фильтрации воды в нем. Величину q здесь определяем предварительно по той же формуле (17-143), подставив в нее вместо x величину L (см. рис. 17-49) и вместо h величину h_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

17-1. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.— М.: Гостехиздат, 1953.

17-2. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений.— М.: Госстройиздат, 1955.

17-3. **Ведерников В. В.** Фильтрация из каналов.— М.— Л.: Госстройиздат, 1934.

17-4. **Дренаж сельскохозяйственных земель**/Под ред. Д. Н. Лютина. Пер. с англ. под ред. С. Ф. Аверьянова.— М.: Колос, 1964.

17-5. **Избаш С. В., Халдре Х. Ю.** Гидравлика перекрытия русел.— М.— Л.: Госэнергоиздат, 1959.

17-6. **Павловский Н. Н.** Собрание сочинений, Т. II.— М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

17-7. **Павловская Л. Н., Шестаков В. М.** Методические указания по фильтрационным расчетам водопонизительных установок.— М.— Л.: Госэнергоиздат, 1961.

17-8. **Справочное руководство** гидрогеолога.— Л.: Гостоптехиздат, 1959.

17-9. **Чарный И. А.** Основы подземной гидравлики.— М.: Гостехиздат, 1956.

17-10. **Чугаев Р. Р.** Земляные гидротехнические сооружения: (теоретические основы расчета).— Л.: Энергия, 1967.

17-11. **Чугаев Р. Р.** Подземный контур гидротехнических сооружений: (проектирование подземных частей плотин на нескальном основании).— Л.: Энергия, 1974.

17-12. **Чугаев Р. Р.** Гидротехнические сооружения: Глухие плотины.— Л.: Высшая школа, 1975.

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

РЕЗКО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ УСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

§ 18-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Будем рассматривать движение грунтовых вод: ламинарное, подчиняющееся закону Дарси; установившееся; напорное; неравномерное резко изменяющееся, т. е. характеризуемое наличием криволинейных живых сечений.

Рис. 18-1. Напорный фильтрационный поток в основании бетонной плотины

Такая фильтрация имеет место, например, в основании бетонных плотин, расположенных на нескальном грунте. Представим на рис. 18-1 поперечное сечение плотины. Поверхность водоупора здесь показана линией $D-D$. Линия $1-2-3-4-5-6-7$, ограничивающая снизу водонепроницаемые части сооружения, называется **п о д з е м н ы м   к о н т у р о м** сооружения.

Для увеличения длины подземного контура под плотиной устраивают свайный шпунтовый ряд (**ш п у н т**)[1], а перед плотиной — так называемый

[1] На рис. 18-1 показан один шпунт. В практике встречаются случаи, когда под плотиной делают два шпунта (в точках *3* и *6*) или три (в точках *2*, *3* и *6*).

понур, обычно представляющий собой относительно тонкий водонепроницаемый слой бетона и т. п.

Величина Z (см. чертеж) называется напором на сооружении: Z представляет собой разность отметок горизонтов воды верхнего и нижнего бьефов. При отсутствии воды в нижнем бьефе величина Z является превышением горизонта воды верхнего бьефа над дном нижнего бьефа

Под действием напора на сооружении Z вода фильтрует через дно верхнего бьефа, движется под сооружением и выходит наружу через дно нижнего бьефа (см. стрелки на чертеже). В этом случае получаем напорный фильтрационный поток, ограниченный сверху водонепроницаемой поверхностью $1-2-\ldots-7$; свободной поверхности рассматриваемый поток не имеет. Линии тока (см. например, линию $a-b-c$) здесь криволинейны; ортогональные к ним живые сечения также криволинейны. В связи с этим и получается резко изменяющееся движение воды. Поэтому пользоваться здесь понятием средней скорости v нельзя.

Изучение такого фильтрационного потока необходимо в связи с проектированием подземного контура плотины. Вообще говоря, фильтрация воды под сооружением порождает следующие обстоятельства, которые должны учитываться при проектировании подземного контура:

1) вода, омывающая плотину снизу, оказывает давление W на ее подошву (см. чертеж); сила W давления воды, действующего на плотину снизу, называется противодавлением. Для статического расчета плотины необходимо знать величину W;

2) фильтрация обусловливает потери воды из верхнего бьефа; в связи с этим возникает вопрос о величине этих потерь, т. е. о величине фильтрационного расхода Q;

3) в основании плотины получаются некоторые скорости фильтрации u. Если эти скорости в том или другом месте основания оказываются большими, чем допускаемые, то при этом может возникнуть так называемая суффозия грунта (размыв грунта фильтрационным потоком). В связи со сказанным необходимо знать скорость u в разных точках основания;

4) фильтрационный поток, пронизывая грунт основания, стремится сдвинуть этот грунт в сторону нижнего бьефа. Очевидно, при статическом расчете основания плотины необходимо знать сдвигающую силу, развиваемую потоком. Эта сдвигающая сила зависит от величины пьезометрических уклонов J в разных точках основания.

Проектирование подземного контура с учетом перечисленных обстоятельств изучается в курсе «Гидротехнические сооружения». При этом задача гидравлического расчета ставится следующим образом:

даны: а) подземный контур сооружения, б) напор на сооружении Z, в) область фильтрации; ее размеры и коэффициент фильтрации k;

требуется найти величины: W, Q, а также u и J (для разных точек основания).

Поскольку в данном случае имеется резко изменяющееся движение воды, то решение указанного вопроса усложняется. Для полного решения его приходится отказываться от обычных гидравлических приемов и переходить к особым гидравлическим методам, основанным на использовании методов математической гидромеханики.

Решение задачи о напорной резко изменяющейся фильтрации на основе методов математической гидромеханики было впервые разработано (в 1920—1922 гг.) Н. Н. Павловским, показавшим, что область фильтрации в основании сооружения следует рассматривать как векторное поле скоростей фильтрации, имеющих некоторую потенциальную функцию (см § 2-4). Ниже мы только в общих чертах поясним исходные позиции этого решения, которое явилось основополагающим в области развития так называемой математической теории фильтрации.

Следует сказать, что ввиду сложности математического решения Н. Н. Павловского оно в практике не применяется. В практике используют иногда только некоторые расчетные графики, построенные на основании указанного решения. Вместе с тем математическое решение Н. Н. Павловского представляет большой научный интерес, поскольку на его основе оказывается возможным разрабатывать широко используемые в практике отмеченные выше гидравлические, а также экспериментальные методы расчета, которые мы ниже кратко осветим.

Далее всюду будем иметь в виду случай изотропного однородного грунта основания плотины ($k = \text{const}$), причем будем рассматривать только плоскую задачу.

§ 18-2. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

Представим на рис. 18-2 некоторое напорное сооружение. Полагаем, что фильтрационный поток, возникающий в основании этого сооружения, может быть заменен сплошной «фильтрующей средой», причем мы имеем возможность пользоваться понятием скорости фильтрации u (см § 17-2).

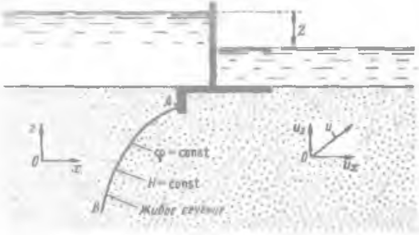

Рис. 18-2 К выводу уравнений (18-5)

Согласно Н. Н Павловскому, считаем, что отмеченная модель «сплошного фильтрационного потока» может рассматриваться в предположении, что здесь мы имеем движение воды:

а) ламинарное, к которому приложима формула Дарси (7-13);

б) потенциальное (безвихревое), имеющее соответствующую потенциальную функцию.[1]

В разных точках основания скорость фильтрации u, вообще говоря, различна как по величине, так и по направлению. В связи с этим обстоятельством область основания можно рассматривать как поле скоростей различной величины и направления. Равным образом и гидромеханическое давление p в разных точках основания в общем случае различно.

