

ОСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА

17.1. Простейшее решение уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнений Навье—Стокса)

Уравнения движения вязкой жидкости (14.34) были получены в гл. 14 на основе закона изменения количества движения, который записывается для напряжений, действующих в жидкости, и дополняется обобщенным законом Ньютона, устанавливающим линейную зависимость между тензором напряжений и девиатором тензора скорости деформации. Для несжимаемой жидкости систему трех уравнений Навье—Стокса для трех проекций скорости $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ представим в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i, \quad (17.1)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ — вектор плотности распределения внешней массовой силы, действующей на жидкость; p — гидродинамическое давление; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости; Δ — оператор Лапласа; $\alpha, i = 1, 2, 3$. Здесь и далее используем для сокращения записи правило суммирования по дважды повторяющемуся в одночленных выражениях целочисленному индексу от 1 до 3. Согласно этому правилу

$$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3},$$

а уравнение несжимаемости для жидкости будет иметь вид

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \right). \quad (17.2)$$

Укажем дополнительно, что оператор Лапласа согласно этому правилу можно представить в виде

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}. \quad (17.3)$$

Система из четырех уравнений (три уравнения Навье—Стокса и уравнение неразрывности) содержит четыре неизвестные величины (u_1, u_2, u_3, p) и поэтому является замкнутой. Обычно полагают, что при задании соответствующих граничных и начальных условий, решая эту систему, можно найти указанные неизвестные. При этом теоретически существует принципиальная возможность найти поля мгновенных местных скоростей и давлений в жидкости, хотя при рассмотрении турбулентного движения жидкости такие решения могут оказаться малопригодными для практического использования.

Для выяснения эффективности уравнений (17.1) и (17.2) для описания и анализа турбулентного движения оценим основные упрощения и допущения, которые делают при решении уравнений (17.1) в случае простейшей плоской задачи о ламинарном течении в трубе с параллельными стенками (течение Пуазейля).

Расположим оси координат так, как показано на рис. 17.1; ось x_2 перпендикулярна плоскости $x_1 0 x_3$; будем считать, что все параметры потока не зависят от координаты x_2 и проекция скорости на ось x_2 равна нулю. При турбулентном течении жидкости поле мгновенной местной скорости всегда трехмерное, плоских турбулентных потоков не существует; поэтому, ограничившись решением *плоской* задачи, уже не следует рассчитывать, что с помощью упрощенной соответствующим образом системы (17.1) удастся описать турбулентное движение жидкости.

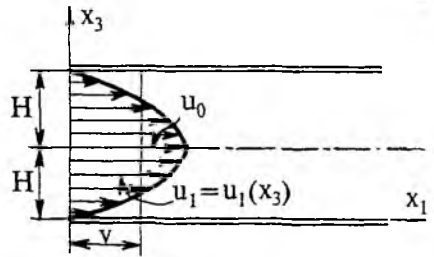


Рис. 17.1. Распределение скорости в плоском потоке при ламинарном режиме движения жидкости

Проанализируем допущения и ограничения, которые обычно делают для решения уравнений движения

1. Рассмотрим установившееся движение, т.е. полагаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.4)$$

Это предположение по существу исключает из рассмотрения решения, отвечающие турбулентным течениям, которые как раз и характеризуются невыполнением равенства (17.4).

2. Считаем, что

$$u_1 = u_1(x_3), \quad u_3 = 0. \quad (17.5)$$

Вводя это ограничение, исключаем из рассмотрения, в частности, течения, характеризующиеся волнообразными линиями тока (с амплитудой волны, равной нулю у стенки).

3. Из внешних массовых сил принимаем во внимание лишь силу тяжести, т.е.

$$f_1 = 0; \quad f_2 = 0; \quad f_3 = -g. \quad (17.6)$$

Используя указанные допущения, из системы (17.1) можно получить два уравнения:

$$\text{при } i = 1 \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2 u_1}{dx_3^2}; \quad (17.7)$$

$$\text{при } i = 3 \quad 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (17.8)$$

Вследствие того, что решается плоская задача, второе уравнение системы (17.1) при $i = 2$ обращается в тождество. В тождество обращается также и уравнение несжимаемости.

