

Из приведенных значений коэффициентов вязкости следует, что вязкость воды уменьшается с увеличением температуры от 0 до 100°C почти в семь раз, а вязкость воздуха возрастает с увеличением температуры от 20 до 50°C на 25%. Для расчетов в инженерно-строительной практике пользуются значением кинематического коэффициента вязкости воды $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с} = 0,01 \text{ Ст}$.

Жидкости, для которых справедлива зависимость (1.30), называются ньютоновскими. Однако существует много жидкостей, для которых закон Ньютона не выполняется. Наука о характере зависимости

$p_{zx} = f\left(\frac{du_x}{dz}\right)$ называется реологией (ρεο — течь, λογος — учение).

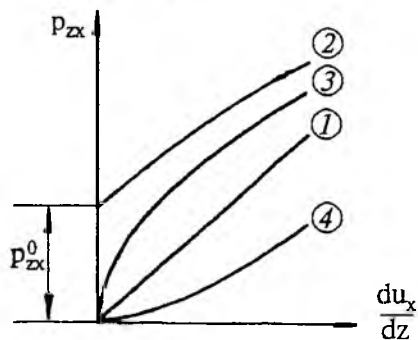


Рис. 1.9. Реологические законы в жидкостях:

1 — ньютоновская; 2 — жидкость Бингама—Шведова; 3 — псевдопластическая; 4 — дилатантная

они подчиняются зависимостям 3, то они называются псевдопластическими, а если следуют зависимости 4 — дилатантными. Механика движения таких жидкостей (это смолы, нефтепродукты, растворы полимеров и т.п.) очень сложна.

Если представить зависимость (1.30) в виде графика (рис. 1.9), то она будет иметь вид прямой линии 1. При экспериментальном исследовании некоторых жидкостей зависимость

$p_{zx} = f\left(\frac{du_x}{dz}\right)$ может иметь вид 2. Такие жидкости, которые сопротивляются небольшим ($p_{zx} < p_{zx}^0$) сдвигающим напряжениям как твердое тело, а при $p_{zx} > p_{zx}^0$ ведут себя как жидкие тела, называются жидкостями Бингама—Шведова.

Жидкости, поведение которых описывается кривыми 3, 4, называются жидкостями Оствальда—Вейля. Если

ГЛАВА 2

ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика — раздел гидромеханики, в котором изучают жидкости, находящиеся в условиях равновесия (покоя).

2.1. Гидростатическое давление в точке

Из определения текучести среды следует, что в состоянии покоя в жидкости касательные напряжения равны нулю, и в каждой точке произвольно ориентированной в пространстве площадки действуют только нормальные напряжения. Возьмем произвольную площадку (рис. 2.1),

имеющую единичный вектор нормали $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Так как вектор напряжений на этой площадке \mathbf{p}_n параллелен \mathbf{n} , то можно записать

$$\mathbf{p}_n = p_{nn} \mathbf{n} = (p_{nn} n_x, p_{nn} n_y, p_{nn} n_z), \quad (2.1)$$

где p_{nn} — проекция \mathbf{p}_n на нормаль к площадке; очевидно, $|p_{nn}| = |\mathbf{p}_n|$.

С другой стороны, согласно (1.19) имеем

$$\mathbf{p}_n = (n_x, n_y, n_z) \begin{pmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{pmatrix} = (p_{xx} n_x, p_{yy} n_y, p_{zz} n_z). \quad (2.2)$$

Сравнивая выражения (2.1) и (2.2), найдем

$$p_{xx} = p_{nn}, \quad p_{yy} = p_{nn}, \quad p_{zz} = p_{nn}. \quad (2.3)$$

Это означает, что значение нормального напряжения в фиксированной точке покоящейся жидкости не зависит от ориентации площадки.

При рассмотрении напряженного состояния сплошной среды принято растягивающие напряжения считать положительными. В то же время в большинстве задач технической механики жидкости во избежание разрывов сплошности (см., например, п. 1.6) растягивающие напряжения в жидкой среде считаются недопустимыми — это еще в большей степени относится к газообразной среде. Поэтому в гидростатике в качестве основной величины, характеризующей напряженное состояние жидкости, вводят взятое со знаком плюс нормальное напряжение (которое по всем площадкам в данной точке имеет одинаковое значение). Эта величина, являющаяся частным случаем гидродинамического давления (1.21), называется *гидростатическим давлением* и также обозначается через p :

$$p = -p_{nn} = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}. \quad (2.4)$$

Вышеизложенное объясняет появление знака минус в зависимости (1.21), определяющей величину гидродинамического давления.

Матрица тензора напряжений в условиях гидростатики имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Если обозначить через E тензорную единицу

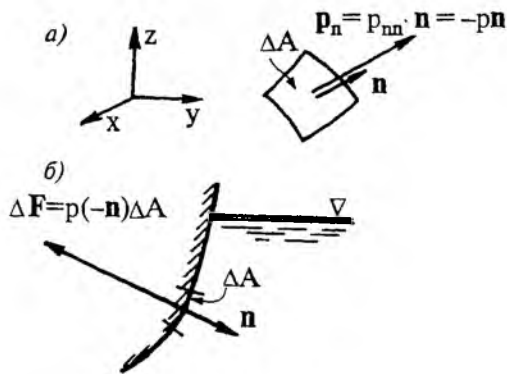


Рис. 2.1. Гидростатическое давление: а — в точке сплошной среды; б — на поверхности произвольной формы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

то тензор напряжения в покоящейся жидкости можно представить в виде

$$\Pi = -pE. \quad (2.7)$$

Как видно, напряженное состояние в покоящейся жидкости определяется величиной p , поэтому его характеризуют не тензором Π , а считают, что оно полностью описывается величиной гидростатического давления, которое можно рассматривать как скаляр.

Сила гидростатического давления ΔF (рис. 2.1, б), действующая на малую площадку ΔA , — это вектор, направленный со стороны жидкости по нормали к этой площадке [такая нормаль обычно называется внутренней, и ее единичный вектор равен $(-\mathbf{n})$]

$$\Delta F = -\mathbf{n} \cdot p \cdot \Delta A. \quad (2.8)$$

Если давление на площадке конечных размеров A (рис. 2.1, б) зависит от координат, то сила давления на эту площадку определяется следующим образом:

$$\mathbf{F} = \int_A (-\mathbf{n}) p dA. \quad (2.9)$$

2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)

Пусть $p = p(x, y, z)$ — давление в жидкости; выделим внутри жидкости куб с бесконечно малыми ребрами dx, dy, dz и рассмотрим его равновесие под действием объемных и поверхностных сил (рис. 2.2).

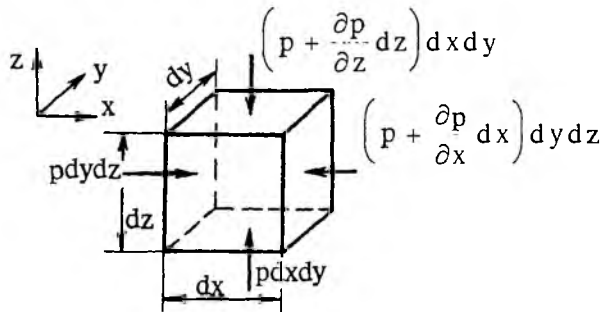


Рис. 2.2. К выводу дифференциальных уравнений гидростатики

Приравняем нулю сумму проекций на ось x всех сил, действующих на куб.

Плотность распределения массовой (объемной) силы обозначим $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$, тогда объемная сила, действующая на куб, имеет проекцию на ось x , равную $f_x \rho dx dy dz$.

