

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

19.1. Основные понятия статистической гидромеханики

При выводе уравнений Рейнольдса указывалось, что временное осреднение пульсационных характеристик непригодно при исследовании нестационарных турбулентных потоков. Поясним это положение на следующем примере. Представим трубу, присоединенную к резервуару, в котором уровень свободной поверхности жидкости поддерживается постоянным. В конце трубы установлена задвижка. Если мгновенно открыть задвижку, то, пренебрегая сжимаемостью жидкости и упругостью стенок трубы, с помощью простого гидравлического расчета легко найти, что средняя скорость v в трубе возрастает от 0 до некоторого конечного значения. Тахограмма мгновенной продольной скорости в какой-либо точке A , расположенной внутри потока будет иметь вид, представленный на рис. 19.1. Очевидно, что на том участке тахограммы, где движение неустановившееся, определять осредненную скорость с помощью интеграла

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_1(t) dt \quad (19.1)$$

не имеет смысла, так как ни при каком T нельзя получить непрерывную зависимость осредненной скорости от времени.

Возможность корректно определить величину осредненной скорости при неустановившемся движении представляется при использовании теоретико-вероятностного (статистического) подхода к описанию тур-



Рис. 19.1. Тахограмма при ускорении движения жидкости из состояния покоя

булентных потоков. Основы такого подхода были заложены в серии работ Дж.Тейлора в тридцатых годах нашего столетия. При статистическом подходе рассматривают не какой-либо конкретный турбулентный поток, а статистическую совокупность (статистический ансамбль) аналогичных потоков, задаваемых некоторыми внешними условиями. Например, для описания неустановившегося турбулентного движения в

трубе при мгновенном открытии задвижки необходимо достаточно много раз (N раз) открыть задвижку и изучить совокупность всех (получающихся при каждом открытии) потоков.

Для определения продольной скорости в точке А следует иметь всевозможные тахограммы продольной скорости в этой точке (рис. 19.2). При этом считаем, что в фиксированный момент времени t_0 следует рассматривать не одно значение скорости $u_1(t_0)$, а совокупность (мно-

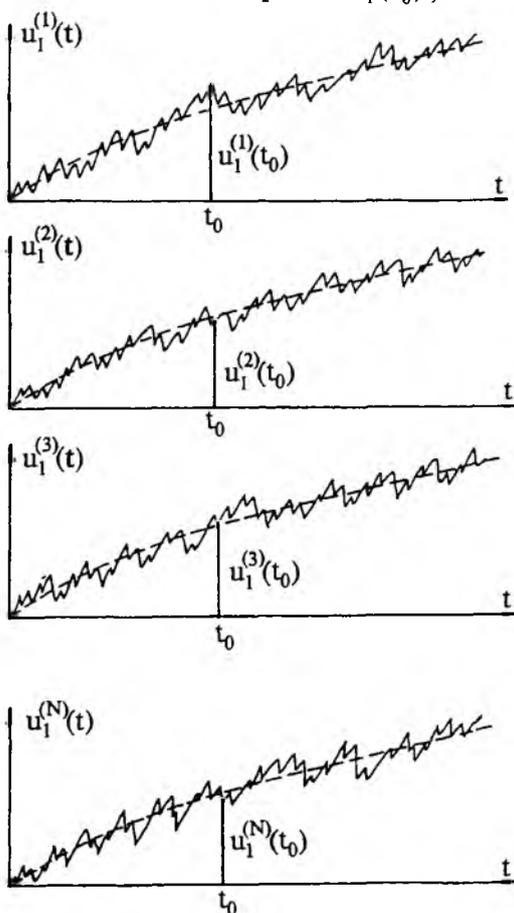


Рис. 19.2. Статистическая совокупность тахограмм продольной скорости при ускорении движения

жество) всех значений, которые могут получиться во всех возможных потоках в данной трубе при идентичных граничных условиях (на входе и выходе). Значение проекции скорости в каждой тахограмме рассматривается как *представитель*, выбранный наудачу из этого множества, т.е. проекция скорости считается *случайной величиной*.