Из уравнения (17.8) следует гидростатический закон распределения давления в поперечном сечении потока:

$$p = p_0(x_1) - \rho g x_3, \quad (17.9)$$

где $p_0(x_1)$ — давление при $x_3 = 0$ в точке с координатой x_1 .

Поскольку поле скорости однородно вдоль оси x_1 , а распределение давления подчиняется зависимости (17.9), то величина $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ постоянна для всего потока. С учетом этого обстоятельства решение уравнения (17.7) при выполнении граничных условий прилипания на стенках

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(2H) = 0 \quad (17.10)$$

имеет вид

$$u_1 = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} \cdot (x_3^2 - 2Hx_3). \quad (17.11)$$

Сформулируем два вспомогательных положения, назвав их *леммами*.

Лемма 1. При установившемся продольно-однородном течении (не обязательно плоском), когда $u_1 = u_1(x_2, x_3)$, $u_2 = u_3 = 0$, вязкие нормальные напряжения, действующие на поверхности поперечного сечения, равны нулю: $p_{11}^a = 2\eta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$. Полные нормальные напряжения на этой поверхности (см. (14.26)) равны по абсолютной величине гидродинамическому давлению

$$p_{11} = p_{11}^a - p = -p.$$

Лемма 2. Согласно выражению (17.8) в поперечных сечениях потоков жидкости гидродинамическое давление в поле силы тяжести распределяется по гидростатическому закону, если движение параллельно струйное.

Эти леммы приведены без специального обоснования в разд. 5.1 и использованы в разд. 5.4, 5.9, 5.14, 11.2.

Попытки решить систему (17.1) без введения упрощающих допущений (17.4) и (17.5) приводят к весьма значительным математическим трудностям, большинство из которых до настоящего времени оказались непреодолимыми, хотя и теперь уже имеются определенные успехи, связанные с использованием современных вычислительных средств. В то же время, как отмечалось выше, использование этих допущений исключает возможность исследования турбулентности на основе непосредственного решения уравнений (17.1). Поэтому теоретические исследования турбулентности получили развитие на основе использования модели Рейнольдса—Буссинеска. Выделив практически интересные, измеримые характеристики турбулентных потоков (такие, как осредненная скорость, характерные пульсационная скорость и частота пульсаций (см. разд. 5.10)), используя систему (17.1), получают и анализируют уравнения для этих характеристик.

Наиболее важная характеристика турбулентного потока — осредненная скорость. Этой величине уделяется основное внимание и при теоретических и при экспериментальных исследованиях. Поэтому в первую очередь обратимся к выводу уравнений для осредненной скорости, которые обычно называются уравнениями Рейнольдса.

17.2. Уравнения Рейнольдса

Получить уравнения для осредненной скорости из системы уравнений (17.1) можно, преобразовав систему с помощью тождества

$$\frac{\partial(u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = u_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}; \quad i, \alpha = 1, 2, 3, \quad (17.12)$$

при выводе которого использовалось уравнение несжимаемости (17.2). Кроме того, оператор Лапласа запишем, воспользовавшись правилом суммирования по повторяющемуся индексу (см. (17.3)). В результате представим (17.1) в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2}. \quad (17.13)$$

Наша цель — получение уравнения для осредненной скорости в общем случае неустановившегося движения. Поэтому не будем пользоваться определениями осредненной скорости и давления в виде (5.74) и (5.75), так как они пригодны лишь для установившегося движения. Следуя Рейнольдсу, будем полагать, что существует некоторый оператор осреднения актуальных характеристик, свойства которого выясняются в процессе вывода уравнений. Эти свойства, известные под названием “*правил осреднения Рейнольдса*”, будут сформулированы далее для двух величин — φ и ψ .

