ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

4.1. Предварительные сведения

Задачи гидродинамики можно подразделить на два основных класса.

1. *Внешние задачи* — задачи об обтекании тела потоками жидкости или газа или о движении тела в жидкой или газообразной средах. К этому классу относятся, например, задачи, связанные:

с полетом самолетов, вертолетов, артиллерийских снарядов в атмосфере;

с движением подводных и надводных судов в реках, морях и океанах;

с определением нагрузки от ветра на здания и сооружения.

2. *Внутренние задачи* — задачи о движении жидкости в каналах. К этому классу относятся, например, задачи, связанные:

с течением жидкостей в трубопроводах (водопроводные сети, газо- и нефтепроводы, кровеносные системы, системы тепло- и газоснабжения и т.п.);

с течением воды в реках (регулирование расхода воды рек, расчет паводков, транспорт наносов и т.п.);

с течением воды в открытых каналах (осушительные и оросительные системы, переброска речного стока, судопропускные сооружения и т.п.).

Встречаются задачи, имеющие характерные особенности обоих классов (например, задача о потоке воды в турбине, которая включает как задачу об обтекании потоком лопаток рабочего колеса, так и задачу о течении жидкости внутри области, ограниченной твердыми стенками).

При решении внешней задачи основной акцент делается на определение силового взаимодействия потока и тела. Определение силы, действующей на тело со стороны набегающего потока, или силы сопротивления движению тела в жидкости является главной целью при решении таких задач. Поэтому при анализе и решении внешней задачи, как правило, используются уравнения, выражающие закон изменения количества движения: дифференциальные уравнения Навье—Стокса или Рейнольдса, интегральные формы этого закона.

При решении внутренней задачи чаще всего центральным является вопрос о потерях энергии в потоке жидкости. Поэтому здесь используются уравнения, выражающие закон изменения кинетической энергии, чаше всего в виде различных форм уравнения Бернулли.

В основу гидродинамики как раздела гидромеханики положены четыре основных закона механики: закон сохранения массы, закон изменения количества движения (импульса), закон изменения момента количества движения, закон изменения кинетической энергии.

Эти законы формулируются для объемов жидкости конечных размеров, так как при этом все слагаемые, входящие в соответствующие уравнения, имеют ясное механическое содержание. При решении многих практических задач из области техники уравнения, записанные для объемов конечных размеров, могут быть существенно упрощены, если учесть конкретные особенности условий на поверхностях, ограничивающих указанные объемы, свойства приложенных к объему поверхностных и массовых сил, а также практически необходимую степень детализации искомых решений. Эти упрощенные уравнения, которые обычно называют гидравлическими, образуют основу технической механики жидкости; они эффективны при решении многих практически важных задач, относящихся к инженерно-строительному (энергетическому, водно-транспортному, мелиоративному), химико-технологическому, металлургическому и машиностроительному направлениям, когда представляют интерес главным образом интегральные (осредненные по времени и пространству) гидромеханические характеристики потоков.

Если же при решении задач необходимо уметь определять гидромеханические величины в каждой точке объема жидкости, то следует в этих же уравнениях для конечных объемов совершить предельный переход, потребовав, чтобы объем жидкости стал произвольно мал. При этом получают дифференциальные уравнения, отражающие те же законы механики, но относящиеся к «точке» сплошной среды. Решая эти уравнения, дополненные каким-либо реологическим законом, можно выяснить структуру поля скорости и напряженное состояние в любой точке потока жидкости.

В процессе практического использования уравнений в соответствии с каждым из указанных подходов слагаемые, входящие в эти уравнения, преобразуются с помощью теоремы Остроградского—Гаусса. При выводе гидравлических уравнений объемные интегралы заменяются на поверхностные с тем, чтобы использовать особенности условий на поверхностях, ограничивающих поток, для упрощения уравнений, а при выводе дифференциальных уравнений, напротив, поверхностные интегралы заменяются на объемные, чтобы иметь возможность исследовать гидромеханические величины в точках внутри потока, при этом условия на границах потока вводятся как граничные (краевые) условия для дифференциальных уравнений.

4.2. Закон сохранения массы

Выделим в пространстве контрольный объем $\forall$, ограниченный произвольной поверхностью A. Пусть плотность жидкости ρ зависит и от времени и от координат, т.е. $\rho = (\mathbf{r}, t) = \rho(x, y, z, t)$.