Осредненная скорость в момент t_0 определяется как среднее арифметическое всех значений скорости $u_1(t_0)$, которые получаются в различных конкретных тахограммах:

$$\bar{u}_1(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_1^{(i)}(t_0). \quad (19.2)$$

Пульсационная скорость определяется как отклонение скорости в данный момент времени в данной тахограмме от осредненной скорости:

$$u_1^{(i)}(t_0) = u_1^{(i)}(t_0) - \bar{u}_1(t_0). \quad (19.3)$$

Среднеквадратичное значение пульсационной скорости также определяется из рассмотрения статистической совокупности тахограмм:

$$\overline{u_1'^2}(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [u_1^{(i)}(t_0)]^2. \quad (19.4)$$

Статистический подход позволяет использовать при описании турбулентности хорошо разработанный математический аппарат теории вероятностей. Так, например, при помощи соответствующих теорем теории вероятности можно доказать, что при определении процедуры осреднения характеристик турбулентности посредством (19.2) правила осреднения Рейнольдса, сформулированные в разд. 17.2, выполняются автоматически.

Статистический подход к описанию турбулентности используется и для установившегося движения. При этом возникает вопрос, совпадают ли осредненная скорость, определенная с помощью осреднения по времени (согласно зависимости (19.1)), с осредненной скоростью, вычисленной с помощью статистического осреднения по ансамблю (согласно зависимости (19.2)). Доказательство равенства указанных осредненных величин представляет собой содержание так называемой *эргодической теоремы*. Если это равенство вводится в виде допущения, то его называют *эргодической гипотезой*. Прежде чем рассмотреть взаимное соответствие различных способов осреднения, укажем некоторые приемы статистической обработки тахограмм при установившемся турбулентном движении.

При стационарных граничных условиях (например, при фиксированном открытии задвижки в трубе) можно получить тахограмму любой длины (для сколь угодно большого промежутка времени). Разрежем такую тахограмму на большое число тоже достаточно длинных кусков (что означает "достаточно длинный кусок", станет ясно из дальнейшего изложения). Считая каждый кусок отдельной тахограммой и рассматривая полученный набор тахограмм как статистическую совокупность (ансамбль), найдем осредненную скорость $\bar{u}_1(t)$ по формуле (19.2) для каждого момента времени.

Будем считать справедливой эргодическую гипотезу, из которой следует, что осредненная скорость во все моменты времени будет одинакова, т.е. $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_1 = \text{const}$. Вычитая из всех значений мгновенной скорости $u_1^{(i)}(t)$ величину \bar{u}_1 , построим тахограммы продольной пульсационной скорости u_1' . Представим на рис. 19.3 набор тахограмм для одной из проекций скорости u_1' . Аналогичные наборы тахограмм можно построить и для двух других проекций пульсационной скорости u_2' и u_3' .

Определением *временной корреляционной функции* (или *автокорреляционной функции*) продольной пульсационной скорости R_{11} является выражение

$$R_{11}(t, \tau) = \overline{u_1'(t) u_1'(t + \tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_1^{(i)}(t) u_1^{(i)}(t + \tau). \quad (19.5)$$

Чтобы практически вычислить величину $R_{11}(t, \tau)$, надо на каждой i -й тахограмме найти величины $u_1^{(i)}(t)$ и $u_1^{(i)}(t + \tau)$, перемножить их, а затем определить среднее арифметическое таких произведений, вычисленных для всех тахограмм.