[1] Обратим внимание на то, что рассматриваемый здесь случай ламинарного потенциального движения принципиально отличается от рассмотренного ранее случая ламинарного движения жидкости в напорной трубе (§ 4-4), где мы имеем ламинарное вихревое движение

Таким образом, в случае плоской задачи имеем три неизвестные: u_x, u_y, p. Эти величины изменяются при переходе от одной точки основания к другой, т. е.

$$u_x = f_1(x, z); \quad u_z = f_2(x, z); \quad p = f_3(x, z). \tag{18-1}$$

Обозначим напор[1] в точке a через H.

Для данной точки a можно написать:

а) проекция пьезометрического градиента на ось x (пьезометрический уклон вдоль оси x)

$$J_x = -\frac{\partial H}{\partial x}; \tag{18-2}$$

б) проекция пьезометрического градиента на ось z (пьезометрический уклон вдоль оси z)

$$J_z = -\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{18-3}$$

Выше, согласно Дарси, имели

$$u = kJ. \tag{18-4}$$

Учитывая (18-2) – (18-4), можем для компонентов скорости фильтрации в произвольной точке a написать

$$u_x = kJ_x, \quad u_z = kJ_z. \tag{18-5}$$

Подставляя в эти зависимости выражения (18-2) и (18-3), получаем два дифференциальных уравнения; в качестве третьего уравнения используем уравнение несжимаемости жидкости в дифференциальной форме (3-51). В результате для отыскания трех величин u_x, u_z и p получаем следующую систему трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && u_x = -k\frac{\partial H}{\partial x};\\
&(\mathrm{II}) && u_z = -k\frac{\partial H}{\partial z};\\
&(III) && \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18-6}$$

Уравнения (18-6) и называются основными дифференциальными уравнениями установившегося движения грунтовых вод. Эти уравнения и кладутся в основу математического решения Н. Н. Павловского. Обратим внимание, что первые два уравнения системы (18-6) представляют собой, собственно, формулу Дарси, записанную в дифференциальной форме.

§ 18-3. НАПОРНАЯ ФУНКЦИЯ. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ. ЛИНИИ РАВНОГО ПОТЕНЦИАЛА

1. Напорная функция. Известно [см. (17-3)], что в рассматриваемом случае напор H выражается зависимостью

$$\boxed{H = z + \frac{p}{\gamma}}, \tag{18-7}$$

[1] Напомним, что в случае грунтовых вод понятия полного и потенциального напоров совпадают [см. зависимость (17-3)].

Напор H в общем случае неодинаков в разных точках области фильтрации, т. е. H есть функция координат x и z:

$$H = H(x, z). \tag{18-8}$$

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, величину H называют **напорной функцией**.

2°. Потенциал скорости фильтрации. Выше получили основные дифференциальные уравнения движения грунтовых вод (§ 18-2). Для упрощения записи их введем новое обозначение:

$$\boxed{\varphi = -kH.} \tag{18-9}$$

Функция φ так же, как и функция H, зависит только от координат:

$$\varphi = \varphi(x, z). \tag{18-10}$$

Пользуясь обозначением (18-9), два первых дифференциальных уравнения системы (18-6) можно переписать в форме:

$$\boxed{u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};} \tag{18-11}$$

$$\boxed{u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.} \tag{18-12}$$

Из (18-11) и (18-12) видно, что компоненты скорости фильтрации (u_x, u_z) являются частными производными по соответствующим координатам функции φ, зависящей только от координат. Именно поэтому заключаем, что *ламинарное движение грунтовых вод является движением потенциальным (безвихревым), имеющим потенциал скорости* φ *(потенциальную функцию* φ *поля скоростей фильтрации)*, см. § 3-5.

3°. Линии равного потенциала скорости фильтрации. Выше была приведена зависимость (18-10). Рассматривая ее, можно видеть, что уравнение

$$\varphi(x, z) = \text{const} \tag{18-13}$$

дает некоторую кривую, во всех точках которой потенциал скорости одинаков: $\varphi = \text{const}$. Такая кривая называется **линией равного потенциала**, или **эквипотенциалью**.

В пределах области фильтрации можно наметить ряд эквипотенциалей: φ_1, φ_2, φ_3, ..., причем получим семейство эквипотенциальных линий.

Так как φ связана с H зависимостью (18-9), в которой $k = \text{const}$, то ясно, что линии равного значения φ (эквипотенциали) будут в то же самое время и **линиями равного напора** H.

Из (18-11), (18-12) и (18-6) видно, что по течению (по направлению скоростей) величина φ должна увеличиваться, а величина H должна уменьшаться. Поэтому величины φ, выражающие наименование линий $\varphi = \text{const}$, по течению должны увеличиваться ($\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \ldots$); величины же H, выражающие наименование линий $H = \text{const}$ (которые совпадают с линиями $\varphi = \text{const}$), по течению должны уменьшаться ($H_1 > H_2 > H_3 \ldots$).

Легко убедиться, что *эквипотенциали* $\varphi = \text{const}$, *представляющие собой линии равного напора* $H = \text{const}$, *являются в то же время и живыми сечениями* (см. например, линию AB на рис. 18-2).

Действительно, линии равного напора (линии равной удельной энергии) должны характеризоваться тем, что линии тока по отношению к ним, так же как и по отношению к живым сечениям, должны быть *ортогональными*.

Справедливость этого положения легко доказать от противного. Предполагаем, что скорость, которая является касательной к линии тока, не ортогональна к линии $H = \text{const}$. Эту скорость можем разложить на две составляющие: одну — нормальную к линии $H = \text{const}$ и другую — касательную к линии $H = \text{const}$. Очевидно, наличие касательной составляющей скорости показывает, что движение воды происходит частично вдоль линий $H = \text{const}$, что для реальной жидкости в случае установившегося движения невозможно (удельная энергия H потока вдоль течения должна уменьшаться)

§ 18-4. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Учитывая выражение (18-9), систему трех дифференциальных уравнений, полученную в § 18-2, можем переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(I)} && u_x = -k\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x};\\
&\text{(II)} && u_z = -k\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z};\\
&\text{(III)} && \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right| \qquad (18\text{-}14)$$

Задача о резко изменяющемся движении грунтовых вод заключается в совместном решении этих уравнений, выраженных в частных производных

Данные три уравнения можно привести к одному дифференциальному уравнению второго порядка. С этой целью дифференцируем основные уравнения (I) и (II) системы (18-14), соответственно по x и z, при этом получаем

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -k\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}; \qquad (18\text{-}15)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -k\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}. \qquad (18\text{-}16)$$

Далее подставляем (18-15) и (18-16) в уравнение (III) системы (18-14), в результате чего имеем (после сокращения величины k)

$$\underline{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0} \qquad (18\text{-}17)$$

Это соотношение дает зависимость H от координат в дифференциальной форме.

Уравнение вида (18-17) называется уравнением Лапласа.

Как видно в случае движения грунтовых вод напорная функция $H\ (x, z)$ во всех точках области фильтрации должна удовлетворять уравнению Лапласа. Другими словами, во всех точках *области фильтрации сумма вторых частных производных от H по x и по z должна равняться нулю*. Функция, обладающая таким свойством, т. е. удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической функцией. Следовательно, напорная функция $H\ (x, z)$ должна быть гармонической функцией.

Так как H и φ связаны между собой зависимостью (18-9), то уравнение Лапласа (18-17) можно переписать в виде

$$\underline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.} \qquad (18\text{-}18)$$

Отсюда ясно, что потенциал скорости φ также должен быть гармонической функцией.

