее будем иметь $c = 0$. Такая неподвижная волна является известным нам гидравлическим прыжком, рассматриваемым в гл. 8. Поэтому гидравлический прыжок иногда называют остановившейся волной перемещения. Выведенное ранее основное уравнение прыжка (8-23) может быть легко получено из зависимости (9-99), если в этой зависимости положить $c = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 9-1. Архангельский В. А. Расчеты неустановившегося движения в открытых водотоках. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
 9-2. Использование волной энергии./Под ред. Д. С. Павелева. — Л.: Энергия, 1976.

9-3. Картвелишвили Н. А. Неустановившиеся режимы в силовых узлах гидроэлектрических станций. — М — Л.: Госэнергоиздат, 1951.

9-4. Кривченко Г. И. Гидравлический удар и рациональные режимы регулирования турбин гидроэлектростанций. — М.— Л.: Госэнергоиздат, 1951.

9-5. Овсепян В. М. Гидравлический таран и тараные установки. — М.: Машиностроение, 1968.

9-6. Суриц А. А. Гидравлический удар в водопроводах и борьба с ним. — М.: Трансжелдориздат, 1946.

9-7. Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б. Некоторые вопросы механики сплошной среды. — М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1938.

9-8. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.— Л.: Гостехиздат, 1951.

9-9. Чертоусов М. Д. Гидравлика: Специальный курс. — М.— Л.: Госэнергоиздат, 1962.

9-10. Чугаев Р. Р. Гидравлика. — Л.: Энергия, 1975.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ. СВОБОДНЫЕ СТРУИ

А. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЯ В ТОНКОЙ ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ

§ 10-1. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ МАЛОГО ОТВЕРСТИЯ В АТМОСФЕРУ

Как показывают опыты, картина истечения жидкости из некоторого сосуда через малое отверстие в вертикальной тонкой стенке имеет вид, изображенный на рис. 10-1, где обозначено: p_0 — давление на поверхности жидкости в сосуде; в общем случае p_0 не равно атмосферному давлению p_a ; ω — площадь отверстия; ω_c — площадь сечения струи в некотором сечении $C-C$, называемом сжатым сечением (см. ниже); H — заглубление центра тяжести ЦТ площади ω отверстия под уровнем жидкости в сосуде; падением жидкости на расстоянии l_0 от стенки сосуда до сжатого сечения пренебрегаем, а поэтому считаем, что H является также заглублением центра тяжести площади ω_c под уровнем жидкости в сосуде.

Струи жидкости по выходе из отверстия резко сжимается на протяжении до сечения $C-C$. Такое сжатие обусловливается инерцией частиц жидкости, движущихся при подходе к отверстию по криволинейным траекториям [в частности, инерцией частиц M (рис. 10-1), которые скользят непосредственно по стенке сосуда и, выйдя из него, движутся по границам струи].

Если не учитывать возможной аэрации струи, т. е. насыщения ее пузырьками воздуха, а также не учитывать сопротивления воздуха, то надо считать,

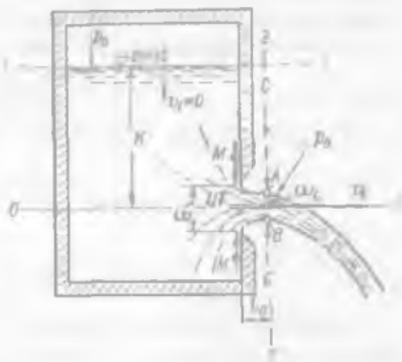


Рис. 10-1. Истечение жидкости из малого отверстия в атмосферу