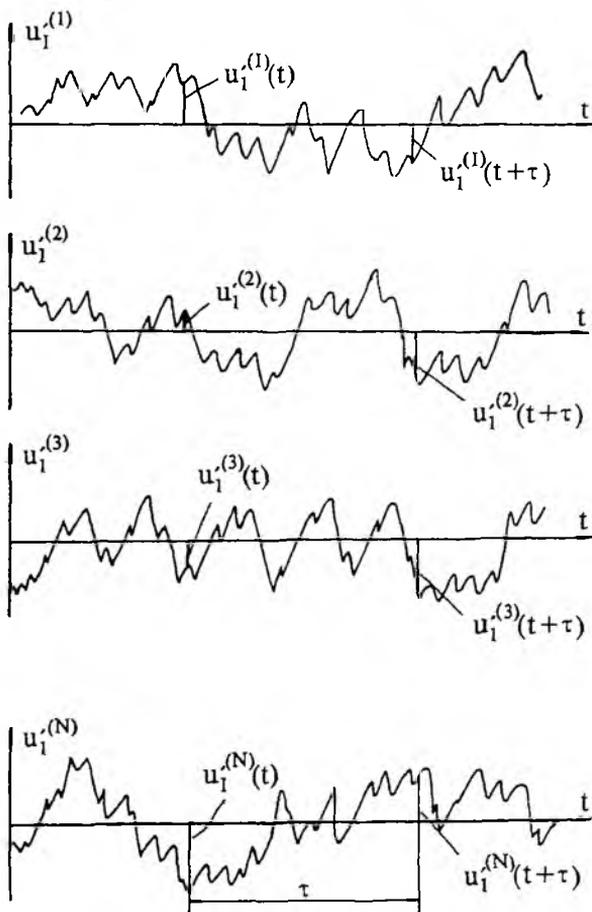


Рис. 19.3. Совокупность тахограмм продольной пульсационной скорости

Если движение установившееся, то естественно, что эта величина зависит только от τ (и не зависит от t), т.е. $R_{11}(t, \tau) = R_{11}(\tau)$. Очевидно, что при $\tau = 0$

$$R_{11}(0) = \overline{u_1'^2}. \quad (19.6)$$

Если τ мало, то величины $u_1^{(i)}(t)$ и $u_1^{(i)}(t + \tau)$ имеют, как правило, один и тот же знак, так что $R_{11} > 0$. При увеличении τ знак этих величин может быть и одинаковым и разным, а при очень больших τ величина $u_1^{(i)}(t + \tau)$ практически не зависит от значения $u_1^{(i)}(t)$ (как отмечалось при определении понятия турбулентности (см. разд. 5.10), скорость в фиксированной точке изменяется неупорядоченно, непериодически). Следовательно, эти случайные величины с нулевыми средними значениями можно считать независимыми; как известно,

осредненное произведение таких величин равно нулю. Это означает, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{11}(\tau) = 0. \quad (19.7)$$

Приведенные рассуждения позволяют наметить общий характер зависимости R_{11} от τ , которая представлена на рис. 19.4.

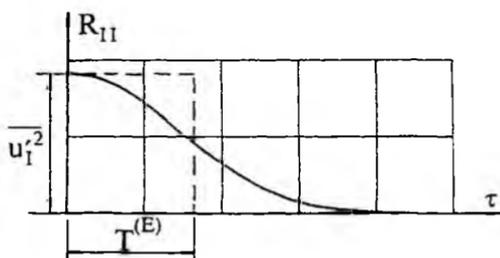


Рис. 19.4. Типичная автокорреляционная функция пульсационной скорости

Временная корреляционная функция показывает, насколько скоро по мере увеличения интервала времени убывает статистическая связь между значениями пульсационной скорости. Этой функцией можно характеризовать изменчивость во времени пульсационной скорости; с ее помощью можно оценивать, например, продолжительность времени, в течение которого пульсационная скорость сохраняет свой знак, используя величину

$$T_{11}^{(E)} = \frac{1}{u_1'^2} \int_0^{\infty} R_{11}(\tau) d\tau. \quad (19.8)$$

Величину $T_{11}^{(E)}$ называют *интегральным временным масштабом турбулентности*. Индекс E указывает на эйлеров характер этой величины; она характеризует изменение продольной пульсационной скорости в фиксированной точке пространства. Аналогично определяются временные корреляционные функции R_{22} и R_{33} для двух других проекций пульсационной скорости.