Поверхностные силы на грани, нормальные осям y и z , дают нулевую проекцию на ось x , так как касательные напряжения в условиях гидростатики равны нулю. В пределах куба (ввиду того, что он мал) считаем, что в разложении $p(x, y, z)$ в ряд Тейлора можно принять в расчет лишь члены, линейно зависящие от приращения координат. Обозначим давление на левую грань куба, перпендикулярную оси x , через $p(x, y, z)$, при этом на правой грани давление будет

равно $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$. Если считать эти грани элементарными площадками в отношении давления, то проекция на ось x силы давления на левую грань будет равна $p dy dz$, а на правую $\left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz \right]$. Сумма проекций всех поверхностных сил на ось x при этом окажется равной

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Приравняв нулю сумму проекций поверхностных и объемных сил на ось x , имеем

$$f_x \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0. \quad (2.10)$$

Разделив все слагаемые на $\rho dx dy dz$, получаем первое уравнение равновесия. Два других уравнения выведем аналогичным образом, проектируя силы на оси y и z . В результате получим систему дифференциальных уравнений покоя жидкости (уравнений гидростатики Эйлера)

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Введем единичные векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} , соответствующие координатным осям x , y и z :

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1). \quad (2.12)$$

Умножим уравнения системы (2.11) на \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} соответственно и сложим их. Получим

$$f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) = 0$$

или в векторной форме

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0. \quad (2.13)$$

Векторное уравнение (2.13) равносильно системе трех уравнений (2.12), где вектор $\text{grad } p$ определяется через свои проекции на координатные оси в виде

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.14)$$

либо в матричной форме

$$\text{grad } p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (2.15)$$

2.3. Интегрирование уравнений Эйлера

Пусть вектор f имеет потенциал, т.е. существует такая функция $U(x, y, z)$, что

$$f = \text{grad } U \text{ или } f_x = \frac{\partial U}{\partial x}, f_y = \frac{\partial U}{\partial y}, f_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.16)$$

При этом уравнение (2.13) в случае однородной несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) примет вид

$$\text{grad}[U - p/\rho] = 0. \quad (2.17)$$

Интеграл уравнения (2.17) дает равенство

$$U - p/\rho = \text{const}, \quad (2.18)$$

которое представляет собой общую форму интеграла уравнений гидростатики в случае, когда объемные силы имеют потенциал.

Рассмотрим частные случаи объемных сил.

Внешняя объемная сила — сила тяжести. Пусть в декартовой системе координат ось z направлена вверх. Используя (2.16), легко установить, что потенциал силы тяжести

$$U_g = -gz, \quad (2.19)$$

где g — ускорение свободного падения, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, при этом

$$f_x = 0, f_y = 0, f_z = -g.$$

Подставим (2.19) в (2.18):

$$-gz - \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Обозначив через γ удельный вес ($\gamma = \rho g$), получим

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} \text{ или } z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}. \quad (2.20)$$

Это закон распределения гидростатического давления. Обозначим через p_0 давление на свободной поверхности, или *поверхностное давление*, и найдем форму свободной поверхности из условия, что на ней $p = p_0 = \text{const}$. Из (2.20) следует, что такая поверхность, координаты которой обозначим через z_0 , представляет собой горизонтальную плоскость

$$z_0 = \text{const} - p_0/\gamma. \quad (2.21)$$

Если h — это расстояние до свободной поверхности (заглубление точки), а начало координат расположено на свободной поверхности, так что $h = -z$ (рис. 2.3), то давление в точке C равно

$$p_C = p_0 + \gamma h_C = p_0 + (p_B)_C, \quad (2.22)$$

где $p_B = \gamma h$ — *весовое давление*, т.е. давление, обусловленное весом жидкости.

Обычно в инженерно-строительной практике используют не *абсолютное* давление p_A (выше оно обозначалось p), а его отклонение от *атмосферного* давления p_a . Если $p_A > p_a$,

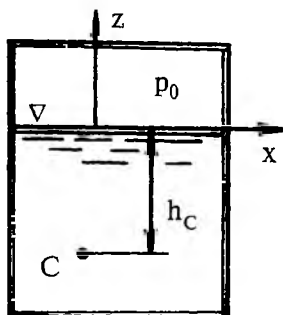


Рис. 2.3. Гидростатическое давление в поле силы тяжести

то *избыточным* давлением p_{II} называется превышение давления в точке над атмосферным

$$p_{II} = p_A - p_a \quad (2.23)$$

При условии $p_A < p_a$ недостаток давления в точке до атмосферного называется *вакуумом*

$$p_{\text{вак}} = p_a - p_A \quad (2.24)$$

Относительный покой жидкости во вращающемся сосуде. Если привести во вращение сосуд вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью Ω , то через некоторое время жидкость будет вращаться вместе с сосудом как одно твердое тело, т.е. жидкость будет находиться в покое относительно сосуда. Чтобы воспользоваться уравнением гидростатики (2.18), надо, чтобы жидкость была неподвижной относительно системы координат, т.е. следует принять вращающуюся со скоростью Ω систему координат. Но такая система не является инерционной, при переходе к ней необходимо ввести соответствующие силы инерции как внешние объемные силы. На элементарную частицу жидкости (рис. 2.4) с массой δm действует центробежная сила

$$\delta F_{\text{цб}} = \delta m \Omega^2 r, \quad (2.25)$$

где \mathbf{r} — вектор-радиус, определяющий положение элементарной частицы относительно оси вращения; $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ или $\mathbf{r} = (x, y)$; x, y — координаты частицы. Очевидно, что $\delta F_{\text{цб}}$ и \mathbf{r} имеют одинаковое направление. Найдем проекции $\delta F_{\text{цб}}$ на координатные оси:

$$\left(\delta F_{\text{цб}}\right)_x = \delta m \Omega^2 x, \quad \left(\delta F_{\text{цб}}\right)_y = \delta m \Omega^2 y. \quad (2.26)$$

Плотность распределения массовой центробежной силы (т.е. сила на единицу массы) имеет вид

$$\mathbf{f}_{\text{цб}} = \frac{\delta F_{\text{цб}}}{\delta m} = \Omega^2 \mathbf{r}, \quad \left(f_{\text{цб}}\right)_x = \Omega^2 x, \quad \left(f_{\text{цб}}\right)_y = \Omega^2 y. \quad (2.27)$$

Центробежные силы с плотностью распределения $\mathbf{f}_{\text{цб}}$ нужно ввести в качестве дополнительной внешней силы при решении уравнения (2.18). Но, как было показано, интегрирование уравнения (2.13) осуществляется, если объемные силы имеют потенциал. Непосредственным интегрированием выражений для $\left(f_{\text{цб}}\right)_x$ и $\left(f_{\text{цб}}\right)_y$ легко найти функцию, являющуюся потенциалом $U_{\text{цб}}$:

$$U_{\text{цб}} = \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (2.28)$$

Кроме центробежных сил на жидкость действует и сила тяжести, потенциал которой, как и ранее, $U_g = -gz$.