Операцию осреднения, как и ранее, обозначаем с помощью горизонтальной черты над символом осредняемой величины; таким образом,

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'; \quad \psi = \bar{\psi} + \psi', \quad (17.14)$$

где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ — осредненные, а φ' и ψ' — пульсационные составляющие величин φ и ψ . Для общности предполагаем, что внешняя массовая сила также является изменяющейся во времени величиной и плотность ее распределения \mathbf{f} также может быть представлена в виде суммы осредненной $\bar{\mathbf{f}}$ и пульсационной \mathbf{f}' составляющих.

Приступим к выводу уравнений Рейнольдса. Поскольку левая и правая части уравнений (17.13) равны во все моменты времени, то, следовательно, их осредненные значения также равны между собой.

Первое правило осреднения запишем в виде

$$(I) \quad \overline{\varphi + \psi} = \bar{\varphi} + \bar{\psi}.$$

Воспользовавшись им, из (17.13) получим

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha}} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2}}. \quad (17.15)$$

Три последующих правила:

$$(II) \quad \overline{c} = c, \quad \text{если } c = \text{const};$$

$$(III) \quad \overline{c\varphi} = c\bar{\varphi}, \quad \text{если } c = \text{const};$$

$$(IV) \quad \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}; \quad \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}.$$

Используя эти правила, из (17.15) получим

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i u_\alpha})}{\partial x_\alpha} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_\alpha^2}. \quad (17.16)$$

В уравнении (17.16) все члены, кроме второго слагаемого в левой части, содержат осредненные значения скорости и давления. При преобразовании этого слагаемого потребуется еще одно правило осреднения:

$$(Y) \quad \overline{\varphi \psi} = \bar{\varphi} \bar{\psi}.$$

Выделим из выражения $\overline{u_i u_\alpha}$ осредненные скорости:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_\alpha} &= \overline{(u_i + u'_i)(u_\alpha + u'_\alpha)} = \overline{u_i u_\alpha + u'_i u_\alpha + u_i u'_\alpha + u'_i u'_\alpha} = \\ &= \overline{u_i u_\alpha} + \overline{u'_i u_\alpha} + \overline{u_i u'_\alpha} + \overline{u'_i u'_\alpha} = \bar{u}_i \bar{u}_\alpha + \overline{u'_i u'_\alpha}; \end{aligned}$$

здесь было использовано равенство $\overline{u'_i} = 0$ (см. (5.77)).

Подставив этот результат в (17.16), получим

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{u}_i \bar{u}_\alpha + \overline{u'_i u'_\alpha}) = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_\alpha^2}. \quad (17.17)$$

В дополнение к трем уравнениям (17.17), используя правила (I) и (IV), из уравнений несжимаемости (17.2) легко получить уравнение несжимаемости для осредненной скорости:

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (17.18)$$

Систему (17.17) преобразуем, применяя тождество (17.12) и переносим в правую часть члены, содержащие пульсационные скорости. В результате получаем *систему трех уравнений Рейнольдса*:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \rho \overline{u'_i u'_\alpha} \right); \quad i, \alpha = 1, 2, 3. \quad (17.19)$$

Рассматривая полученную систему четырех уравнений (три уравнения Рейнольдса (17.19) и уравнение несжимаемости (17.18)) и сравнивая ее с системой четырех исходных уравнений (три уравнения Навье—Стокса (17.1) и уравнение несжимаемости (17.2)), отметим следующее.

1. Исходная система четырех уравнений была замкнутой, так как она содержала четыре неизвестные величины (u_1, u_2, u_3, p) . Полученная система четырех уравнений содержит десять неизвестных величин $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{p}, \overline{u_1'^2}, \overline{u_1' u_2'}, \overline{u_1' u_3'}, \overline{u_2'^2}, \overline{u_2' u_3'}, \overline{u_3'^2})$. В связи с этим возникает проблема *замыкания системы уравнений Рейнольдса*, т.е. присоединения к этой системе таких уравнений, в которых устанавливаются дополнительные зависимости между перечисленными неизвестными величинами.

2. Весьма неожиданным и парадоксальным на первый взгляд представляется тот факт, что система уравнений относительно осредненных

характеристик оказалась более сложной, чем исходная система уравнений (17.1) и (17.2). Естественно было, казалось бы, для определения такой частной интегральной характеристики, какой является осредненная скорость, получить более простые уравнения.