Временную корреляционную функцию при установившемся движении можно определить, не используя статистический подход к описанию турбулентности, а с помощью временного осреднения. Для этого надо, задавая различные значения τ (от 0 до ∞), определить при каждом из них произведения пульсационных скоростей, отстоящих на тахограмме друг от друга на расстоянии τ , и вычислить

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_1(t) \cdot u'_1(t + \tau) dt. \quad (19.9)$$

Очевидно, если принять эргодическую гипотезу, то этот интеграл равен $R_{11}(\tau)$.

Отметим, что полученные в разд. 17.2 напряжения Рейнольдса $-\rho u'_\alpha u'_\beta$ по определению также являются корреляционными функциями. Так, например, чтобы вычислить их с помощью временного осреднения, нужно иметь две тахограммы $u'_\alpha(t)$ и $u'_\beta(t)$. Взяв произведения $u'_\alpha(t) u'_\beta(t + \tau)$ в каждый момент времени, вычислим интеграл

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_\alpha(t) u'_\beta(t + \tau) dt = R_{\alpha\beta}(\tau), \quad (19.10)$$

который при $\tau = 0$ представляет собой $\overline{u'_\alpha u'_\beta}$. Корреляционные функции, устанавливающие связь между различными пульсационными характеристиками турбулентности (например, между u'_α и u'_β), называют *взаимными*.

При статистическом определении взаимной корреляционной функции $R_{\alpha\beta} = \overline{u'_\alpha u'_\beta}$ необходимо иметь два набора тахограмм $u'_\alpha^{(i)}(t)$ и $u'_\beta^{(i)}(t)$ ($i=1, \dots, N$) и вычислить $R_{\alpha\beta}(t, \tau)$ по зависимости

$$R_{\alpha\beta}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u'_\alpha^{(i)}(t) u'_\beta^{(i)}(t + \tau). \quad (19.11)$$

Если движение установившееся, то $R_{\alpha\beta}(t, \tau)$ будет одинаковым при любом t , а приняв эргодическую гипотезу, получим, что $R_{\alpha\beta}$, определенные по зависимостям (19.10) и (19.11), совпадают.

В заключение приведем рассуждения, которые можно рассматривать как обоснование эргодической гипотезы. В соответствии со статистическим подходом будем считать продольную скорость в фиксированной точке турбулентного потока *случайной* величиной, принимающей любые вещественные значения и характеризующейся функцией плотности распределения вероятностей $p(u_1)$. Эта функция задает вероятность попадания *выборочного значения скорости* $u_{1 \text{ выб}}$ в интервал длиной du_1 , выделенный вблизи некоторого фиксированного значения u_1 :

$$P\{u_1 < u_{1 \text{ выб}} < u_1 + du_1\} = p(u_1) du_1. \quad (19.12)$$

Функцию $p(u_1)$ можно определить с помощью тахограммы. Для этого выделим на рис. 19.5 из тахограммы отрезок длиной T ; наметим интервал изменения скорости $(u_1, u_1 + \Delta u_1)$ и найдем по тахограмме длины

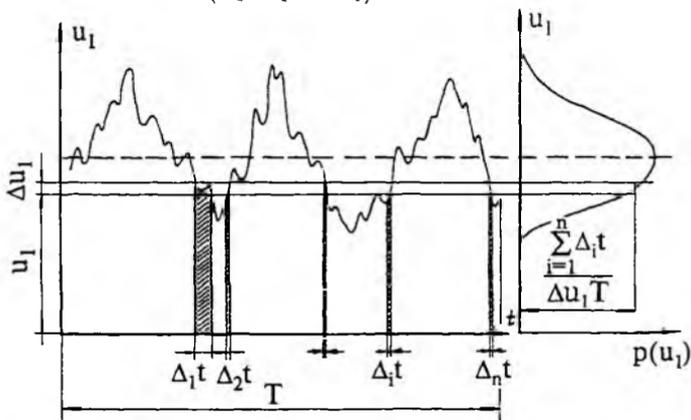


Рис. 19.5. Пояснение эргодической гипотезы

всех отрезков времени $\Delta_i t(u_1)$, в течение которых продольная скорость находилась в указанном интервале значений. При достаточно большой длине T отношение $\sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1)/T$ определяет вероятность того, что скорость будет иметь значение, лежащее в интервале $(u_1, u_1 + \Delta u_1)$. Следовательно,

$$p(u_1)\Delta u_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1)}{T}. \quad (19.13)$$