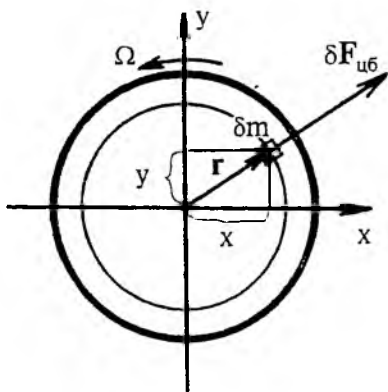


Рис. 2.4. Относительный покой жидкости во вращающемся сосуде; центробежная сила, действующая на элементарный объем вращающейся жидкости

Потенциал суммарной объемной силы, действующей на жидкость во вращающейся системе координат, имеет вид

$$U = U_g + U_{цб} = -gz + \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (2.29)$$

Подставляя (2.29) в (2.18), получаем уравнение для определения давления в любой точке вращающегося объема жидкости

$$-gz + \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (2.30)$$

Обозначим, как и в предыдущем случае, координаты свободной поверхности через z_0 . Уравнение свободной поверхности найдем, подставив $p = p_0$ в (2.30). Получим уравнение параболоида вращения

$$-gz_0 + \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} = \text{const} + \frac{p_0}{\rho}$$

Если поместить начало координат в вершине этого параболоида (рис. 2.5), получим уравнение свободной поверхности в виде

$$z_0 = \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2g} \quad (2.31)$$

Как видно, очертание параболоида не зависит от плотности жидкости. Распределение давления внутри объема жидкости при этом имеет вид

$$p = p_0 - \gamma z + \rho \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (2.32)$$

Согласно (2.32) на каждой вертикали давление распределяется по гидростатическому закону (2.20)

2.4. Сила гидростатического давления на произвольную плоскую фигуру

Сила гидростатического давления на произвольную плоскую фигуру площадью A (рис. 2.6) характеризуется значением, направлением и точкой приложения. Значение силы определим согласно (2.9)

$$\begin{aligned} |F| &= \int_A p dA = \int_A (p_0 + p_b) dA = \int_A p_0 dA + \int_A \gamma h dA = \\ &= p_0 \int_A dA + \int_A \gamma y \sin \alpha dA = p_0 A + \gamma \sin \alpha \int_A y dA = \\ &= p_0 A + \gamma \sin \alpha y_C A = (p_0 + \gamma h_C) A = p_C A, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где y_C — координата центра тяжести фигуры $\left(y_C = \frac{\int y dA}{A} \right)$, h_C — глубина центра тяжести, p_C — давление в центре тяжести

Сила F направлена по нормали к площадке, так как на ней в условиях статики отсутствуют касательные напряжения. Точку приложения определим для силы весового давления F_B ; сила, обусловленная поверхностным давлением, приложена в центре тяжести фигуры S , так как оно равномерно распределено по поверхности площадки.

Точка приложения D силы весового (а в случае $p_0 = p_a$ силы избыточного) гидростатического давления называется *центром давления*. Эту точку найдем, используя теорему о моменте равнодействующей. С одной стороны, момент относительно оси Ox (см. рис. 2.6) силы F_B равен

$$M_0(F_B) = (F_B) y_D, \quad (2.34)$$

с другой стороны, этот же момент можно представить в виде

$$\begin{aligned} M_0(F_B) &= \int_A y \cdot d|F_B| = \int_A y \cdot p_a dA = \int_A y \gamma h \cdot dA = \\ &= \gamma \int_A y^2 \sin \alpha \cdot dA = \gamma \sin \alpha \int_A y^2 dA = \\ &= \gamma \sin \alpha \left[y_C^2 A + \int_A (y - y_C)^2 dA \right] = \gamma \sin \alpha [y_C^2 A + I]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь I — момент инерции фигуры относительно горизонтальной оси, проходящей через ее центр тяжести S .

Сравнивая два выражения для M_0 — (2.34) и (2.35), найдем

$$y_D = \frac{\gamma \sin \alpha [y_C^2 A + I]}{|F_B|} = \frac{\gamma \sin \alpha [y_C^2 A + I]}{\gamma \sin \alpha A y_C} = y_C + \frac{I}{y_C A}. \quad (2.36)$$

Из этой формулы следует

$$y_D = y_C + e, \quad (2.37)$$

$e = I/y_C A \geq 0$ называют *эксцентриситетом*. Очевидно, что $y_D \geq y_C$.

Рассмотрим важный частный случай силы гидростатического давления на плоскую прямоугольную поверхность. Найдем силу избыточного давления, действующую на плоский щит в прямоугольном лотке шириной b (рис. 2.7). Согласно (2.22) давление p линейно увеличивается с глубиной. В случае вертикального щита (см. рис. 2.7,а) отложим на нормали к поверхности щита в точке B отрезок BE , равный заглублению этой точки h_B , и, соединив точки A и E , получим эпюру избыточного гидростатического давления, выраженного

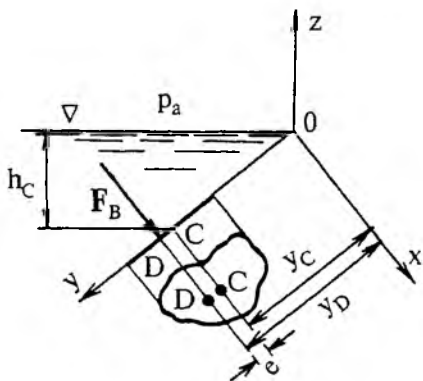


Рис. 2.6. Сила весового давления на плоскую фигуру произвольной формы (плоскость (x,y) , в которой находится фигура, условно повернута на 90° так, чтобы горизонтальная ось x и сама фигура оказались в плоскости чертежа)

в единицах длины (метрах) столба жидкости. Согласно (2.9) сила давления равна

$$F = \int_A (-n)pdA = -n \int_{h_B}^0 (-\rho gz)bdz = -n\rho g \frac{h_B^2}{2} b ,$$

где $dA = bdz$ — элементарная площадка (рис. 2.7,в). Другими словами, значение силы F равно площади построенного треугольника ABE (в m^2), умноженной на ρgb , или весу призмы с основанием ABE и высотой b , заполненной жидкостью. Сила направлена со стороны жидкости на щит

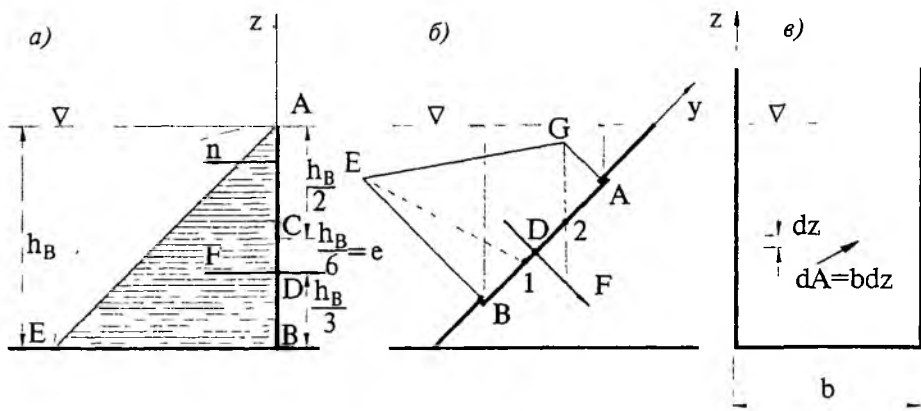


Рис. 2.7. Определение силы гидростатического давления на плоские прямоугольные фигуры: *a* — вертикальный щит, перегораживающий прямоугольный канал; *б* — наклонный щит; *в* — поперечное сечение канала

по нормали n к его поверхности и проходит через центр тяжести треугольника ABE , так как согласно (2.37) центр давления D расположен ниже центра тяжести прямоугольного щита C на величину эксцентриситета

$$e = \frac{I}{y_C A} = \frac{\frac{bh_B^3}{12}}{\frac{h_B}{2} \cdot b \cdot h_B} = \frac{h_B}{6} .$$