Может создаться впечатление, что если до сих пор оказалось невозможным преодолеть математические трудности при решении уравнений Навье—Стокса, так какой же смысл пользоваться еще более сложными уравнениями для определения лишь одной частной характеристики турбулентного потока — осредненной скорости. Основным доводом в пользу

уравнений Рейнольдса является то, что локальное ускорение $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$, входящее в левую часть, порождается нестационарными граничными условиями, и, если положить $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$, то можно рассматривать уравнения Рейнольдса при стационарных граничных условиях, которые будут описывать поле осредненной скорости при *турбулентном* режиме движения.

Как было отмечено в разд. 17.1, если положить в уравнениях Навье—Стокса $\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$, то этим самым турбулентные течения вообще из рассмотрения исключаются. Другими словами, чтобы найти поле осредненной скорости для установившегося турбулентного движения жидкости (которое может иметь место при неизменных во времени граничных условиях) с помощью уравнений Навье—Стокса, необходимо искать не-

стационарное решение этих уравнений, т.е. исходить из того, что $\frac{\partial u_i}{\partial t} \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$). Осредняя во времени полученное нестационарное решение, можно найти интересующее нас стационарное поле осредненной скорости. Это сложный, практически невозможный в настоящее время путь решения задачи (в строгой и полной постановке).

Решая ту же задачу с помощью уравнений Рейнольдса, можно положить $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$ и искать *стационарное* решение этих уравнений, которое и определит поле осредненных скоростей. Это несравненно более простая математическая задача.

3. Перенос слагаемых $\overline{u'_i u'_\alpha}$ из левой части уравнений, где содержатся члены, выражающие ускорения, в правую часть, где содержатся члены, выражающие действующие на жидкость силы, и присоединение этих слагаемых к вязким напряжениям является предпосылкой к трактовке этих слагаемых как динамических характеристик, т.е. некоторых дополнительных напряжений, действующих в осредненном потоке. Слагаемые $\overline{\rho u'_i u'_\alpha}$ образуют, как и напряжения, симметричный тензор второго ранга и называются *турбулентными напряжениями* или *напряжениями Рейнольдса*. Обозначим эти напряжения через $p_{i\alpha}^T = -\rho \overline{u'_i u'_\alpha}$, где индекс “Т” указывает, что эти напряжения турбулентные, т.е. являются характеристикой осредненного потока. Отметим, что при $i = \alpha$ напряжение $p_{\alpha\alpha}^T$ — это нормальное напряжение на площадке, перпендику-

лярной оси x_α , а при $i \neq \alpha$ напряжение $p_{i\alpha}^T$ — касательное напряжение, которое действует на площадку, перпендикулярную оси x_i , и направлено параллельно оси x_α .

4. Если рассматривать установившееся турбулентное движение, то вместо правил осреднения Рейнольдса (I)—(Y) можно ввести осредненную характеристику с помощью интеграла

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) dt, \quad (17.20)$$

где T — период осреднения, который должен быть достаточно большим, чтобы осредненное значение $\bar{\varphi}$ от него не зависело.

В этом случае указанные правила (за исключением второго правила из IV) можно получить из зависимости (17.20) (они являются следствиями линейности этой зависимости). Очевидно, что использование осреднения согласно (17.20) — более сильное ограничение, чем использование правил (I)—(Y). Действительно, применяя (I)—(Y), можно получить уравнения Рейнольдса для *нестационарных* турбулентных потоков, в то время как на основе (17.20) можно получить лишь уравнения для *стационарных* турбулентных потоков.

5. В уравнения Рейнольдса наряду с осредненными скоростью и давлением входят также и такие важные характеристики турбулентности, как, например, среднеквадратичные значения пульсационных скоростей. Как было отмечено ранее, изучение таких характеристик само по себе представляется важным аспектом теории турбулентности.

17.3. Проблема замыкания уравнений Рейнольдса.