Установим таким образом значение $p(u_1)$ плотности распределения вероятностей для всех u_1 . Зная $p(u_1)$, легко найти осредненное (в статистическом смысле) значение скорости как математическое ожидание случайной величины:

$$\bar{u}_1 = \int_0^{\infty} u_1 p(u_1) du_1 = \sum_{(u_1)} u_1 p(u_1) \Delta u_1. \quad (19.14)$$

Подставив (19.13) в (19.14), найдем

$$\bar{u}_1 = \sum_{(u_1)} u_1 \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1)}{T} = \frac{1}{T} \sum_{(u_1)} u_1 \sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1). \quad (19.15)$$

Для каждого u_1 выражение под знаком $\sum_{(u_1)}$ геометрически представляет собой сумму площадей заштрихованных полосок. Сумма площадей таких полосок для всех значений скорости u_1 , очевидно, равна площади фигуры, ограниченной сверху тахограммой, т.е.

$$\sum_{(u_1)} u_1 \sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1) = \int_0^T u_1(t) dt.$$

Из этого равенства следует, что осредненная скорость, определенная статистически равенством (19.14), совпадает с осредненной скоростью, вычисленной осреднением по времени согласно (19.1).

19.2. Частотные характеристики турбулентности

При описании понятия турбулентности указывалось, что, например, скорость жидкости при турбулентном движении имеет три главные характеристики: осредненное значение скорости, характерное значение (стандарт) пульсационной скорости и характерное значение частоты пульсаций скорости. Хотя пульсации скорости являются нерегулярными, беспорядочными (их нельзя представить в виде суммы гармонических колебаний), все же характерную частоту (или диапазон частот) можно, как правило, указать. Например, возьмем тахограмму скорости при установившемся движении с масштабом времени по горизонтальной оси $1 \text{ см} = 1 \text{ с}$, и не меняя формы тахограммы, будем считать, что масштаб времени $1 \text{ см} = 1 \text{ мин}$. Сравнивая две такие тахограммы, отметим, что они определяют одинаковые осредненные скорости, одинаковые стандарты пульсационной скорости, а вот изменчивость скорости во времени на этих тахограммах различная.

В предыдущем разделе было указано, что временная корреляционная функция позволяет оценить частотные характеристики, и, в частности, интегральный временной масштаб можно интерпретировать как среднюю продолжительность времени, в течение которого пульсацион-

ная скорость имеет постоянный знак. Однако более удобна для анализа частотных характеристик не сама корреляционная функция, а ее трансформанта Фурье (т.е. результат преобразования Фурье от корреляционной функции):

$$S_{11}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{11}(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (19.16)$$

Это преобразование существует, так как $R_{11}(\tau)$ обычно достаточно быстро стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Из (19.16) следует, что

$$R_{11}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{11}(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (19.17)$$

Последнее равенство при $\tau = 0$ имеет вид

$$R_{11}(0) = \overline{u_1'^2} = \int_0^{\infty} S_{11}(\omega) d\omega. \quad (19.18)$$

Выражение $\frac{1}{2} \overline{\rho u_1'^2}$ можно трактовать как плотность распределения в потоке кинетической энергии, обусловленной продольными пульсациями скорости, поэтому равенство (19.18) позволяет дать следующую интерпретацию функции $S_{11}(\omega)$. Если представить действительное изменение скорости во времени как сумму гармонических колебаний скорости с различными частотами, принимающими значение от 0 до ∞ , то функция S_{11} определяет распределение энергии продольных пульсаций скорости по спектру частот. Она называется *функцией спектральной плотности* продольной пульсационной скорости или *энергетическим спектром* продольных пульсаций скорости. Очевидно, что аналогичные функции можно определить и для поперечных пульсаций скорости u_2' и u_3' . Укажем, что размерность функции спектральной плотности — m^2/c .