В случае наклонного щита (рис. 2.7,б) для построения *эпюры гидростатического давления* отложим по нормальям к поверхности AB , восстановленным в точках A и B , заглубления этих точек и соединим прямой линией полученные точки E и G . Направим вспомогательную ось y вдоль AB и примем в качестве элементарной площадку $dA = bdy$. Силу избыточного гидростатического давления найдем по формуле (2.9):

$$F = \int_A (-n)pdA = -n \int_{y_B}^{y_A} (-\rho gz)b dy = n\rho gb \int_{y_B}^{y_A} z dy .$$

Заглубление z в полученном интеграле отложено на рис. 2.7,б по нормали к поверхности AB ; следовательно, интеграл численно равен

площади эпюры АВЕГ. Таким образом, значение силы F равно весу призмы с основанием АВЕГ и высотой b ; эта сила направлена по нормали к поверхности щита и проходит через центр тяжести фигуры АВЕГ. Для определения линии действия силы рекомендуется следующий прием. Отрезок АВ делится на три равные части точками 1 и 2, из точек Е и G через точки 1 и 2 проводятся лучи, точка пересечения лучей определяет линию действия силы, нормальной к АВ.

Полученные выше результаты, согласно которым сила гидростатического давления на выделенную поверхность не зависит от формы резервуара или сосуда, частью поверхности которого является выделенная поверхность, объясняют так называемый *гидростатический парадокс*. Он иллюстрируется на примере силы, действующей на дно сосуда (рис. 2.8). Три раз-

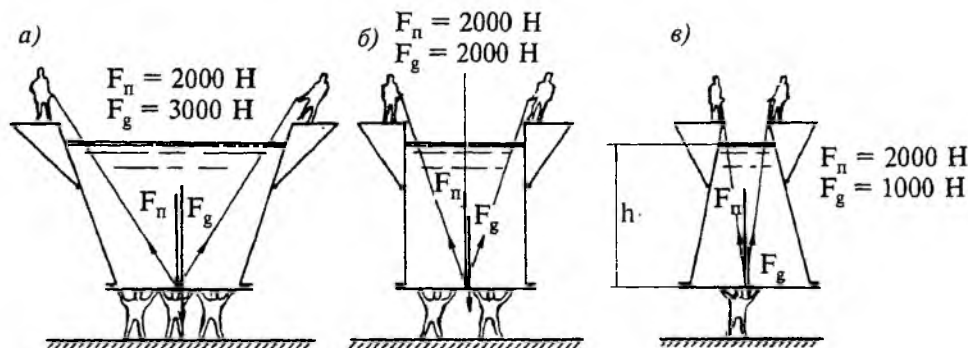


Рис. 2.8. Иллюстрация гидростатического парадокса: сила, действующая на дно сосудов, не зависит от веса воды в сосудах

личных по форме сосуда имеют одинаковую площадь A_n плиты, закрывающей дно. Сила избыточного гидростатического давления, отрывающая плиту от сосуда, во всех трех сосудах одинакова, и ее значение равно

$$F_n = \rho g h A_n,$$

в то же время вес F_g воды, содержащейся в сосудах, различается в несколько раз.

2.5. Сила избыточного гидростатического давления на цилиндрические поверхности

Для того чтобы найти силу, действующую на цилиндрическую поверхность АВ (рис. 2.9), образующая которой имеет длину b , рассмотрим равновесие отсека жидкости ABCD, где CD — вертикальная плоскость. Обозначим через $\mathbf{R} = (R_x, R_z)$ реакцию цилиндрической поверхности на силу давления воды; $\mathbf{F} = (F_x, 0)$ — реакция плоскости CD.

В проекции на ось x имеем

$$F_x - R_x = 0 \text{ или } R_x = F_x. \quad (2.38)$$

Используя (2.22) и (2.33), легко найти, что значение и точка приложения \mathbf{F} определяются треугольной эпюрой давления на поверхность CD. В проекции на ось z

$$R_x + R_z - G = 0, \quad (2.39)$$

где реакция дна $R_d = \gamma h_d \cdot BC \cdot b = \gamma A_{B'BCD} b$, а вес рассматриваемого отсека $G = \gamma A_{ABCD} b$.

Из (2.39) получим

$$R_z = G - R_d = (A_{ABCD} - A_{B'BCD}) \gamma b = \gamma A_{ABB'} b. \quad (2.40)$$

Так как R_x и R_z — это проекции реакции цилиндрической поверхности, то проекции силы давления воды на эту поверхность имеют противоположное направление.

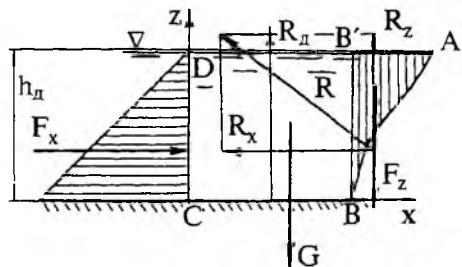


Рис. 2.9. Определение силы гидростатического давления на цилиндрическую поверхность

Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать алгоритм графического определения силы избыточного гидростатического давления (рис. 2.10).

1. Выделить цилиндрическую поверхность, сила давления на которую подлежит определению, и обозначить концы ее направляющей через А и В.
2. Через точку свободной поверхности или ее продолжения провести вертикаль и линию EF под углом 45° к вертикали.

3. Из точек А и В провести два горизонтальных луча так, чтобы они из построенных в п. 2 клиньев вырезали замкнутую фигуру (или две фигуры). На рис. 2.10 это трапеция 1234. Горизонтальная составляющая силы избыточного гидростатического давления F

$$F_x = \gamma b A_{1234}. \quad (2.41)$$

Эта составляющая силы F приложена в центре тяжести фигуры 1234 и направлена со стороны жидкости на цилиндрическую поверхность, если фигура 1234 расположена ниже свободной поверхности жидкости (на рис. 2.10 слева направо).

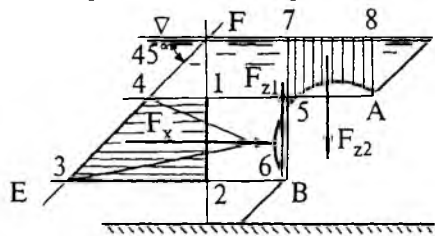


Рис. 2.10. Графические построения для определения силы давления на цилиндрическую поверхность

определяет вертикальную составляющую F. Значения этих составляющих равны:

$$F_{z1} = \gamma b A_{56B}, \quad F_{z2} = \gamma b A_{5A87}. \quad (2.42)$$

Вертикальная составляющая направлена вверх, если определяющая ее фигура и жидкость расположены по разные стороны от цилиндрической поверхности (на рис. 2.10 — F_{z1}), или направлена вниз, если фигура и жидкость расположены по одну сторону (на рис. 2.10 — F_{z2}).

Эти составляющие приложены в центрах тяжести соответствующих фигур. Вектор F находится геометрическим сложением составляющих (F_x, F_{z1}, F_{z2} на рис. 2.10).

2.6. Способы измерения гидростатического давления

Наиболее простой и надежный способ измерения давления в поле силы тяжести основан на использовании гидростатического закона распределения давления (2.20). Отметим два наиболее важных в данном случае следствия этого закона:

распределение давления в жидкости (или газе) не зависит от формы сосуда, в котором она покоится;

на любой горизонтальной плоскости, пересекающей рассматриваемый (покоящийся) объем однородной жидкости или газа, давление постоянно.