Цепочка уравнений Келлера—Фридмана. Уравнение баланса энергии

Предложение о замыкании системы уравнений Рейнольдса с помощью только уравнений Навье—Стокса и уравнения неразрывности (без привлечения дополнительных сведений экспериментального и теоретического характера) было сделано Л.В.Келлером и А.А.Фридманом. Они разработали общий метод составления уравнений для осредненных значений гидромеханических характеристик потока. Проиллюстрируем этот метод на частном примере получения уравнений для осредненных произведений пар пульсационных скоростей $\overline{u'_i u'_j}$ (т.е. для турбулентных напряжений), которые входят в уравнение Рейнольдса

Подставим выражение для $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ и $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ из уравнений Навье—Стокса (17.1) в очевидное равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i u_j = \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (17.21)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\rho u_i u_j u_\alpha + p (u_i \delta_{j\alpha} + u_j \delta_{i\alpha}) - (u_i \sigma_{j\alpha} + u_j \sigma_{i\alpha}) \right] = \\ = (\rho u_i f_j + \rho u_j f_i) + \frac{p \sigma_v}{\eta} - \left(\sigma_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \sigma_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (17.22)$$

где $\sigma_{ij} = p_{ij}^* = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — выражение тензора вязких напряжений в

соответствии с обобщенным законом Ньютона (14.29) для несжимаемой жидкости; δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Если в тождество, аналогичное (17.21), но записанное для осредненных скоростей, подставить частные производные по времени от осредненной скорости из уравнений Рейнольдса, то получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{\rho u_i \bar{u}_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\overline{\rho u_i \bar{u}_j \bar{u}_\alpha} + \overline{\rho u_i' u_\alpha' \bar{u}_j} + \overline{\rho u_j' u_\alpha' \bar{u}_i} + \bar{p} (\bar{u}_i \delta_{j\alpha} + \bar{u}_j \delta_{i\alpha}) - (\bar{u}_i \bar{\sigma}_{j\alpha} + \bar{u}_j \bar{\sigma}_{i\alpha}) \right] = \\ & = \left(\overline{\rho u_i \bar{f}_i} + \overline{\rho u_j \bar{f}_j} \right) + \frac{\overline{p \sigma_{ij}}}{\eta} - \left(\bar{\sigma}_{i\alpha} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \bar{\sigma}_{j\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right) + \left(\overline{\rho u_i' u_\alpha'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho u_j' u_\alpha'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (17.23)$$

Осредним все члены уравнения (17.22) с помощью правил осреднения Рейнольдса и вычтем из него почленно уравнение (17.23), в результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{\rho u_i' u_j'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\overline{\rho u_i' u_j' \bar{u}_\alpha} + \overline{\rho u_i' u_j' u_\alpha'} + (\overline{p' u_i'} \delta_{j\alpha} + \overline{p' u_j'} \delta_{i\alpha}) - (\overline{u_i' \sigma'_{j\alpha}} + \overline{u_j' \sigma'_{i\alpha}}) \right] = \\ & = \overline{\rho u_i' f_j'} + \overline{\rho u_j' f_i'} + \frac{\overline{p' \sigma'_{ij}}}{\eta} - \left(\overline{\sigma'_{i\alpha}} \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial x_\alpha} + \overline{\sigma'_{j\alpha}} \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_\alpha} \right) - \left(\overline{\rho u_i' u_\alpha'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho u_j' u_\alpha'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (17.24)$$

Уравнения (17.24) и есть *уравнения для турбулентных напряжений*. В них наряду с осредненными скоростями и давлениями входит целый ряд новых неизвестных величин, например $\overline{p' u_i'}$, $\overline{u_i' u_j' u_\alpha'}$ и т.п.