Математическое решение задачи о резко изменяющейся фильтрации заключается в отыскании такой функции $H(x, z)$ или функции $\varphi(x, z)$, которая бы удовлетворяла уравнению Лапласа, а также особым **граничным условиям**.

§ 18-5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Наметим на уровне дна нижнего бьефа сооружения (рис. 18-3) плоскость сравнения OO. Через d обозначим превышение дна верхнего бьефа над плоскостью сравнения. Начало оси z расположим на уровне плоскости сравнения OO.

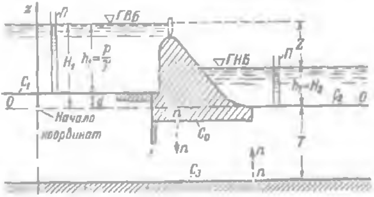

Рис. 18-3. Граничные условия
Границы потока: C_1, C_2, C_3, C_0

Выше было указано, что напорная функция H в каждой точке области фильтрации должна удовлетворять уравнению Лапласа. Выясним теперь, каким **дополнительным** условиям данная функция должна удовлетворять **на границах** области фильтрации.

Границы области фильтрации обозначим следующим образом.

C_1 — линия дна верхнего бьефа, C_2 — линия дна нижнего бьефа; C_3 — поверхность водоупора; иногда величина T, определяющая положение поверхности водоупора (см. чертеж), в расчетной схеме сооружения принимается $T = \infty$; при этом, естественно, граница C_3 исчезает (уходит в бесконечность). C_0 — подземный контур сооружения. Линии C_1, C_2, C_3 и C_0 ограничивают область фильтрации.

Рассмотрим каждую из указанных граничных линий в отдельности.

Линия C_1. Напор во всех точках линии C_1 одинаков и равен

$$H = H_1 = h_1 + d = \text{const}, \tag{18-19}$$

где h_1 — глубина воды в верхнем бьефе.[1]

Таким образом, линия C_1 является **линией равного напора**: $H_1 = \text{const}$ (H_1 — превышение горизонта воды в верхнем бьефе над плоскостью сравнения). Линия C_1 является также входным живым сечением фильтрационного потока.

Линия C_2. Напор во всех точках линии C_2 также одинаков и равен

$$H = H_2 = h_2 = \text{const}, \tag{18-20}$$

где h_2 — глубина воды в нижнем бьефе.

Линия C_2 — **линия равного напора** $H_2 = \text{const}$ (H_2 — превышение горизонта воды нижнего бьефа над плоскостью сравнения). Эта линия кроме того является выходным живым сечением фильтрационного потока.

Линия C_3. Наметим нормаль nn к линии C_3. Обозначим через u_n скорость движения воды вдоль этой нормали. С одной стороны, величину

---

[1] Напомним, что напор в данной точке (например, в точке C_1) представляет собой превышение горизонта воды в пьезометре $П$, присоединенном к рассматриваемой точке над плоскостью сравнения.

скорости u_n можно выразить (согласно Дарси) так:

$$u_n = -k\frac{\partial H}{\partial n}; \tag{18-21}$$

с другой же стороны, учитывая, что линия C_3 является **линией тока** (см. ниже), можем написать, что

$$u_n = 0. \tag{18-22}$$

Сопоставляя (18-22) и (18-21), видим, что для всех точек границы C_3 напорная функция $H(x, y)$ должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0. \tag{18-23}$$

Это условие показывает, что линии равного напора $H = \text{const}$ должны подходить к C_3 **нормально**; только при таком положении будет иметь место равенство (18-23).

Линия C_0. Она является **верхней граничной линией тока**. Проводя в любом месте этой линии нормаль к ней (nn) и рассуждая так же, как и выше, можно показать, что в любой точке линии C_0 должно удовлетворяться условие (18-23).

Следовательно, линии равного напора $H = \text{const}$ должны подходить нормально и к C_0 (к подземному контуру).

§ 18-6. ЛИНИИ ТОКА. ФУНКЦИЯ ТОКА. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТКА

1°. **Дифференциальное уравнение линии тока.** Как известно, при установившемся движении линии тока представляют собой траектории жидких частиц. При этом вектор скорости движения жидкой частицы в любой точке касателен к линии тока, проходящей через эту точку.

Изобразим (рис. 18-4) произвольную линию тока s. Наметим на ней точку 1, имеющую координаты x и z. Наметим далее на этой же линии точку 2, имеющую координаты $(x + dx)$ и $(z + dz)$.

С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка малости кривую $1-2$ можно заменить касательной прямой $1-B$. При этом получаем

$$\left.\begin{aligned} \overline{1-A} &= dx, \\ \overline{A-B} &= dz. \end{aligned}\right\} \tag{18-24}$$

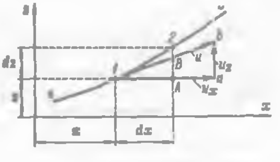

Рис. 18-4. К выводу дифференциального уравнения линии тока

Рассматривая треугольник $1-A-B$ и треугольник скоростей $1-a-b$, видим, что они подобны. В связи с этим можно написать, учтя дополнительно (18-24), что

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dz}{u_z} \tag{18-25}$$

или

$$u_x dz - u_z dx = 0. \tag{18-26}$$

Так как точки 1 и 2 взяты на линии тока произвольно, то (18-26) справедливо для любой точки этой линии тока. Следовательно, выражение (18-26) можно рассматривать как дифференциальное уравнение линии тока.

2. Функция тока ψ. Уравнение (18-26) можно проинтегрировать следующим образом.

Положим, что существует некоторая функция координат $\psi\ (x, z)$, которая удовлетворяет условиям

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial z}\ ;\ u_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{18-27}$$

Подставляя равенства (18-27) в уравнение (18-26), получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz = 0 \tag{18-28}$$

Рис. 18-5. Физический смысл функций тока ψ

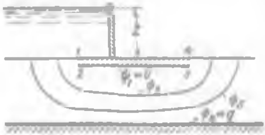

Рис. 18-6. Принимаемые наименования функций ψ

Выражение, стоящее в левой части этого уравнения, является полным дифференциалом функции $\psi\ (x, z)$. Поэтому (18-28) можно переписать в виде:

$$d\psi = 0, \tag{18-29}$$

что после интегрирования дает

$$\psi(x, z) = \text{const}. \tag{18-30}$$

Таким образом, оказывается, что существует некоторая функция $\psi(x, z)$, которая во всех точках данной линии тока приобретает одно и то же значение. Для разных линий тока будем получать различные значения ψ.

Можно сказать, что каждая линия тока характеризуется своим численным значением ψ и является линией равного значения функции ψ. Функция ψ называется функцией тока или функцией течения.

Если в уравнении (18-30) будем задавать разные ψ ($\psi_1 = \text{const}$, $\psi_2 = \text{const}$ и т. д.) и строить по этому уравнению соответствующие кривые, то в результате получим семейство линий тока.

3°. Физический смысл функции ψ. Представим себе две линии тока: ψ_1 и ψ_2 (рис. 18-5). Обозначим через Δq величину расхода воды, текущей между двумя названными линиями тока. Можно показать, что

$$\Delta q = \psi_2 - \psi_1, \tag{18-31}$$

т. е. *разность величин ψ, относящихся к двум соседним линиям тока равна расходу воды, протекающей между этими линиями тока.*

Изобразим на рис. 18-6 какое-либо сооружение, при помощи которого создается подпор Z. Как известно, первой (самой верхней) линией тока является линия подземного контура сооружения. Обозначим эту линию тока через ψ_1, причем припишем ψ_1 величину, равную нулю. При таком условии можем сказать, что наименование следующей линии тока ψ_2 выражает расход воды, протекающей между подземным контуром и данной линией тока.