Масса бесконечно малого объема $d\forall$, расположенного в точке с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в момент времени t, равна $\rho(\mathbf{r}, t)\, d\forall$. Масса объема $\forall$ жидкости, находящейся внутри поверхности A, равна

$$M = \int_{\forall} \rho d\forall . \tag{4.1}$$

Согласно закону сохранения массы при движении рассматриваемого объема $\forall$ его масса остается неизменной. Так как изменение во времени гидромеханической величины, относящейся к некоторому определенному движущемуся объему жидкости, выражается в виде субстанциальной производной от этой величины, закон сохранения массы представим в виде

$$\frac{DM}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt}\int\limits_{\forall} \rho d\forall = 0 . \tag{4.2}$$

Из этого уравнения получают и интегральное выражение закона сохранения массы, используемое в одномерных задачах, и дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы.

4.3. Закон изменения количества движения

Изменение количества движения тела за единицу времени равно сумме внешних сил, приложенных к телу. Количество движения и силы — это векторы, поэтому уравнение, отражающее этот закон, является векторным, ему соответствует система трех уравнений, связывающих проекции векторов на координатные оси.

Выделим в пространстве контрольный объем жидкости $\forall$. Бесконечно малый объем $d\forall$ имеет массу $\rho d\forall$ и количество движения $\rho \mathbf{u} d\forall$. Количество движения всего объема $\int\limits_{\forall} \rho\, \mathbf{u}\, d\forall$. Изменение количества движения при перемещении этого объема за единицу времени равно

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_{\forall} \rho\, \mathbf{u}\, d\forall . \tag{4.3}$$

Вектор внешних массовых сил, плотность распределения которых обозначим через $\mathbf{f}(x, y, z)$, находим аналогично: на элементарный объем $d\forall$ массой $\rho d\forall$ действует сила $\mathbf{f}\rho\, d\forall$, следовательно, внешняя массовая сила, действующая на весь объем $\forall$, равна

$$\int\limits_{\forall} \mathbf{f}\rho\, d\forall . \tag{4.4}$$

Плотность распределения поверхностной силы (напряжение) на поверхности A обозначим через $\mathbf{p}_n$, учитывая, что $\mathbf{n}$ — нормаль к A; тогда на элементарную площадку dA действует сила $\mathbf{p}_n\, dA$, а на всю поверхность действует результирующая поверхностная сила

$$\int\limits_{A} \mathbf{p}_n dA . \tag{4.5}$$

Приравнивая (4.3) сумме (4.4) и (4.5), получаем уравнение, выражающее закон изменения количества движения

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_{\forall} \rho\, \mathbf{u}\, d\forall = \int\limits_{\forall} \mathbf{f}\rho\, d\forall + \int\limits_{A} \mathbf{p}_n dA . \tag{4.6}$$

Это векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям, которые можно записать, проектируя все слагаемые на координатные оси x, y, z. Например, в проекции на ось x имеем

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_{\forall} \rho u_x d\forall = \int\limits_{\forall} f_x\rho\, d\forall + \int\limits_{A} p_{nx} dA . \tag{4.7}$$

В механике жидкости уравнение (4.6) используется и в приведенном выше виде, а также в виде системы дифференциальных уравнений, получаемых при стягивании контрольного объема $\forall$ к точке.

4.4. Закон изменения момента количества движения

Изменение момента количества движения в единицу времени жидкого объема относительно некоторой точки равно сумме моментов всех внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем, относительно той же точки. Как известно, момент вектора **a** относительно, например, начала координат равен (рис. 4.1)

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{a}, \qquad (4.8)$$

где **r** — вектор-радиус, определяющий точку приложения вектора **a**. Символ (×) означает векторное произведение двух векторов **r** и **a**. Вектор $\mathbf{M}_0$ имеет модуль $\left|\mathbf{M}_0\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{r}\right| \cdot \sin\left(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{a}}\right)$ и направлен по нормали к плоскости, определяемой векторами **a** и **r**, так, что, глядя с конца вектора $\mathbf{M}_0$, видим поворот от вектора **r** к вектору **a** происходящим против часовой стрелки.

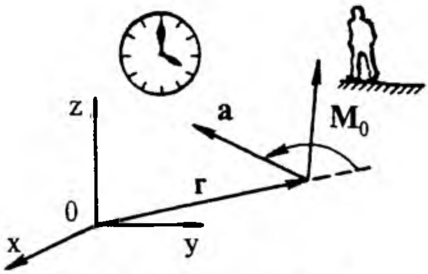

Рис. 4.1. Момент вектора **a**

В матричной форме векторное произведение имеет вид

$$\mathbf{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} y & z \\ a_y & a_z \end{vmatrix} + \mathbf{j}\begin{vmatrix} z & x \\ a_z & a_x \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} x & y \\ a_x & a_y \end{vmatrix}$$

или

$$\mathbf{M}_0 = \left(M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}\right) = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ a_y & a_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ a_z & a_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ a_x & a_y \end{vmatrix}\right), \qquad (4.9)$$

т.е. проекции вектора $\mathbf{M}_0$ на координатные оси численно равны написанным выше определителям.