Основное содержание предложения Келлера и Фридмана можно сформулировать следующим образом. На первом этапе, осредняя уравнения Навье—Стокса, получаем для определения осредненных скоростей уравнения Рейнольдса. Эти уравнения незамкнуты, так как в них входят неизвестные нам осредненные величины произведений $\overline{\rho u_i' u_j'}$ — турбулентные напряжения. На втором этапе, записав тождество и исключив из него производные по времени с помощью уравнений Навье—Стокса, осредняем все члены этого уравнения и получаем систему уравнений для турбулентных напряжений $\overline{\rho u_i' u_j'}$. В эти уравнения наряду с осредненными скоростями и давлениями входит целый ряд новых неизвестных величин типа $\overline{u_i' u_j' u_\alpha'}$. Число неизвестных величин в системе, содержащей уравнения Рейнольдса и уравнения для турбулентных напряжений, опять оказывается больше числа уравнений этой системы. На третьем этапе, осредняя соответствующие тождества и используя уравнения Навье—Стокса, можно получить уравнения для величин типа $\overline{u_i' u_j' u_\alpha'}$; в этих уравнениях обнаружатся новые неизвестные и т.д.

Получаемые таким способом системы уравнений называются *цепочкой уравнений Келлера—Фридмана*. Эта цепочка характеризуется тем, что, с одной стороны, является теоретически совершенно точной, не

включающей в себя иных зависимостей или гипотез за исключением уравнений Навье—Стокса и правил осреднения Рейнольдса, а с другой стороны, на каждом этапе построения система уравнений оказывается незамкнутой.

Если в уравнениях (17.24) положить $i = j$, то получаются три уравнения для осредненных величин значений проекций пульсационной скорости $\overline{u_1'^2}$, $\overline{u_2'^2}$ и $\overline{u_3'^2}$, которые являются важной характеристикой турбулентности. Если сложить почленно эти три уравнения, то получится уравнение для осредненного значения величины

$\overline{\rho u_1'^2} = \rho(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})$. Эту величину, умноженную на $1/2$, можно интерпретировать как *плотность кинетической энергии пульсационного движения* $k_t = \frac{\overline{\rho u_1'^2}}{2}$, которую для краткости будем именовать турбулентной энергией. Введя такое обозначение, запишем для него уравнение, которое часто называют *уравнением баланса турбулентной энергии*:

$$\frac{\partial k_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_t \bar{u}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \overline{p' u'_\alpha} - \overline{u'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}} \right) = \quad (17.25)$$

$$= \overline{\rho u'_\alpha f'_\alpha} - \overline{\rho \varepsilon_t} - \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha},$$

где $\overline{\rho \varepsilon_t} = \overline{\sigma'_{\alpha\beta} \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}} = \frac{\eta}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left[\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha} \right]^2$ — средняя удельная вязкая диссипация энергии пульсационного движения. В левой части уравнений (17.25) в скобках содержатся выражения, представляющие собой плотность потока турбулентной энергии, обусловленного переносом этой энергии осредненным течением, пульсациями давления, молекулярной вязкостью и пульсациями скорости. Первое слагаемое в правой части представляет собой работу пульсаций внешней силы (если таковые имеются); содержание последнего слагаемого будет рассмотрено в связи с уравнением для плотности кинетической энергии осредненного движения жидкости.

Из уравнения (17.23) аналогичным образом, т.е. приняв $i = j$ и просуммировав три полученных уравнения, получим уравнение для $k_s = \frac{1}{2} \rho \bar{u}_\beta \bar{u}_\beta = \frac{1}{2} \rho (\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2)$, т.е. для *плотности кинетической энергии осредненного движения*:

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_s \bar{u}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta \bar{u}_\beta} + \overline{p \bar{u}_\alpha} - \overline{\bar{u}_\beta \sigma_{\alpha\beta}} \right) = \overline{\rho \bar{u}_\alpha \bar{f}_\alpha} - \overline{\rho \varepsilon_s} + \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (17.26)$$

где $\overline{\rho \varepsilon_s} = \overline{\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}} = \frac{\eta}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2$ — удельная диссипация энергии осредненного движения под действием молекулярной вязкости.