Ясно, что при указанном условии (в отношении величины ψ_1) весь расход воды, протекающей под сооружением, будет выражать наименование последней линии тока, совпадающей с поверхностью водоупора (см. на рис. 18-6 линию тока ψ_4; $\psi_4 = q = \text{const}$).

Как видно, линии тока (линии $\psi = \text{const}$) могут рассматриваться как «линии равных расходов» ($q = \text{const}$), в указанном выше смысле.

4°. Связь между функцией тока ψ и потенциалом скорости φ. Сопоставляя уравнения (18-27) и (18-12), получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (18\text{-}32)$$

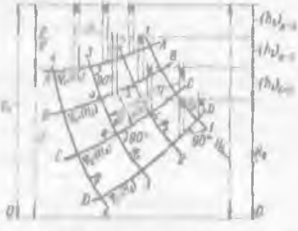

Рис. 18-7. Фрагмент гидродинамической сетки

$H_1 > H_2 > H_3 > H_4$; $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$

Именно эти соотношения и связывают функции φ и ψ.

Можно показать, что функция ψ так же, как и функция φ, должна удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \qquad (18\text{-}33)$$

следовательно, ψ является гармонической функцией.

Функции φ и ψ есть сопряженные гармонические функции; зная φ, можно найти функцию ψ.

5°. Гидродинамическая сетка. Так как линии φ представляют собой живые сечения, то можно утверждать, что линии φ и ψ образуют о р т о г о н а л ь н у ю с е т к у, которая называется г и д р о д и н а м и ч е с к о й. Ее можно построить для заданной области фильтрации, решив уравнение Лапласа для этой области.

Представим на рис. 18-7 некоторый фрагмент такой сетки. Поскольку линии φ являются в то же время и линиями равного напора H, то горизонты воды в пьезометрах $П$, присоединенных к разным точкам одной и той же линии φ, должны устанавливаться в одной горизонтальной плоскости; превышение этой плоскости над плоскостью сравнения OO будет давать величину H для данной линии φ.

Обозначим через $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ следующие величины

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_n - \varphi_{n-1}; \\ \Delta\psi &= \psi_n - \psi_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}34)$$

Если линии $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ проведены так, что[1] $\Delta\varphi = \Delta\psi$, т. е. если указанные линии проведены через одинаковые интервалы $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$, то сетка должна получиться к в а д р а т и ч н о й: любая клетка такой сетки, например клетка $abcd$, будет представлять собою криволинейный квадрат, характеризуемый условием

$$\Delta s = \Delta\sigma, \qquad (18\text{-}35)$$

где величины Δs и $\Delta\sigma$ показаны на чертеже.

---

[1] Заметим, что φ и ψ имеют одинаковую размерность: $[L^2]\cdot[t]$, например, $см^2/с$ или $м^2/с$ [см. зависимость (18-9) и (18-31)].

Если в одном случае линии AA, BB, CC и т. д. (см. чертеж) представляют собой линии φ, а линии $1-1$, $2-2$, $3-3$ и т. д. – линии ψ, то в другом возможном случае (однородного грунта) AA, BB, CC и т. д. будут представлять собой линии ψ, а $1-1$, $2-2$, $3-3$ и т. д. – линии φ.

Таким образом, данная сетка характеризует две кинематические схемы. Эти схемы называются **взаимными** (прямой и обратной).

§ 18-7. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ Н. Н. ПАВЛОВСКОГО. МЕТОДЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Как отмечалось выше, при решении вопросов резко изменяющейся фильтрации методами математической теории, нам приходится отыскивать такую функцию $H(x, z)$ или $\varphi(x, z)$, которая удовлетворяла бы уравнению Лапласа, а также соответствующим граничным условиям. Зная указанную функцию, легко найти $\psi(x, z)$, причем пользуясь зависимостями $\varphi(x, z)$ и $\psi(x, z)$, мы можем построить гидродинамическую сетку. Располагая же гидродинамической сеткой, полученной для данного конкретного случая, можно легко решать (см. ниже) все практические задачи, поясненные в § 18-1.

Основным и самым трудным вопросом здесь является решение уравнения Лапласа (отыскание функции φ или H). При решении этого уравнения для различных схем подземного контура приходится пользоваться специальными математическими методами: методами функции комплексного переменного, в частности, методом конформных отображений и т. п. Этот вопрос рассматривать не будем – он изучается в математической физике.

Надо отметить, что окончательные расчетные зависимости, полученные Н. Н. Павловским методом математической теории фильтрации, оказались настолько сложными, что пользоваться ими в практической обстановке, как правило, не представляется возможным (в эти зависимости входят различные специальные функции: эллиптические интегралы, эллиптические синусы и т. п.). Громадное большинство практически важных задач фильтрации не может быть решено до конца методами математической гидромеханики, в связи со слишком большими трудностями, встречающимися при таком решении.

Как отмечалось ранее, математическая теория фильтрации представляет главным образом научный интерес. На базе этой теории можно разрабатывать практические приближенные способы расчета. Кроме того, пользуясь данной теорией, можно для некоторых простейших частных случаев составлять расчетные графики, которые иногда могут находить применение в практике.

Учитывая такое положение, при построении гидродинамической сетки обычно приходится вовсе отказываться от указанного выше теоретического метода и пользоваться или особым экспериментальным методом – методом электрогидродинамических аналогий (предложенным Н. Н. Павловским, см. § 18-11), или графическим методом (предложенным Ф. Форхгеймером), согласно которому линии тока и равного напора проводятся сперва просто на глаз; затем положение их уточняется до тех пор, пока всюду (по всей области фильтрации) не получим квадратичную ортогональную сетку, образованную линиями φ и ψ. Для не очень сложных схем при известном опыте гидродинамическая сетка может быть построена графическим методом достаточно правильно.

В связи со сложностью построения гидродинамической сетки в литературе появились также различные инженерные (технические) методы, которые позволяют решать главнейшие практические задачи, не прибегая к построению гидродинамической сетки. В основу их разработки обычно кладется теория фильтрации Н. Н. Павловского. Это «метод фрагментов» Н. Н. Павловского, относящийся только к особому (частному) случаю плотины – плотины системы А. М. Сенкова при неглубоком расположении водоупора; методы виртуальных длин В. С. Козлова и асимптотических решений С. Н. Нумерова, относящиеся только к редко встречающемуся частному случаю обычных плотин при неглубоком расположении водоупора (когда водопроницаемое основание плотины можно рассчитывать, как горизонтальную трубу, имеющую далеко отстоящие друг от друга отдельные местные сопротивления; см. гл. 5); метод коэффициентов сопротивления Р. Р. Чугаева, относящийся к общему случаю обычной плотины, расположенной на однородном водопроницаемом основании любой мощности [18-10].

§ 18-8. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТКА В СЛУЧАЕ ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ

Представим, для примера, на рис. 18-8 гидродинамическую сетку в случае одношпунтового флютбета. В отношении этого чертежа сделаем следующие замечания:

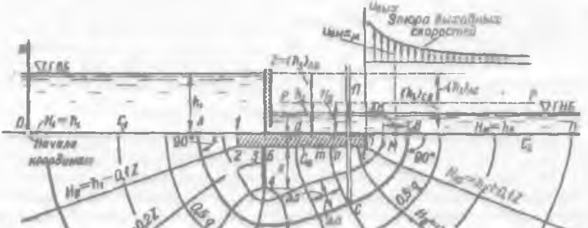

Рис. 18-8. Гидродинамическая сетка в случае гидротехнического сооружения

1) две линии тока всегда заранее известны: C_0 и C_3; равным образом заранее (до выполнения расчета) известны две линии равного напора: C_1 и C_2;

2) так как линии равного напора ортогональны линиям тока, то

а) все линии равного напора должны быть ортогональны подземному контуру и поверхности водоупора;

б) все линии тока должны быть ортогональны дну верхнего и дну нижнего бьефов;

3) величина фильтрационного расхода воды, движущейся между двумя линиями тока, постоянна по длине потока.