Для более полного отражения распределения энергии в широком диапазоне частот функцию спектральной плотности представляют в системе координат, построенной в логарифмическом масштабе. Для этого предварительно необходимо, используя подходящие масштабы длины L и скорости u , перейти к безразмерным частотам

$$\Omega = \frac{\omega L}{u}. \quad (19.19)$$

Представление $S_{11}(\Omega)$ в зависимости от $\ln \Omega$ (рис. 19.6,а) в некотором отношении неудобно, так как при этом S_{11} не удастся нормировать, т.е. нельзя выбрать такой масштаб для вертикальной оси координат, чтобы площадь под графиком $S_{11} = S_{11}(\ln \Omega)$ была равна единице. Отсутствие нормирования исключает возможность сравнивать экспериментальные зависимости, относящиеся к различным потокам, и получать универсальные функции спектральной плотности и т.п. Если же по вертикальной оси откладывать не $S_{11}(\Omega)$, а $\Omega \cdot S_{11}(\Omega)$, как это сделано на рис. 19.6,б, то площадь под графиком зависимости $\Omega \cdot S_{11}(\Omega) = f(\ln \Omega)$ будет пропорциональна $\overline{u_1'^2}$, так как

$$\int_0^{\infty} \Omega \cdot S_{11}(\Omega) d \ln \Omega = \int_0^{\infty} S_{11}(\Omega) d\Omega = \overline{u_1'^2} \cdot \frac{L}{u}. \quad (19.20)$$

При этом можно построить безразмерную зависимость

$$\frac{\Omega \cdot S_{11}(\Omega)}{u_1'^2} = f(\ln \Omega),$$

площадь под графиком которой равна единице. Такие зависимости называются нормированными.

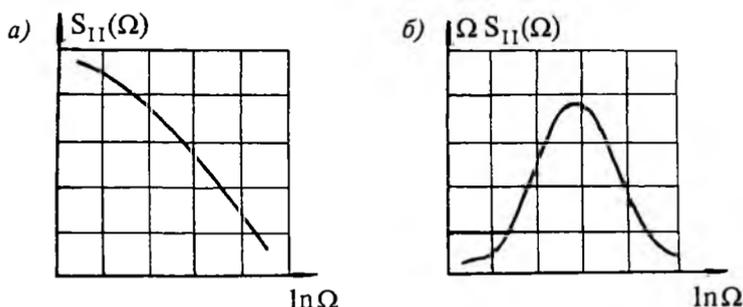


Рис. 19.6. Различные формы представления функции спектральной плотности пульсационной скорости

В первом приближении частоту Ω_0 , отвечающую максимуму функции $\Omega \cdot S_{11}(\Omega)$, можно рассматривать как характерную частоту пульсационной скорости. Действительно, пульсации скорости, имеющие частоты из диапазона (Ω_1, Ω_2) , дают наибольший вклад в полную энергию пульсационного движения. Этот вклад определяется величиной заштрихованной площади на рис. 19.7 (вся площадь фигуры под кривой равна единице).

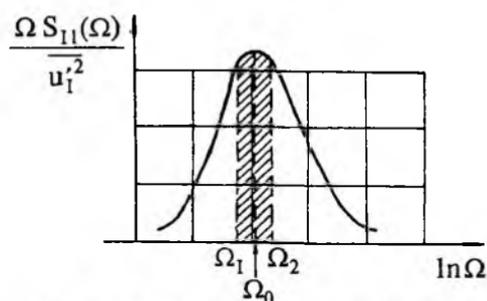


Рис. 19.7. Нормированная функция спектральной плотности

S_{33} для поперечной пульсационной скорости u_3' (в зависимости от $\Omega_H = \frac{\omega H}{v}$), измеренной на различных расстояниях от стенки, имеют вид, представленный на рис. 19.8.