В скобках в левой части уравнения (17.26) содержатся выражения, представляющие собой плотность потока энергии осредненного движе-

ния, обусловленного переносом с осредненной скоростью, работой сил осредненного давления, молекулярной вязкостью, а также работой фиктивных сил “турбулентной вязкости” (четвертое слагаемое). Первое слагаемое в правой части представляет собой работу осредненной объемной силы. Последнее слагаемое

$$\rho u'_\alpha u'_\beta \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} = -P_{\alpha\beta}^T \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \quad (17.27)$$

представляет собой изменение плотности энергии осредненного движения вследствие превращения этой энергии в энергию пульсационного движения, т.е. в турбулентную энергию (или, наоборот, превращение турбулентной энергии в энергию осредненного движения). Это подтверждается тем, что в уравнение турбулентной энергии (17.25) выражение (17.27) входит в правую часть со знаком минус.

Несмотря на то, что система уравнений, включающая уравнения Рейнольдса и уравнения баланса турбулентной энергии, является незамкнутой, анализ ее позволяет получить полезные качественные результаты. Впервые такой анализ был выполнен А.Н.Колмогоровым.

Как видно из изложенного, получить теоретически (только из уравнений Навье—Стокса без дополнительных допущений) замкнутую систему уравнений для описания осредненных скоростей или среднеквадратичных значений пульсационных скоростей не представляется возможным (по крайней мере, в настоящее время). Поэтому системы уравнений для осредненных характеристик приходится замыкать, привлекая дополнительные зависимости, основанные на экспериментальных данных, аналогиях, интуитивных представлениях о природе турбулентных течений и т.п.

Теории, построенные с использованием подобного рода замыканий, получили название *полуэмпирических теорий турбулентности*. Наиболее разработаны методы замыкания уравнений Рейнольдса; здесь следует выделить основополагающие работы Тейлора, Прандтля и Кармана. В последние годы большое внимание уделяется вопросам замыкания системы уравнений, получаемых на втором и третьем этапах построения “цепочки уравнений Келлера—Фридмана”. Здесь следует отметить так называемые К-модель и К-ε модели турбулентности, используемые при численном моделировании турбулентных течений.

Прежде чем рассматривать полуэмпирические теории турбулентности, в которых содержатся предложения по замыканию уравнений Рейнольдса, приведем дополнительные пояснения понятия турбулентных (Рейнольдсовых) напряжений.

17.4. Турбулентные касательные напряжения в пристеночном плоском продольно-однородном потоке

Рассмотрим установившееся турбулентное течение вблизи плоской стенки. Расположим оси координат так, как указано на рис. 17.2. Движение считаем однородным вдоль оси x_2 , перпендикулярной плос-

кости $x_1 0x_3$ (плоский поток), и вдоль течения (продольно-однородный поток). При этом единственная отличная от нуля проекция осредненной скорости \bar{u}_1 зависит только от координаты x_3 . Выделим плоскостями тока (осредненными) три слоя одинаковой толщины ℓ , достаточно малой, чтобы можно было считать, что

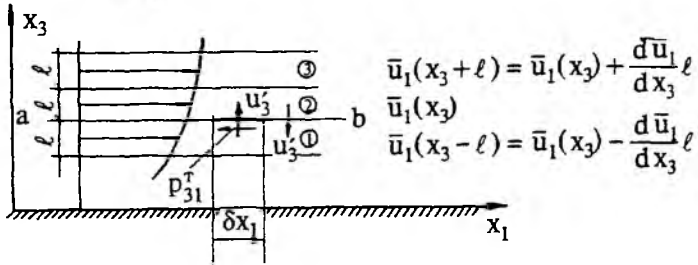
$$\bar{u}_1(x_3 \pm \ell) = \bar{u}_1(x_3) \pm \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \ell.$$