Приборы для измерения давления называют *пьезометрами* (пьеzo — давление) или манометрами.

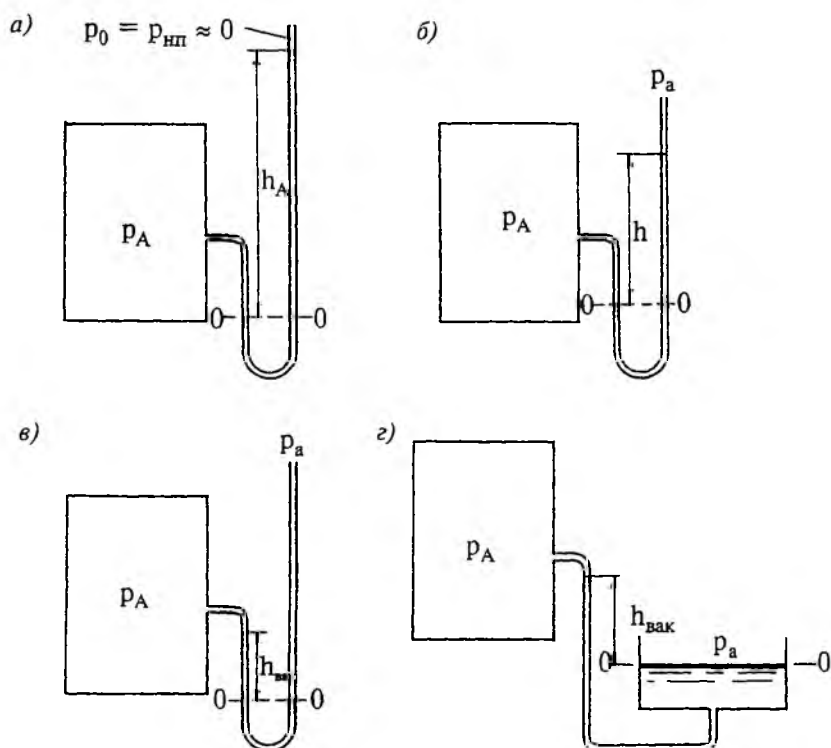


Рис. 2.11. U-образные пьезометры для измерения: абсолютного (а) и избыточного (б) давления; вакуума (в); U-образный пьезометр с одной измерительной трубкой (з)

Самым распространенным прибором для измерения небольших (имеющих порядок атмосферного) давлений является U-образный пьезометр. Пусть необходимо измерить давление в газе, содержащемся в замкнутом объеме (рис.2.11). Присоединим к сосуду один конец U-образной

трубки, заполненной частично жидкостью с плотностью ρ (рис. 2.11,а). Второй свободный конец трубки запаян, и на свободной поверхности жидкости создано поверхностное давление $p_0 \approx 0$. Приравняв давление в коленах трубки в точках, лежащих на горизонтальной плоскости 0—0, получим значение абсолютного давления в сосуде P_A :

$$P_A = p_0 + \rho gh_A = \rho gh_A. \quad (2.43)$$

При этом следует иметь в виду две вносимые этим методом измерений погрешности:

погрешность, связанную с пренебрежением изменением весового давления в газе, заполняющем сосуд и часть измерительной трубки. Это, как правило, допустимо, так как плотность газов на три порядка меньше плотности жидкостей;

погрешность, обусловленную наличием насыщающих паров жидкости над свободной поверхностью рабочей жидкости в свободном колене с запаянным концом; давление насыщающих паров $p_{\text{нп}} = p_{\text{нп}}(T)$ может быть учтено при вычислении p_A , но во многих случаях им можно пренебречь, так как оно на два порядка меньше атмосферного давления.

Чаще всего на практике требуется измерить отклонение абсолютного давления от атмосферного, т.е. избыточное давление $p_{\text{и}}$ или вакуум $p_{\text{вак}}$. В дальнейшем изложении для избыточного давления вместо $p_{\text{и}}$ будем использовать обозначение p . Для измерения отклонения абсолютного давления p_A от атмосферного p_a используют U-образную трубку со свободным концом, открытым для атмосферного давления (рис. 2.11,б). Приравняв давления в точках на плоскости 0—0, найдем избыточное давление p (рис. 2.11,б):

$$P_A = P_a + \rho gh; \quad P_A - p_a = p = \rho gh; \quad (2.44)$$

или вакуум $p_{\text{вак}}$ (рис. 2.11,в):

$$P_a = P_A + \rho gh_{\text{вак}}; \quad P_a - P_A = \rho gh_{\text{вак}}. \quad (2.45)$$

В некоторых случаях, когда диапазон изменения измеряемого давления невелик по сравнению с атмосферным, используют U-образную трубку, свободное колено которой имеет площадь поперечного сечения во много раз (на два-три порядка) больше, чем колено, присоединяемое к точке, в которой измеряется давление (рис. 2.11,г). При такой конструкции U-образной трубки изменение уровня свободной поверхности левого колена под действием изменения давления p_A в резервуаре практически не изменяет уровня жидкости в правом (широком) колене. Это позволяет следить за давлением в резервуаре, контролируя уровень жидкости в одном (левом) колене (а не в обоих, как в случае с обычным U-образным пьезометром).

Подобная конструкция используется в приборах для измерения атмосферного давления, которые называются *барометрами* (рис. 2.12). Они состоят из широкой чашки, в которой на свободную поверхность рабочей жидкости действует атмосферное давление, и присоединенной к ней вертикальной трубки с запаянным свободным концом; эта трубка заполнена жидкостью, и на свободной поверхности в ней создают давление $p_0 = p_{\text{нп}} \approx 0$. Приравняв давление в точках на плоскости 0—0, имеем

$$p_a = p_0 + \rho g h_a \approx \rho g h_a. \quad (2.46)$$

Согласно (2.46), измеряя h_a , легко вычислить атмосферное давление p_a .

При конструировании пьезометров и барометров важен рациональный выбор рабочей жидкости. Так, нормальное атмосферное давление

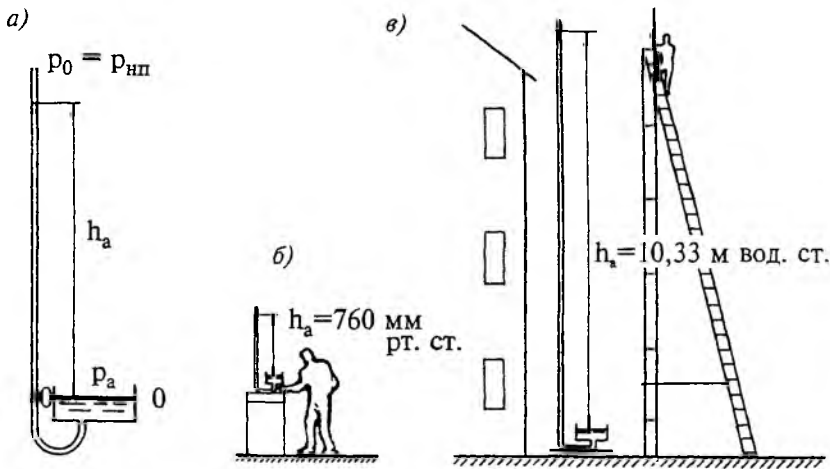


Рис. 2.12. Барометры: а — принципиальная схема; б — ртутный; в — водяной

на уровне моря равно $p_a = 1,012 \cdot 10^5$ Па. Если выбрать в качестве рабочей жидкости воду ($\rho = 0,001 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$), то

$$h_a = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{1,012 \cdot 10^5}{0,001 \cdot 9,8} = 10,33 \text{ м}$$

и, следовательно, высота водяного барометра будет более 10 м (рис. 2.12, в). Чтобы уменьшить габарит барометра, в качестве рабочей жидкости используют ртуть ($\rho = 0,0136 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$). При этом

$$h_a = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{1,012 \cdot 10^5}{0,0136 \cdot 9,8} = 0,760 \text{ м.}$$

Высота ртутного барометра не превышает 1 м (рис. 2.12, б).