Рассмотрим линию тока ACB. В ее точке A напор $H = h_1$, в точке B напор $H = h_2$. Очевидно, жидкая частица, двигаясь вдоль линии тока ACB от границы C_1 до границы C_2, теряет напор:

$$(h_l)_{AB} = h_1 - h_2 = Z. \tag{18-36}$$

Таким образом, можно сказать, что *«напор на сооружении» Z представляет собой потерю напора при фильтрации воды под сооружением.*

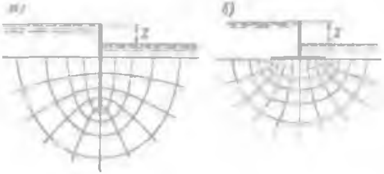

Рис. 18-9. Гидродинамические сетки в случаях чистого шпунта (a) и плоского флютбета ($б$)

Рассмотрим линию равного напора (живое сечение) $аб$, приключив к ее точке C пьезометр $П$. Горизонт воды в этом пьезометре будет стоять на уровне некоторой горизонтальной пьезометрической плоскости $P - P$, отвечающей данному живому сечению. Из чертежа видно, что величина $(h_l)_{AC}$ (отмеченная на чертеже) представляет собой потерю напора на длине AC рассматриваемой линии тока; величина же $(h_l)_{CB}$ является потерей напора на длине CB рассматриваемой линии тока:

$$(h_l)_{AC} + (h_l)_{CB} = Z. \tag{18-37}$$

Если линии равного напора условимся проводить так, чтобы их наименования отличались друг от друга на величину, равную $0{,}1Z$, то наименование этих линий будет таким, какое указано на чертеже. Само собой разумеется, что снижение напора вдоль любой линии тока, на участке ее между соседними линиями равного напора, должна составлять при указанном условии величину, равную $0{,}1Z$.[1]

В заключение укажем, что Н. Н. Павловским были, в частности, теоретически решены две следующие простейшие схемы сооружения, так называемые: а) ч и с т ы й   ш п у н т (рис. 18-9, a); б) п л о с к и й   ф л ю т б е т (рис. 18-9, $б$).

В результате такого решения оказалось, что в случае $T = \infty$ (т. е. когда водоупор находится на бесконечной глубине) линии тока для этих схем представляют собой эллипсы, а линии равного напора — гиперболы.

§ 18-9. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЫЕ СВОЙСТВА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТКИ. ПРИВЕДЕННЫЙ НАПОР И ПРИВЕДЕННЫЙ РАСХОД

В теории фильтрации доказываются следующие четыре положения.

1) если две о д н о р о д н ы е области фильтрации геометрически подобны, то гидродинамические сетки для этих двух областей также геометрически подобны (здесь имееется в виду, что для указанных двух областей имеет место надлежащее соответствие и геометрическое подобие граничных живых сечений C_1 и C_2, а также граничных линий тока C_0 и C_3; см. рис. 18-8):

[1] Говоря о снижении напора по длине линий тока (или элементарных струек) ламинарного потока грунтовой воды, следует учитывать, что поясненная в § 4-13 «функция диссипации механической энергии», найденная для так называемой «жидкости Ньютона», не относится к рассматриваемому здесь случаю движения грунтовой воды (когда мы пользуемся другой моделью — так называемой «жидкостью Дарси»).

2) в случае однородного грунта форма гидродинамической сетки и наименование линий равного напора вовсе не зависят от коэффициента фильтрации; от коэффициента фильтрации зависит только расход (см. ниже п. 4);

3) форма (начертание) гидродинамической сетки, полученной для сооружения (см., например, рис. 18-8) вовсе не зависит от величины напора на сооружении Z, а также от величин h_1 и h_2 (глубин воды в верхнем и нижнем бьефах); с изменением величин Z, h_1 и h_2 изменяется только наименование имеющихся линий равного напора и линий тока.

4) величина расхода q прямо пропорциональна напору на сооружении Z и прямо пропорциональна коэффициенту фильтрации k.

Рис. 18-10. Действительная (*а*) и приведенная (*б*) схемы сооружения

Учитывая эти положения, заключаем, что исходя из имеющегося решения какой-либо схемы (области фильтрации), легко можно получить решения для любой другой схемы, характеризуемой любым коэффициентом фильтрации, и любыми Z, h_1 и h_2, если только эта схема геометрически подобна решенной схеме.

Представим на рис. 18-10, *а* д е й с т в и т е л ь н у ю (заданную) схему сооружения. Изобразим далее на рис. 18-10, *б* схему, отличающуюся от действительной только величиной коэффициента фильтрации и глубинами воды в бьефах. Примем для схемы на рис. 18-10, *б*:[1]

$$k = 1;\; h_2 = 0,\; Z = 1. \tag{18-38}$$

Схема, характеризуемая условиями (18-38), называется п р и в е д е н н о й с х е м о й. Величины напора и удельного расхода для приведенной схемы принято обозначать соответственно через H_r и q_r. Эти величины связаны с H и q для действительной схемы (рис. 18-10, *а*) следующими зависимостями (плоскость сравнения считаем проведенной на уровне дна нижнего бьефа).

$$\boxed{H_A = h_2 + Z(H_r)_A,} \tag{18-39}$$

$$\boxed{q = kZq_r,} \tag{18-40}$$

где H_A — напор в некоторой произвольной точке A действительной схемы;
$(H_r)_A$ — напор в соответственной точке A приведенной схемы.

---

[1] Выписывая (условно) в соотношениях (18-38) $k = 1$ и $Z = 1$, имеем в виду, что обе эти именованные величины должны выражаться с использованием одного и того же линейного размера (м, см и т. п.).

Заметим, что H_r называется **приведенным напором**, а q_r — **приведенным расходом**. Выполняя расчет, решают часто не действительную, а приведенную схему, так как от нее легко перейти при помощи зависимостей (18-39) и (18-40) к действительной, которая: а) геометрически подобна приведенной и б) для которой

$$k \neq 1; \; h_2 \neq 0; \; Z \neq 1. \tag{18-41}$$

При таком переходе учитываем прежде всего, что начертание гидродинамической сетки при замене условий (18-38) условиями (18-41) не изменится. Далее, используя формулу (18-40), находим действительный удельный расход q. Наконец, используя формулу (18-39), определяем наименование действительных линий равного напора (исходя из известного наименования линий равного напора для приведенной схемы).

Если условимся проводить линии равного напора через интервал в их наименовании, равный $0{,}1Z$, то для приведенной схемы получим следующие наименования линий равного напора (при плоскости сравнения OO, показанной на чертеже): 1) 1,0; 2) 0,9; 3) 0,8;...; 10) 0,1; 11) 0,0.

Пересчитывая эти данные по формуле (18-39), получаем для действительной схемы соответственно следующие наименования отдельных линий равного напора:

1) $H_1 = h_2 + (H_r)_1 Z = h_2 + 1{,}0Z = h_2 + Z$.
2) $H_2 = h_2 + 0{,}9Z$;
3) $H_3 = h_2 + 0{,}8Z$;

. . . .

10) $H_{10} = h_2 + 0{,}1Z$;
11) $H_{11} = h_2 + 0{,}0Z = h_2$.

§ 18-10. РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПОСТРОЕННОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТКИ

Будем пользоваться чертежом на рис. 18-8, причем будем как и выше рассматривать только плоскую задачу.