Имея это в виду, уравнение, выражающее закон изменения момента количества движения, можно записать по аналогии с уравнением для закона изменения количества движения. Для этого каждый вектор из уравнения (4.6) надо умножить векторно на **r** (слева):

$$\frac{D}{Dt}\int_{\forall}(\mathbf{r} \times \rho\mathbf{u})\,d\forall = \int_{\forall}(\mathbf{r} \times \mathbf{f})\,\rho d\forall + \int_{A}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)\,dA. \qquad (4.10)$$

Это векторное уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые можно выписать, проецируя слагаемые, входящие в уравнение (4.10), на координатные оси. Например, в проекции на ось z имеем

$$\frac{D}{Dt}\int_{\forall}\left(xu_y - yu_x\right)\rho d\forall = \int_{\forall}\left(xf_y - yf_x\right)\rho d\forall + \int_{A}\left(xp_{ny} - yp_{nx}\right)dA. \quad (4.11)$$

На основе этого уравнения в гл. 14 будет доказана симметричность тензора напряжений. В технической механике жидкости уравнение в форме (4.10) используется главным образом в гидромашиностроении, при расчетах вращающихся рабочих колес турбин и насосов.

4.5. Закон изменения кинетической энергии

Согласно этому закону изменение кинетической энергии выделенного объема жидкости в единицу времени равно мощности всех внешних и внутренних (поверхностных и массовых) сил, действующих на этот объем жидкости. Кинетическая энергия объема $\forall$ жидкости равна

$$\int_{\forall} \rho (u^2/2)\, d\forall . \tag{4.12}$$

Мощность силы равна скалярному произведению вектора силы и скорости тела, на которое она действует. Например, на элементарный объем $d\forall$ действует внешняя массовая сила с плотностью распределения **f**, величина этой силы $\mathbf{f}\rho\, d\forall$, а если скорость движения объема $d\forall$ равна **u**, то мощность внешней объемной силы равна $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{f})\rho d\forall$; мощность этой силы при перемещении всего объема $\forall$ выражается в виде

$$\int_{\forall} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{f})\rho d\forall . \tag{4.13}$$

Рассуждая аналогично, найдем мощность внешних поверхностных сил, действующих на поверхность A, ограничивающую объем $\forall$:

$$\int_{A} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}_n) dA, \tag{4.14}$$

где **u** — скорость жидкости на поверхности A в точке, где выделен элемент dA.

Рассчитать работу внутренних сил, как правило, не представляется возможным, так как она зависит от поля скорости внутри контрольного объема, которое неизвестно. Поэтому введем функцию $\Phi(x, y, z, t)$ — плотность распределения мощности внутренних сил, т.е. мощности, которая переходит в тепло и рассеивается (диссипирует) в единице объема жидкости. Очевидно, работа внутренних сил может только уменьшать кинетическую энергию, так как, переходя в энергию беспорядочного теплового движения молекул, соответствующая часть кинетической энергии объема $\forall$ уже не участвует в дальнейшем балансе механической энергии. Обычно мощность внутренних сил называют *диссипированной*, а функцию Φ — *диссипативной*. Уменьшение кинетической энергии объема $\forall$ за счет работы внутренних сил представим в виде

$$-\int_{\forall} \Phi\, d\forall . \tag{4.15}$$

Знак минус вводится, чтобы функция $\Phi(x, y, z, t)$, была всегда положительной.

Приравнивая субстанциальную производную от (4.12) сумме (4.13), (4.14) и (4.15), получаем уравнение, выражающее закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{D}{Dt}\int_{\forall} \rho \frac{u^2}{2} d\forall = \int_{\forall} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{f})\rho d\forall + \int_{A} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}_n) dA - \int_{\forall} \Phi d\forall . \tag{4.16}$$

Когда уравнение (4.16) используют для решения одномерных задач, то его представляют в виде различных форм уравнения Бернулли.

В виде дифференциального уравнения закон изменения кинетической энергии не используется, так как оно эквивалентно дифференциальному уравнению, выражающему закон изменения количества движения.

4.6. Общий закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды

В дополнение к закону изменения кинетической энергии, выражающему баланс механической энергии, целесообразно рассмотреть более общий случай и принять во внимание как изменение механической энергии за счет ее источников (или стоков), содержащихся внутри контрольного объема, так и баланс внутренней энергии (тепла).