Отметим, что зависимости (2.44) и (2.45) позволяют выражать значение давления не только в паскалях, но и в единицах высоты столба рабочей жидкости. В частности, атмосферное давление измеряют, как правило, в миллиметрах ртутного столба.

Для измерения абсолютного и избыточного давлений используют разнообразные механические приборы, называемые *манометрами*.

В зависимости от чувствительного элемента различают поршневые, деформационные, пружинные манометры и манометры, использующие пьезоэлектрические и пьезомагнитные эффекты. Манометры тарируются (калибруются) в основном с помощью U-образных пьезометров.

2.7. Распределение давления в атмосфере Земли

Атмосферу Земли обычно разделяют:

на тропосферу — слой толщиной 11 000 м, примыкающий непосредственно к земной поверхности;

стратосферу — слой толщиной 25 000 м, расположенный над тропосферой (рис. 2.13).

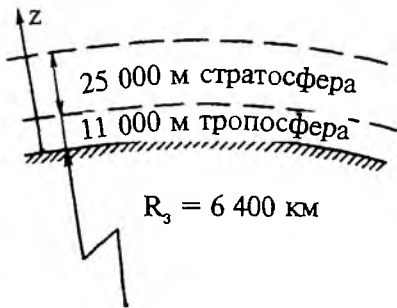


Рис. 2.13. Схематизация атмосферы Земли

Рассчитаем распределение давления в атмосфере, полагая, что движение атмосферного воздуха (ветер) оказывает пренебрежимо малое влияние на распределение давления, которое в основном определяется физическими свойствами воздуха (его плотностью, температурой) и силой земного притяжения. Кроме того, воздух считаем совершенным газом.

В тропосфере температура воздуха уменьшается; в зависимости от расстояния z от уровня моря эта зависимость может быть аппроксимирована в виде

$$T = T_{\text{ум}} - \lambda z; \quad (2.47)$$

где $T_{\text{ум}}$ — температура на уровне моря; $\lambda = 6,5^\circ\text{C}/\text{км}$.

Распределение давления в поле силы тяжести согласно закону гидростатики подчиняется уравнению

$$\frac{dp_a}{dz} = -\rho g. \quad (2.48)$$

Из уравнения состояния (1.25) имеем

$$\rho = \frac{p_a}{RT}, \quad (2.49)$$

где для воздуха $R = 0,287 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.

Подставим (2.47) и (2.49) в (2.48) и запишем

$$\frac{dp_a}{p_a} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T_{\text{ум}} - \lambda z}. \quad (2.50)$$

Интегрируя (2.50), получаем

$$\ln p_a \Big|_{p_{\text{ум}}}^{p_a(z)} = \frac{g}{R\lambda} \ln(T_{\text{ум}} - \lambda z) \Big|_0^z.$$

Отсюда

$$p_a(z) = p_{\text{ум}} \left(1 - \frac{\lambda z}{T_{\text{ум}}} \right)^{\frac{g}{R\lambda}}.$$

Приняв $T_{\text{ум}} = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ К}$, $p_{\text{ум}} \cong 100 \text{ кПа}$, имеем

$$p_a(z) = p_{\text{ум}} \left(1 - \frac{0,0065z}{288} \right)^{\frac{9,81}{287 \cdot 0,0065}}$$

или

$$p_a(z) = 100(1 - 0,226 \cdot 10^{-4}z)^{5,260}. \quad (2.51)$$

Вычислим температуру и давление на высоте $z = 11\,000$ м, используя (2.47) и (2.51):

$$T(11000) = -56,5^\circ\text{C} \cong 217 \text{ К};$$

$$p_a(11000) = 22,5 \text{ кПа}.$$

В стратосфере температуру можно считать постоянной и равной температуре на границе с тропосферой: $T = -56,5^\circ\text{C} = \text{const}$. При этом уравнение для давления имеет вид

$$\frac{dp_a}{p_a} = -\frac{g}{RT} dz. \quad (2.52)$$

Интегрируя, получаем

$$\ln p_a \Big|_{p_a(11000)}^{p_a(z)} = -\frac{g}{RT(11000)} z \Big|_{11000}^z;$$

$$\ln \frac{p_a}{22,5} = -\frac{9,81 \cdot (z - 11000)}{287 \cdot 217 \text{ К}}.$$

Окончательно для стратосферы имеем

$$p_a = 22,5 e^{-0,0001575(z-11000)}. \quad (2.53)$$

Зависимости (2.51) и (2.53) представлены на рис. 2.14.

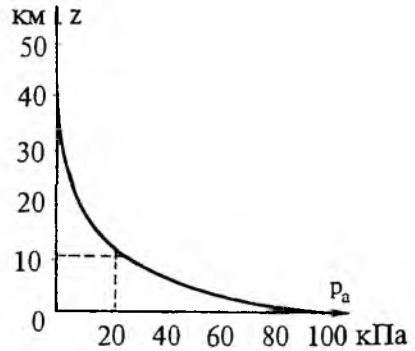


Рис. 2.14. Распределение атмосферного давления по вертикали

2.8. Нормальные напряжения в стенках круглоцилиндрической трубы (котельная формула)

Рассмотрим круглоцилиндрическую трубу длиной L , диаметром D и с толщиной стенок δ , внутри которой жидкость (или газ) находится под избыточным давлением p (рис. 2.15). Очевидно, под действием этого

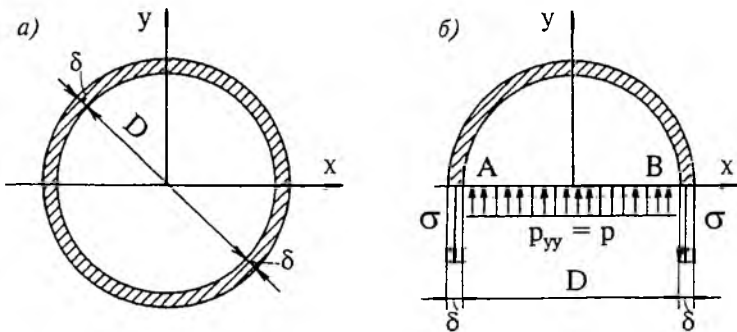


Рис. 2.15. Напряжения в стенках круглоцилиндрической трубы: а — поперечное сечение трубы; б — расчетная схема

давления стенки трубопровода оказываются растянутыми, и для выполнения, в частности, расчетов на прочность необходимо знать нормальные напряжения в стенках. Разрежем мысленно трубопровод плоско-

стью, проходящей через его ось, и приравняем нулю силы, действующие на половину трубопровода и заполняющую ее жидкость.