Как видно из приведенных экспериментальных кривых, в пристеночном слое ($0 < x_3/H < 0,40$) характерные частоты (т.е. частоты, отвечающие максимуму) возрастают с приближением к стенке.

По экспериментальным точкам, относящимся к этому слою, построим зависимость S_{33} от безразмерной частоты $\Omega_{x_3} = \omega x_3 / \bar{u}_1(x_3)$. При вычислении этой частоты в качестве характерных длины и скорости выбраны расстояния x_3 до стенки от точки, в которой проводилось измерение спектра, и осредненная продольная скорость в этой же точке $\bar{u}_1(x_3)$. Как видно из рис. 19.9, на котором представлена зависимость

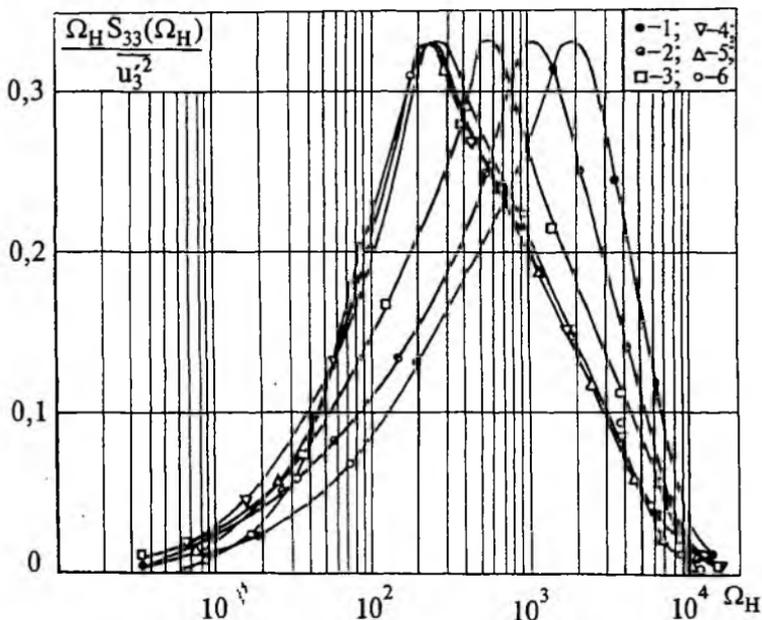


Рис. 19.8. Функции спектральной плотности поперечной пульсационной скорости, измеренные на следующих расстояниях x_3/H от стенки: 1 — 0,040; 2 — 0,088; 3 — 0,20; 4 — 0,47; 5 — 0,67; 6 — 1,00