Рис. 17.2. Интерпретация турбулентных касательных напряжений

Рассматривая осредненную модель турбулентного потока, исключаем пульсационные скорости и, следовательно, исключаем поперечный перенос массы жидкости, а если $\bar{u}_1 \neq \text{const}$, то исключается и поперечный перенос количества движения, обусловленный пульсацией скорости, который в значительной мере определяет распределение осредненной скорости. Для того чтобы компенсировать пренебрежение переносом, обусловленным пульсациями скорости, в осредненную модель вводят указанные ранее дополнительные касательные напряжения. При этом можно воспользоваться следующими соображениями. Выделим на рис. 17.2 в плоскости тока ab прямоугольную площадку небольших размеров $\delta x_1 \delta x_2$. За малый промежуток времени dt через эту площадку из слоя 1 в слой 2 будет перетекать (в действительном турбулентном потоке, где имеется поперечная пульсационная скорость $u'_3(t)$) элемент объема жидкости ΔV , равный $\Delta V = u'_3(t) \delta x_1 \delta x_2 dt$. Этот объем будет иметь продольную скорость, равную приблизительно $\bar{u}_1(x_3 - \ell)$. В слое 2 этот объем (в момент перехода) имеет скорость, меньшую, чем скорости объемов, принадлежащих слою 2. Если фиксировать мгновенные скорости в слое 2, то при попадании на датчик скорости указанного элемента объема обнаружится временное уменьшение продольной скорости, т.е. продольная пульсационная скорость

$$u'_1(t) = \bar{u}_1(x_3 - \ell) - \bar{u}_1(x_3). \quad (17.28)$$

Если считать, что объем ΔV вытесняет равный ему объем из слоя 2 (в слой 3 или в слой 1), то количество движения слоя 2 уменьшится на величину

$$\Delta K_D = -\rho \Delta V u'_1(t) = -\rho u'_1(t) u'_3(t) \delta x_1 \delta x_2 dt.$$

Изменение количества движения в турбулентном потоке в модели осредненного движения (ΔK_D) компенсируется равным ему по величине им-

импульсом силы (ИС), действующим по площадке $\delta x_1 \delta x_2$ со стороны слоя 1 на слой 2. Считая, что площадка мала, а касательные напряжения на ней изменяются незначительно, запишем $ИС = p_{31}(t) \delta x_1 \delta x_2 dt$.

Приравняем эти величины и проведем осреднение по времени (движение установившееся, поэтому можно воспользоваться временным осреднением типа (17.20)):

$$-\int_{t_0}^{t_0+T} \rho u'_1(t) u'_3(t) \delta x_1 \delta x_2 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} p_{31}(t) \delta x_1 \delta x_2 dt.$$

Сократив полученное выражение на $\delta x_1 \delta x_2$, получим

$$\bar{p}_{31} \equiv \bar{p}_{31}^T = -\overline{\rho u'_1 u'_3}. \quad (17.29)$$

Это выражение для \bar{p}_{31}^T совпадает с соответствующим элементом тензора турбулентных напряжений, полученного ранее.

Приравняв количество движения, передающееся от слоя 1 слою 2, импульсу сил, предполагали, что элементарный объем ΔV передал полностью это количество движения, перемешавшись с другими элементами слоя 2 и став неотличимым от них. Это предположение накладывает дополнительное ограничение на величину ℓ , согласно которому ℓ — это путь по оси x_3 , который должен пройти элементарный жидкий объем, чтобы, выйдя из одного слоя, полностью смешаться с другим слоем и передать ему свой импульс.

Это понятие, впервые введенное Дж.Тейлором при рассмотрении переноса тепла в результате турбулентного перемешивания воздуха в приземном слое атмосферы, впоследствии широко и плодотворно использовалось Прандтлем в созданной им теории переноса импульса в турбулентном потоке. Величину ℓ называют *длиной пути перемешивания*. В турбулентном потоке он был использован в какой-то мере с целью установления аналогии между турбулентным движением и тепловым движением молекул газа, чтобы использовать хорошо разработанный аппарат молекулярно-кинетической теории газов. Однако эта аналогия оказалась не столь эффективна, так как длина пути перемешивания, как выяснилось, не может быть непосредственно измерена, она зависит от координат, обстоятельств течения и целого ряда других факторов. Сейчас большинство вопросов, связанных с турбулентными потоками, можно решить, не используя этого понятия. В то же время, рассматривая полуэмпирические теории турбулентности, целесообразно и поучительно наряду с кратким современным изложением этих теорий познакомиться с рассуждениями, которые привели их создателей к наиболее важным результатам.