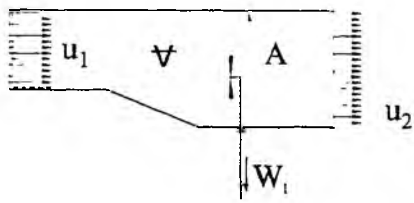

Рис. 4.2. Контрольный объем для формулировки закона сохранения энергии

Пусть в контрольном объеме, указанном на рис. 4.2 штриховой линией, установлена турбина, которую вращает набегающий поток, отдавая ей мощность W_i (поток совершает работу W_i в единицу времени). Индекс i означает, что таких устройств, изменяющих механическую энергию потока, может быть несколько. Кроме того, если внутри контрольного объема вместо турбины установлен насос, то соответствующая мощность насоса увеличивает механическую энергию потока, так что знак W_i зависит от функции устройства внутри контрольного объема. При этом уравнение, выражающее баланс механической энергии, имеет вид

$$\frac{D}{Dt}\int_{\forall}\frac{\rho u^2}{2}d\forall=\int_{\forall}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{f})\rho d\forall+\int_{A}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}_n)dA-\int_{\forall}\Phi d\forall+\sum_{i}W_i. \qquad (4.17)$$

Рассмотрим баланс тепла в контрольном объеме. Пусть E — количество внутренней энергии жидкости (теплоты) внутри контрольного объема, а $e(\mathbf{r},\ t)$ — плотность ее распределения в пространстве, т.е. удельная (на единицу массы) внутренняя энергия жидкости. Тогда

$$E=\int_{\forall}e(\mathbf{r},\ t)\rho d\forall. \qquad (4.18)$$

Изменение внутренней энергии жидкости в контрольном объеме имеет место вследствие следующих причин:

наличия внутри объема источников тепла, подводимого извне, с плотностью распределения $\tau(\mathbf{r},\ t)$ (на единицу объема в единицу времени);

присутствия на граничных поверхностях источников тепла с плотностью распределения $\sigma(\mathbf{r},\ t)$ (на единицу площади в единицу времени);

работы внутренних сил в жидкости, например, за счет вязкости; плотность распределения мощности внутренних сил $\Phi(\mathbf{r},\ t)$.

Баланс тепла для жидкости, содержащейся в контрольном объеме в момент времени t, имеет вид

$$\frac{D}{Dt}\int_{\forall} e(\mathbf{r}, t)\rho d\forall = \int_{\forall} \tau(\mathbf{r}, t) d\forall + \int_{A} \sigma(\mathbf{r}, t) dA + \int_{\forall} \Phi(\mathbf{r}, t) d\forall \qquad (4\ 19)$$

Складывая (4 17) и (4 19), получаем уравнение, выражающее общий закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды

$$\frac{D}{Dt}\int_{\forall}\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\rho d\forall = \int_{\forall}(\mathbf{u}\ \mathbf{f})\rho d\forall + \int_{A}(\mathbf{u}\ \mathbf{p}_n)dA + \int_{\forall}\tau d\forall + \int_{A}\sigma dA + \sum_{i} W_i \qquad (4\ 20)$$

Как следует из (4 20), работа внутренних сил $\int_{\forall}\Phi d\forall$ не изменяет полную энергию системы жидких частиц она уменьшает механическую энергию и увеличивает тепловую

ГЛАВА 5

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ (В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ)

5.1. Основные понятия и терминология

Одномерное приближение весьма эффективный способ описания движения жидкости в случае, когда продольные (измеренные вдоль направления движения) размеры потока во много раз превосходят его поперечные размеры, что имеет место главным образом в трубах, реках и каналах

Важной особенностью потоков в трубах и каналах является то, что неподвижные твердые границы (стенки трубопроводов, дно рек и каналов) составляют значительную часть поверхности, ограничивающей поток На этих границах скорость жидкости $\mathbf{u}_{гр} = 0$ (равны нулю и нормальная к границе и касательная к ней составляющие) Благодаря этому на тех границах контрольного объема $\forall$, которые совпадают с твердыми границами потока, поверхностные интегралы, входящие в фундаментальные законы гидромеханики (гл 4) и содержащие скорость $\mathbf{u}$ или ее проекции, обращаются в ноль Это существенно упрощает получение расчетных зависимостей, основанных на фундаментальных законах

В достаточно длинных цилиндрических или призматических трубах и каналах формируются потоки жидкости, в которых линии тока параллельны ограничивающим поток твердым границам Движение жидкости, при котором линии тока представляют собой параллельные прямые, будем называть *равномерным*, или *параллельно-струйным*, или *продольно-однородным*

При равномерном движении оказывается возможным построить плоское поперечное (ортогональное линиям тока) сечение потока, которое иногда называют *живым сечением* При этом, в частности, исключается необходимость исследовать поле скоростей и появляется возможность оперировать средними по сечению значениями скорости, рассматривая интегральные характеристики потока в этом сечении