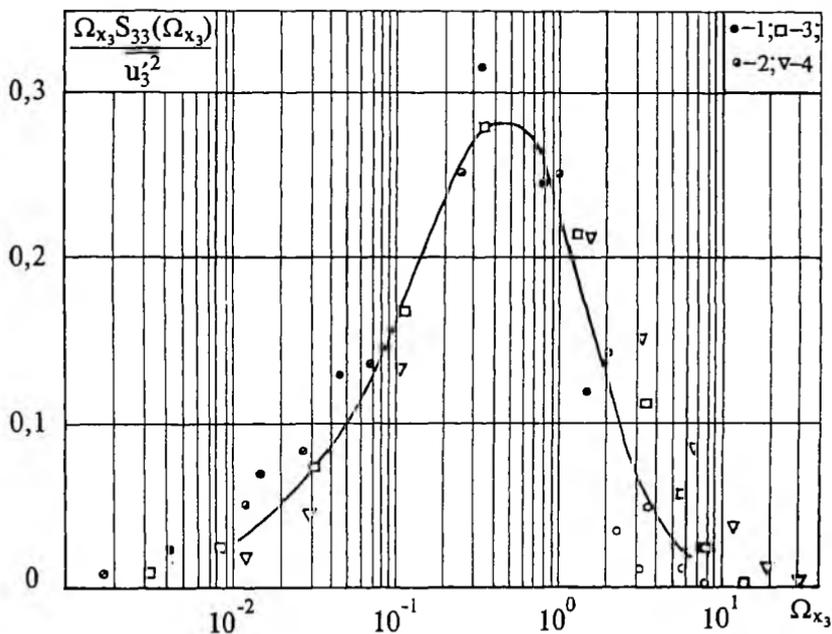


Рис. 19.9. Функция спектральной плотности в пристеночной области (обозначения см. на рис. 19.8)

Ω_{x_j} , $S_{33}(\Omega_{x_j}) = f(\ln \Omega_{x_j})$, в пристеночном слое характерная частота обратно пропорциональна расстоянию до стенки.

Отметим, что представление энергии пульсационного движения в виде (19.18) указывает на распределение этой энергии по спектру частот, и его можно рассматривать как способ для экспериментального определения функции спектральной плотности (наряду с его основным определением согласно зависимости (19.17)). Этот способ основан на так называемом *фильтровании* тахограммы. Для фильтрования необходимо иметь систему n полосовых фильтров, каждый из которых (например, j -й) пропускает колебания электрического тока с частотой, лежащей в некоторой полосе частот, и не пропускает колебания с другими частотами, причем j -й фильтр пропускает колебания тока с частотой в интервале от ω_j до ω_{j+1} , а $(j+1)$ -й фильтр — в интервале от ω_{j+1} до ω_{j+2} и т.д. Набор фильтров должен охватывать весь диапазон частот, в котором предполагается исследовать распределение энергии пульсаций скорости. Если электрическое напряжение, снимаемое с датчика скорости, пропорционально величине скорости $u_1(t)$, то, подавая это напряжение на вход j -го фильтра, получим на выходе из него колебательный процесс с почти постоянной частотой (из интервала от ω_j до ω_{j+1}) и со случайной амплитудой $(u'_1)_j$.

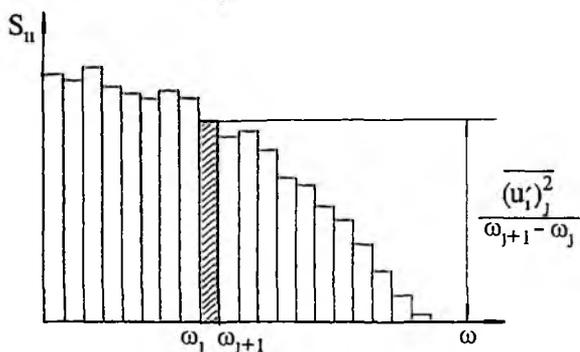


Рис. 19.10. Построение функции спектральной плотности “фильтрованием” тахограмм

С помощью соответствующей аппаратуры легко измерить среднее-квадратическое значение j -го колебательного процесса $\overline{(u'_1)_j^2}$. Разделим эту величину на ширину полосы частот j -го фильтра и отложим полученную величину по вертикали на рис. 19.10. Пропустив сигнал $u_1(t)$ через все n фильтров и выполнив соответствующие построения, получаем ступенчатую функцию, которая и представляет собой $S_{11}(\omega)$, так как она указывает на распределение энергии по частотам, а вся площадь под ступенчатым графиком равна $\overline{u_1'^2}$, потому что

$$\sum_{j=1}^n \frac{(u'_1)_j^2}{(\omega_{j+1} - \omega_j)} (\omega_{j+1} - \omega_j) = \sum_{j=1}^n \overline{(u'_1)_j^2} = \overline{u_1'^2}.$$

Следует указать, что процесс фильтрования электрического напряжения и построения функции спектральной плотности в настоящее время осуществляется предназначенным для этой цели специальным прибором, называемым *анализатором спектра*.