1. **Построение эпюры противодавления.** Эпюра противодавления выражает величину давления, действующего снизу на сооружение со стороны фильтрационного потока.

Как отмечалось выше, напор в данной точке при направлении вертикальной оси z вверх выражается зависимостью (18-7). Введем обозначение:

$$a = -z,$$

где a — заглубление рассматриваемой точки под плоскостью сравнения $O-O$, которую будем намечать на уровне дна нижнего бьефа.

Необходимо запомнить правило: *пьезометрическая высота p/γ в данной точке фильтрационного потока равна напору H в этой точке плюс заглубление ее под плоскостью сравнения:*

$$\boxed{\frac{p}{\gamma} = H + a.} \tag{18-42}$$

Имея в виду такое правило, можем наметить следующий ход построения эпюры противодавления:

1) разворачиваем подземный контур сооружения (рис. 18-8) в горизонтальную прямую $1-2-3-\ldots-7$ (рис. 18-11);

2) строим эпюру напоров вдоль развернутого подземного контура (см. фигуру $1-A-B-7-1$ на рис. 18-11); если в точке m подземного контура

(рис. 18-8) напор равен H_m, то при построении эпюры напоров величину H_m откладываем, как показано на рис. 18-11, саму величину H_m легко можно определить, руководствуясь имеющимися линиями равного напора (см. рис. 18-8);

3) откладываем вниз от прямой $1-7$ (рис. 18-11) заглубления точек подземного контура под плоскостью сравнения; при этом получаем эпюру заглублений $1-2'-3'-4'-\ldots-7-1$ точек подземного контура. Очевидно, полученная фигура $1-A-B-7-6-4'-2'-1$ будет представлять собой искомую эпюру давлений вдоль подземного контура, так как каждая вертикальная ордината этой фигуры равна $H+a$.

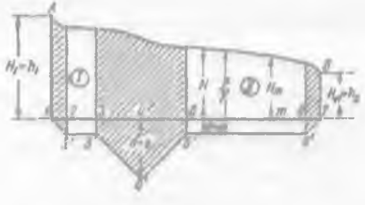

Рис. 18-11. Изменение напора и давления вдоль подземного контура

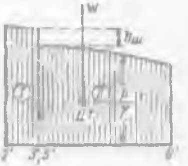

Рис. 18-12. Эпюра давления, действующего на горизонтальные элементы подземного контура.

Для статического расчета плотины обычно представляет интерес только давление, действующее на горизонтальные элементы подземного контура $2-3$ и $5-6$. Имея это в виду, остальные части найденной эпюры (см. площади, заштрихованные на рис. 18-11) отбрасываем; сдвинув фигуры I и II, окончательно получаем эпюру противодавления в виде, изображенном на рис. 18-12. Вертикальная сила противодавления W, выражаемая этой эпюрой, должна проходить через центр тяжести эпюры $ЦТ$ (рис. 18-12). Величина силы W, приходящейся на 1 ед. ширины фильтрационного потока (измеренную перпендикулярно к плоскости чертежа), равна площади построенной эпюры, умноженной на удельный вес воды.

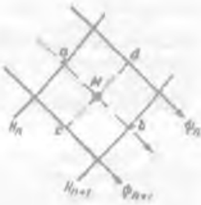

Рис. 18-13. Определение градиента J и скорости u в точке M (по гидродинамической сетке)

Высота уступа $h_ш$, показанного на рис. 18-12, дает потерю напора на шпунте, т. е. разность напоров в точках 3 и 5 подземного контура (рис. 18-8).

2°. **Определение J и u в любой точке области фильтрации.** Положим, что необходимо найти пьезометрический уклон J в точке M (рис. 18-13). С этой целью через точку M проводим вспомогательную линию тока ab. При этом величина J выразится зависимостью

$$J = \frac{H_n - H_{n+1}}{\overline{ab}}, \tag{18-43}$$

где H_n и H_{n+1} — наименование ближайших к точке M линий равного напора; $\overline{ab}$ — длина участка вспомогательной линии тока между указанными линиями равного напора; на длине $\overline{ab}$ теряется напор, равный $H_n - H_{n+1}$.

Зная величину J, определяем скорость фильтрации u в точке M по формуле

$$u = kJ = k\frac{H_n - H_{n+1}}{\overline{ab}}; \tag{18-44}$$

само собой разумеется, что вектор скорости u должен быть касателен к линии ab и направлен в сторону падения напора.

Заметим, что в точках перелома подземного контура *2, 4, 6* (рис. 18-8) величина J согласно решению теоретической гидромеханики равна бесконечности.

3°. Определение фильтрационного расхода. Зная скорость u в точке M, можем найти расход Δq воды, текущей между соседними линиями тока ψ_n и ψ_{n+1} (рис. 18-13). Очевидно,

$$\Delta q = u\,\overline{cd}, \tag{18-45}$$

где $\overline{cd}$ – длина линии, показанной на рис. 18-13 (расстояние между ψ_n и ψ_{n+1}).

Чтобы найти полный удельный расход q воды, фильтрующей под сооружением, выбираем какие-либо две линии равного напора (например, линии H_7 и H_8, показанные на рис. 18-8), причем рассматриваем отсек основания, заключенный между ними; вверху этот отсек должен упираться в подземный контур, внизу – в водоупор. Данный отсек основания разбивается линиями тока на несколько криволинейных квадратов, из которых каждый сходен с квадратом, изображенным на рис. 18-13. Найдя для каждого квадрата величину Δq по формуле (18-45), подсчитываем полный удельный расход q, суммируя величины Δq для всех квадратов.

Подставляя в (18-45) величину u по (18-44), получаем

$$\Delta q = \frac{\overline{cd}}{\overline{ab}}(H_n - H_{n+1})k.$$

Так как $\Delta q = \text{const}$ (вдоль течения) для той части области фильтрации, которая ограничена двумя соседними линиями тока, то отношение $\dfrac{\overline{cd}}{\overline{ab}}$ для всех криволинейных прямоугольников сетки, образующих эту часть области фильтрации, должно быть одинаковым (если линии равного напора проведены через равные интервалы: $H_n - H_{n+1} = \text{const}$). Для квадратичной сетки указанное отношение $\dfrac{\overline{cd}}{\overline{ab}} = 1{,}0$.

4°. Построение эпюры выходных скоростей. Практически важно знать выходные скорости u по линии дна нижнего бьефа (по линии C_2), так как именно здесь скорее всего может произойти размыв грунта фильтрационным потоком. Для построения эпюры выходных скоростей (см. график в верхней правой части рис. 18-8) помимо формулы (18-44) можно использовать также зависимость

$$u_{вых} = \frac{\Delta q}{\Delta\sigma}, \tag{18-46}$$

где $u_{вых}$ – скорость в некоторой точке M, намеченной на линии C_2 (рис. 18-8); $\Delta\sigma$ – расстояние между соседними линиями тока (между которыми намечена точка M), измеренное вдоль линии C_2; Δq – элементарный расход, относящийся к элементарной струйке, ограниченной упомянутыми линиями тока и найденный, как указано в п. 3°.

§ 18-11. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ (МЕТОД ЭГДА)

Метод ЭГДА был предложен Н. Н. Павловским в 1921-1922 гг. По этому методу можно построить гидродинамическую сетку для области фильтрации сколь угодно сложной формы. Данный метод основан на математическом подобии, имеющемся между движением воды в грунте и постоянным электрическим током в проводнике.

Действительно:

а) в случае грунтовых вод

$$u = -k\frac{dH}{ds} \qquad (18\text{-}47')$$

б) в случае электрического тока

$$\delta = -c\frac{dU}{ds}, \qquad (18\text{-}47'')$$

где δ — плотность тока (т. е. величина тока, приходящаяся на 1 кв. единицу площади поперечного сечения проводника), c — коэффициент электропроводности; U — электрический потенциал.