В проекции на ось y имеем:

нормальные сжимающие напряжения p_{yy} на поверхность жидкости АВ со стороны отброшенной части равны $p(p_{yy} = -p)$, они действуют на площадь $A_{ж} = DL$ и определяют силу давления в направлении оси y в виде

$$(F_{ж})_y = pDL; \quad (2.54)$$

нормальные растягивающие напряжения в стенках трубопровода, которые в соответствии с обозначениями, принятыми в курсе “Сопротивление материалов”, обозначим σ ; эти напряжения на площадке $A_T = 2\delta \cdot D$ определяют силу, действующую в направлении противоположном y :

$$(F_T)_y = -\sigma \cdot 2\delta \cdot L. \quad (2.55)$$

Приравняв нулю сумму этих проекций, после очевидных преобразований получим

$$\sigma = \frac{pD}{2\delta}. \quad (2.56)$$

Это формула, позволяющая связать нормальные напряжения в стенках трубопровода с давлением внутри него, называется *котельной формулой*.

2.9. Закон Архимеда.

Плавание тел

Вычислим силу избыточного гидростатического давления, действующую на неподвижное тело, погруженное в покоящуюся в поле силы тяжести жидкость. Разделим тело вертикальными плоскостями на призмы, ограниченные сверху и снизу элементарными площадками (принадлежа-

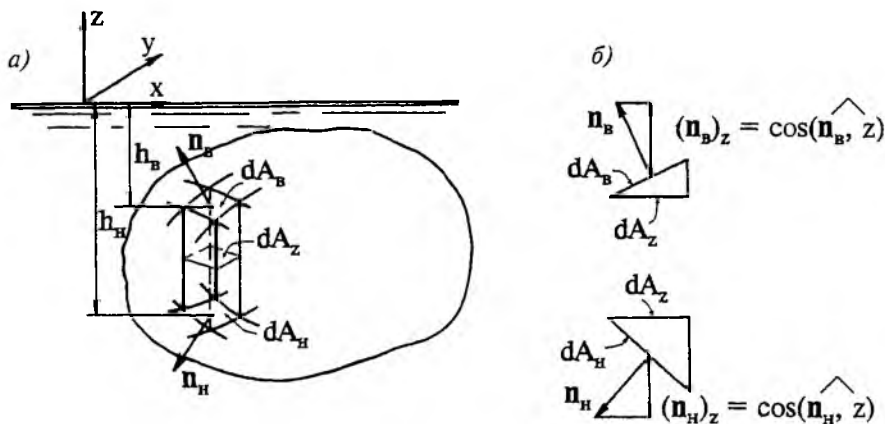


Рис. 2.16. Схема для доказательства закона Архимеда

щими поверхности тела) dA_B и dA_H (рис. 2.16); единичные нормали к этим площадкам обозначим n_B и n_H . Из геометрических соображений (рис. 2.16, б) найдем

$$\begin{aligned} dA_B \cdot \cos(\hat{\mathbf{n}}_B, z) &= dA_B (n_B)_z = dA_z; \\ dA_H \left[-\cos(\hat{\mathbf{n}}_H, z) \right] &= -dA_H (n_H)_z = dA_z. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Здесь dA_z — площадь сечения призмы горизонтальной плоскостью. Знак минус во втором выражении (2.57) связан с тем, что вектор \mathbf{n}_H направлен вниз, так что $(n_H)_z < 0$.

Рассмотрим сумму поверхностных сил, действующих на выделенную элементарную призму. В соответствии с (2.8) сила гидростатического давления на площадки dA_B и dA_H равна:

$$d\mathbf{F}_B = -\mathbf{n}_B p_B dA_B, \quad d\mathbf{F}_H = -\mathbf{n}_H p_H dA_H, \quad (2.58)$$

где избыточное гидростатическое давление

$$p_B = \rho g h_B = -\rho g z_B, \quad p_H = \rho g h_H = -\rho g z_H. \quad (2.59)$$

На вертикальные грани призмы действуют силы со стороны соседних призм, сумму которых обозначим $d\mathbf{F}_{\text{вр}}$.

Проекция на ось z всех поверхностных сил, действующих на призму, равна

$$(d\mathbf{F}_a)_z = (d\mathbf{F}_B)_z + (d\mathbf{F}_H)_z + (d\mathbf{F}_{\text{вр}})_z. \quad (2.60)$$

Подставив в это равенство (2.58), (2.59), (2.60) и (2.57), найдем

$$(d\mathbf{F}_a)_z = \rho g z_B dA_z - \rho g z_H dA_z + (d\mathbf{F}_{\text{вр}})_z. \quad (2.61)$$

Запишем аналогичные уравнения для всех элементарных призм, на которые было разделено рассматриваемое тело, и сложим все эти уравнения; при этом силы взаимодействия соседних призм по вертикальным граням компенсируют друг друга, и слагаемые $(d\mathbf{F}_{\text{вр}})_z$ взаимно уничтожаются. Сумма первых двух слагаемых представляет собой вес жидкости в объеме призмы

$$\rho g (z_B - z_H) dA_z = \rho g d\mathcal{V}, \quad (2.62)$$

где $d\mathcal{V} = (z_B - z_H) dA_z$ — объем призмы.

Таким образом, подставляя (2.62) в (2.61), в результате суммирования всех элементарных сил $(d\mathbf{F}_a)_z$ получим

$$(\mathbf{F}_a)_z = \rho g \mathcal{V}, \quad (2.63)$$

где $\mathcal{V} = \int d\mathcal{V}$ — объем тела.

Выражение (2.63) представляет собой знаменитый *закон Архимеда*: на неподвижное тело, погруженное в покоящуюся в поле силы тяжести жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости в объеме данного тела. Иногда эту силу называют архимедовой.

Проделав аналогичные вычисления (т.е. разбив тело на элементарные призмы плоскостями, параллельными координатным осям x и y), можно доказать практически очевидный факт — равенство нулю суммы горизонтальных составляющих силы избыточного гидростатического давления, действующих на погруженное тело.

Точку приложения архимедовой (выталкивающей) силы W называют центром водоизмещения. Можно доказать (доказательство не приводим, хотя оно сравнительно простое и требует лишь использования теоремы о моменте равнодействующей), что центр водоизмещения тела совпадает с центром тяжести тела, если тело однородное.

Если вес тела больше, чем выталкивающая сила, то тело тонет. Если вес тела равен выталкивающей силе, то тело плавает внутри жидкости; если вес тела меньше выталкивающей силы, то оно всплывает и, достигнув свободной поверхности, выходит из воды настолько, чтобы выталкивающая сила, действующая на погруженную часть, была равна весу тела.

При рассмотрении плавания тел представляет интерес вопрос об устойчивости плавающего тела. Различают *устойчивое* равновесие плавающего тела, при котором сила тяжести приложена ниже центра водоизмещения, и *неустойчивое* равновесие в противном случае (на рис. 2.17 и на всех последующих в этом пункте круглоцилиндрические тела считаются полыми и невесомыми).

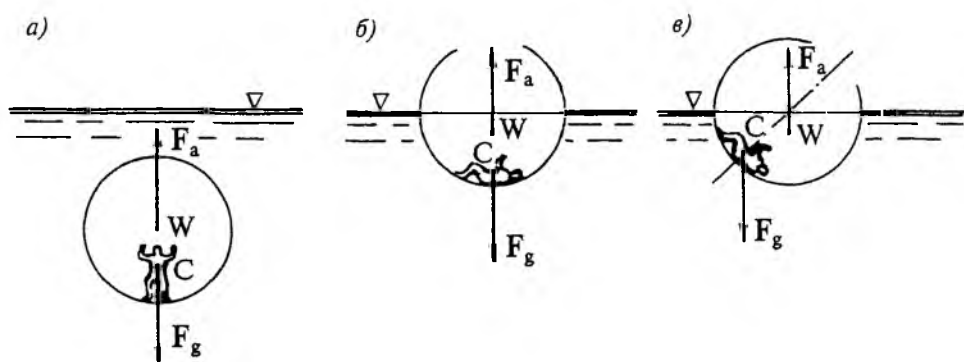


Рис. 2.17. Устойчивое равновесие плавающих тел: *a* — внутри жидкости; *б* — на свободной поверхности; *в* — момент сил возвращает тело к состоянию равновесия

На рис. 2.17, *a* и *б* показаны плавающие тела в условиях устойчивого равновесия. Если по каким-либо причинам равновесие нарушается (рис. 2.17, *в*), то архимедова сила F_a и сила тяжести F_g создают момент, возвращающий плавающее тело в исходное устойчивое состояние.