Как видно из (18-47') и (18-47'') величинам u, k, H (в случае движения грунтовых вод) отвечают соответственно величины δ, c, U (в случае электрического тока). Известно, что функция U так же, как и функция H, должна удовлетворять уравнению Лапласа.

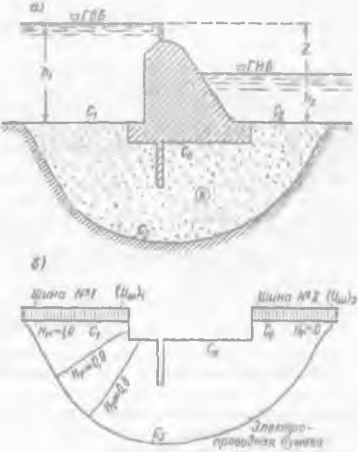

Рис. 18-14. К методу ЭГДА. *а* — действительное сооружение, *б* — модель основания, выполненного из электропроводной бумаги

При построении гидродинамической сетки по методу ЭГДА поступают следующим образом.

Положим имеется схема гидросооружения, показанная на рис. 18-14, *а*. Из какого-либо электропроводящего материала (станиоля, электропроводной бумаги и т. п.) вырезают модель основания, которая должна быть геометрически подобной действительному водопроницаемому основанию (рис. 18-14, *б*). После этого к границам модели C_1 и C_2 прилагают электрические шины, которым сообщают потенциалы $(U_ш)_1$ и $(U_ш)_2$. Под действием разности потенциалов $\Delta U = (U_ш)_1 - (U_ш)_2$ в модели основания возникает электрический ток (постоянный).

Разность потенциалов ΔU считают равной единице,

$$\Delta U = 1{,}0; \qquad (18\text{-}48)$$

линии равного потенциала на электропроводной модели нащупывают иглой при помощи особого устройства (основанного на принципе мостика Уитстона).

Полученные линии $U = \text{const}$ ($U_1 = 1{,}0$; $U_2 = 0{,}9$; $U_3 = 0{,}8$; ..., $U_{10} = 0{,}1$; $U_{11} = 0$) принимают за линии равного напора (за живые сечения фильтрационного потока). Наименование их устанавливают по известной формуле (18-39):

$$H = h_2 + ZH_r,$$

где H_r считается равным U:

$$(H_r)_1 = 1{,}0;$$
$$(H_r)_2 = 0{,}9;$$
$$\cdots$$
$$(H_r)_{10} = 0{,}1.$$
$$(H_r)_{11} = 0.$$

Линии тока обычно строят графически, проводя их ортогонально к найденным линиям $H = \text{const}$. Для однородного грунта линии тока можно построить так же, как и линии $H = \text{const}$; при этом только электрические шины следует прикладывать к границам C_0 и C_3 модели и рассматривать схему, обратную заданной (см. § 18-6, п. 5).

Как видно, при работе по методу ЭГДА следует различать два разных устройства:

1) модель области фильтрации, выполненную из электропроводного материала;

2) электрическое приспособление, при помощи которого можно пропускать через модель постоянный электрический ток в нужном направлении и измерять величину электрического потенциала в различных точках модели.

Выше мы рассмотрели плоскую задачу о напорной фильтрации в однородной изотропной среде. Надо иметь в виду, что метод ЭГДА при использовании соответствующего электропроводящего материала позволяет построить гидродинамическую сетку и для неоднородной области фильтрации ($k \neq \text{const}$), а также для случая анизотропного грунта. По методу ЭГДА можно решать задачи и о безнапорной фильтрации. Здесь только кривую депрессии приходится находить подбором, постепенно подрезая электропроводную бумагу и добиваясь при этом, чтобы для всех точек кривой депрессии было соблюдено известное условие $z = H$.

Создавая электропроводящие модели пространственного вида (с применением иногда электропроводных жидкостей), мы можем решать по методу ЭГДА и пространственные задачи; впрочем решение таких пространственных задач иногда оказывается сопряженным со значительными трудностями (чисто технического характера).

§ 18-12. МЕТОД КОЭФФИЦИЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ Р. Р. ЧУГАЕВА

Метод коэффициентов сопротивления был предложен Р. Р. Чугаевым в 1953—1956 гг. Этим методом следует пользоваться при фильтрационном расчете гидротехнических сооружений, расположенных на однородном нескальном основании, когда в таком основании возникает плоский напорный фильтрационный поток[1]. Как было отмечено в конце § 18-7, метод коэффициентов сопротивления, являясь чисто инженерным методом, позволяет решать

[1] Данный метод включен в Технические условия и нормы Министерства электростанций (ТУиН № 125—57), а также был утвержден в СНиП II-И. 12—67 для применения в практике плотиностроения [18-10, 18-7].

главнейшие практические задачи фильтрации, например, определять величину противодавления, находить максимальный выходной градиент напора на поверхности дна нижнего бьефа и т. п. Эти главнейшие задачи решаются без построения гидродинамической сетки. Впрочем, согласно методу коэффициентов сопротивления, с некоторым приближением в ряде случаев представляется возможным построить и гидродинамическую сетку [18-7].

1°. **Общая идея метода.** При фильтрации воды под плотиной в общем случае получаем р е з к о и з м е н я ю щ е е с я движение (рис. 18-15, *а*); обозначим для такого случая плотины противодавление и максимальный выходной пьезометрический уклон соответственно через W_a и $(J_{вых})_a$.

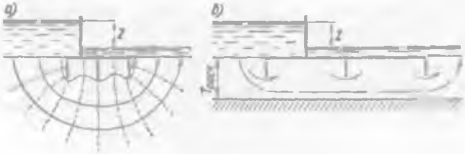

Рис. 18-15. К пояснению общей идеи метода коэффициентов сопротивления: *а* — плоская задача о резко изменяющемся движении воды под плотиной; *б* — линейная задача о фильтрации в горизонтальной трубе (фиктивная эквивалентная труба)

В частном случае, когда водоупор расположен близко к поверхности земли (величина T мала; см. рис. 18-15, *б*), задача значительно упрощается, в этом случае мы получаем по существу л и н е й н у ю задачу о ламинарной фильтрации воды в г о р и з о н т а л ь н о й т р у б е, имеющей отдельные местные гидравлические сопротивления (на шпунтах и т. п.)[1]. Расчет такой трубы при т у р б у л е н т н о м движении воды в ней изучался в гл. 5; величину потерь напора h_f в пределах отдельных фрагментов трубы мы вычисляли при турбулентном движении по формуле

$$h_f = \zeta \frac{v^2}{2g}, \tag{18-49'}$$

где ζ — коэффициент сопротивления, определяемый, как правило, на основании экспериментальных данных. Зная величины ζ для отдельных фрагментов трубы (ζ_1, ζ_2, ζ_3, ...), затем считали, что общая потеря напора Z распределяется между отдельными фрагментами (последовательно расположенными) прямо пропорционально их величинам ζ.

В случае л а м и н а р н о й фильтрации в горизонтальной трубе (рис. 18-15, *б*) расчет должен несколько измениться (упроститься). При таком движении, как отмечалось выше, скоростным напором следует пренебрегать, вместо же фор-

[1] Этот частный случай является особенно простым, когда отдельные местные сопротивления располагаются достаточно далеко друг от друга (не влияют друг на друга). Как было отмечено в § 18-7, именно такой простейший случай (случай р а с п л а с т а н н о й схемы подземного контура) рассматривался ранее (иногда не совсем удачно) рядом авторов (С. Н. Нумеровым и др.; об этом случае см. ниже п. 11°). Некоторые авторы для расчета указанной трубы пытались использовать метод фрагментов Н. Н. Павловского, предложенный им только для расчета плотины особого вида (плотины А. М. Сенкова). Однако эти попытки не имели успеха.