Когда парусные корабли имели легкие деревянные корпуса и надстройки, то их проектировали и строили так, чтобы они были устойчивы при любом крене (рис. 2.18). Для этого устраивали большой киль, который заполняли балластом. Киль, кроме того, был необходим парусным судам для эффективного использования бокового и встречного ветра, чтобы они могли плыть в направлении, не совпадающем с направлением ветра.

С появлением пароходов и теплоходов необходимость в киле больших размеров отпала, более того, большой киль создавал дополнительное сопротивление движению и требовал больших глубин у причальных сооружений. Вместе с тем использование ме-

талла для корпусов и появление тяжелых надстроек (например, орудийных башен на военных кораблях) поставило вопрос о возможности плавания при центре тяжести, расположенном выше центра водоизмещения. В простейшем случае неустойчивого равновесия пла-

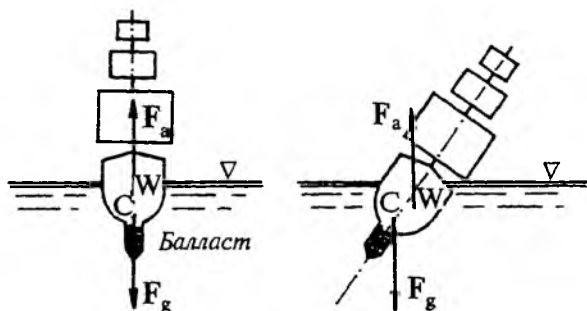


Рис. 2.18. Устойчивость парусного судна

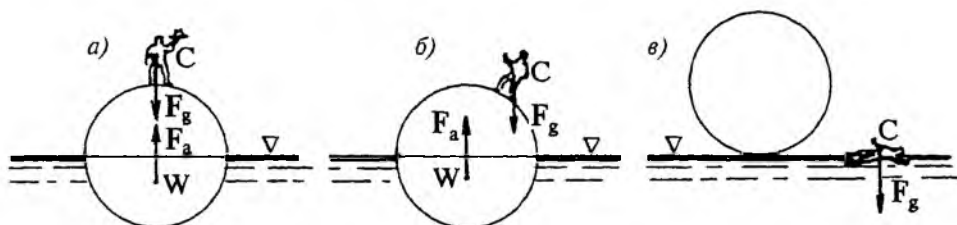


Рис. 2.19. Неустойчивое равновесие тел, плавающих на свободной поверхности:
 а — равновесное состояние; б — момент сил опрокидывает тело;
 в — заключительное состояние

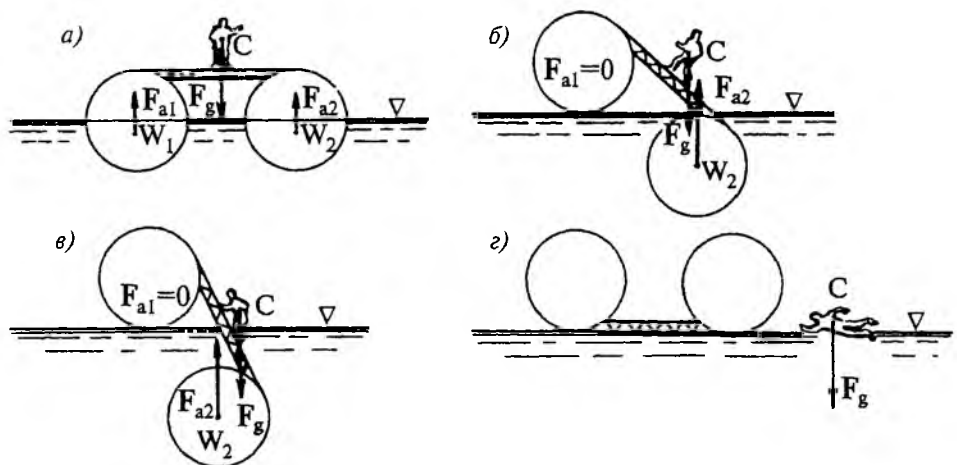


Рис. 2.20. Остойчивость плавающих тел: а — равновесное состояние; б — момент сил при малом крене возвращает тело к состоянию равновесия; в — момент сил при большом крене опрокидывает тело; г — последствия большого крена

вающего тела (рис. 2.19) при любом отклонении от равновесия архимедова сила F_a и вес тела F_g создают момент, который увеличивает это отклонение и приводит к опрокидыванию судна. Однако система из двух плавающих тел, называемая катамараном (рис. 2.20),

которая также, строго говоря, не является устойчивой (центр тяжести выше центра водоизмещения), при небольших кренах не опрокидывается. Как видно на рис. 2.20, б, при небольшом крене возникает момент сил F_a и F_g , который возвращает систему в исходное положение. При очень сильном крене (рис. 2.20, в) возникает момент, опрокидывающий систему; таким образом, ее нельзя назвать устойчивой в полном смысле. Такие тела, которые плавают в условиях неустойчивого равновесия, но при небольшом крене возвращаются в исходное положение, называются *остойчивыми*. Современные корабли, как правило, проектируются исходя не из условий устойчивого равновесия (они при этом были бы очень низкими), а из условия обеспечения остойчивости при крене до $35-45^\circ$ (рис. 2.21).

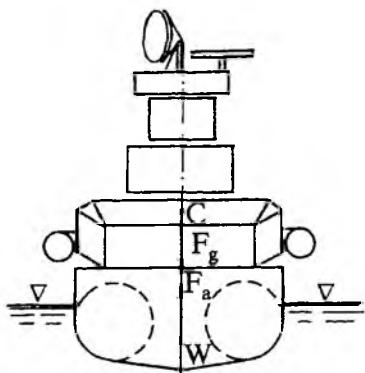


Рис. 2.21. Остойчивость современных кораблей

современных кораблей, как правило, проектируются исходя не из условий устойчивого равновесия (они при этом были бы очень низкими), а из условия обеспечения остойчивости при крене до $35-45^\circ$ (рис. 2.21).

ГЛАВА 3

КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

3.1. Методы описания движения сплошной среды

Когда в теоретической механике рассматривается движение материальной точки, то для полного описания движения необходимо знать уравнение движения точки, т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ — вектор-радиус точки. Чтобы найти скорость точки, надо взять производную от правой части уравнения движения (рис. 3.1, а)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Ускорение материальной точки определяется зависимостью (рис. 3.1, б)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Ускорение материальной точки \mathbf{a} входит во второй закон Ньютона, согласно которому сила \mathbf{F} , приложенная к материальной точке с массой m , придает ей ускорение \mathbf{a} в соответствии с равенством

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (3.3)$$

При изучении движения сплошной среды можно также выделить бесконечно малые объемы, положение которых в пространстве характе-