мулы (18-49') для определения потерь напора в пределах отдельных фрагментов следует пользоваться зависимостью Павловского—Форхгеймера [18-7]:

$$h_f = \zeta \frac{q}{k}, \tag{18-49'}$$

причем здесь величина коэффициента сопротивления ζ *может быть найдена* теоретическим путем (см. ниже). Очевидно, и при ламинарном движении воды в трубе потеря напора Z должна распределяться между отдельными фрагментами трубы прямо пропорционально их коэффициентам сопротивления ζ. Обозначим величину противодавления и величину максимального выходного градиента в случае ламинарной фильтрации в трубе (рис. 18-15,*б*) соответственно через $W_б$ и $(J_{вых})_б$.

Имея в виду исключительную простоту расчета указанной трубы (по общепринятому хорошо проверенному в практике методу коэффициентов сопротивления) нами было предложено для расчета действительную схему сооружения (рис. 18-15,*а*) заменять ф и к т и в н о й э к в и в а л е н т н о й трубой (рис. 18-15,*б*), размеры которой подбираются таким образом, чтобы величины $W_б$ и $(J_{вых})_б$, найденные для этой трубы, оказались равными искомым величинам W_a и $(J_{вых})_a$:

$$W_б = W_a; \; (J_{вых})_б = (J_{вых})_a. \tag{18-50}$$

Оказалось, что такая задача может быть решена. Несмотря на то, что фильтрационный поток на рис. 18-15,*б* не имеет никакого внешнего сходства с фильтрационным потоком на рис. 18-15,*а*, все же представляется возможным найти для трубы на рис. 18-15,*б*, имеющей верхнее очертание тождественное заданному подземному контуру, такой размер $T_{расч}$, при котором будет удовлетворяться условие (18-50) (см. [18-7]).

Из сказанного ясно, что расчет по методу коэффициентов сопротивления должен разбиваться на два этапа:

1-й э т а п (основной): замена действительного основания плотины фиктивной эквивалентной трубой, имеющей определенный размер $T_{расч}$ (и верхнее очертание тождественное заданному подземному контуру);

2-й э т а п: расчет полученной фиктивной трубы по методу коэффициентов сопротивления (см. гл. 5) с учетом формулы (18-49'). Здесь, разумеется, приходится определять коэффициенты сопротивления ζ для различных участков фиктивной трубы, выяснять взаимное влияние отдельных местных сопротивлений (в том случае, когда они расположены на небольшом расстоянии друг от друга), интересоваться величиной скоростей в отдельных точках рассматриваемой фиктивной трубы и т. п.

Дополнительно, используя поясненный метод, вводим особое допущение, касающееся формы пьезометрической линии $P-P$ для подземного контура сооружения (рис. 18-16). Как видно из рис. 18-16, такую пьезометрическую линию принимаем, как и для обычного трубопровода, в виде п р я м о л и н е й н о й л о м а н о й л и н и и $1'-2'-3'-4'-5'-6'$. Из рисунка видно, что потери напора h_I, h_{III}, h_V являются м е с т н ы м и потерями, отвечающими соответственно: входному шпунту $1-a-2$; внутреннему шпунту $3-б-4$; выходному шпунту $5-в-6$. Потери же напора h_{II} и h_{IV} являются потерями напора по длине горизонтальных элементов подземного контура $2-3$ и $4-5$.

2°. Задачи, решаемые по методу коэффициентов сопротивления. Основные принимаемые обозначения. Пользуясь рассматриваемым методом, можно решать следующие т р и основные задачи:

1) строить эпюру противодавления для горизонтальных элементов контура, определять напор на нижнем конце (на острие) низового (выходного) шпунта

или зуба и находить особый пьезометрический уклон $J_{..}$, контролирующий так называемую фильтрационную прочность грунта основания;

2) определять максимальный пьезометрический уклон $J_{вых}$ на поверхности дна нижнего бьефа (в точке *б*; рис. 18-16);

3) определять фильтрационный расход.

При решении перечисленных задач следует задаваться совершенно определенным размером фиктивной эквивалентной трубы, т. е. размером $T_{расч}$ (рис. 18-15, *б*). Оказывается, что глубина $T_{расч}$, определяющая расчетное положение водоупора, должна быть в общем случае р а з л и ч н о й для указанных выше трех фильтрационных задач [1].

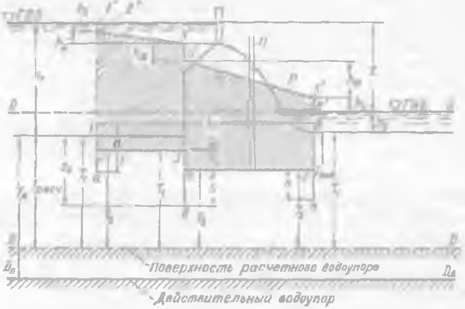

Рис. 18-16. К расчету фиктивной эквивалентной трубы по методу коэффициентов сопротивления Р. Р. Чугаева

Далее через $T'_{расч}$, $T''_{расч}$ и $T'''_{расч}$ будем обозначать заглубления расчетного водоупора, принимаемые соответственно при решении 1-й, 2-й и 3-й фильтрационной задачи. Через $T_п$ условимся обозначать заглубление д е й с т в и т е л ь н о г о водоупора. Заметим, что $T_{расч}$ и $T_п$ всегда должны измеряться по вертикали от поверхности водоупора до той точки подземного контура, которая расположена наиболее высоко.

При решении той или иной задачи необходимо предварительно выполнить следующие операции:

1) установить положение поверхности расчетного водоупора, т. е. найти размер фиктивной эквивалентной трубы, подвергаемой непосредственному расчету по методу коэффициентов сопротивления;

2) исходя из найденных величин $T_{расч}$ определить численные значения коэффициентов сопротивления ζ д л я о т д е л ь н ы х э л е м е н т о в п о д з е м н о г о к о н т у р а.

Решение первого отмеченного вопроса основывается на использовании введенного нами понятия а к т и в н о й з о н ы ф и л ь т р а ц и и.

3. Понятие активной зоны фильтрации. Покажем на рис. 18-16 некоторое воображаемое положение водоупора $D-D$, определяемое размером T. Представим себе далее, что водоупор постепенно опускается и величина T постепенно растет. При таком опускании водоупора пьезометрическая линия $P-P$

[1] Обоснование этого положения здесь не приводим (см. [18-7]).

будет несколько деформироваться и фигура эпюры противодавления будет несколько изменяться. Интенсивность такого изменения вначале будет велика: по мере дальнейшего опускания $D-D$ интенсивность этого изменения будет постепенно уменьшаться, и, наконец, когда T достигнет некоторой величины

$$T = T'_{ак}, \tag{18-51}$$

фигура эпюры противодавления при увеличении T практически перестанет деформироваться. В связи с этим можем утверждать, что эпюры противодавления при $T=\infty$ и $T=T'_{ак}$ должны быть практически одинаковы. Величина $T'_{ак}$ называется глубиной активной зоны фильтрации по напору.

Если мы будем интересоваться не эпюрой противодавления, а выходным градиентом $J_{вых}$, то оказывается, что с увеличением T (по мере опускания водоупора) величина $J_{вых}$ вначале будет интенсивно расти, затем рост $J_{вых}$ будет постепенно затухать, наконец, когда T сделается равным $T''_{ак}$, рост $J_{вых}$ практически прекратится. Величина $T''_{ак}$ называется глубиной активной зоны фильтрации по выходному градиенту. Можно показать, что

$$T''_{ак} \approx 2T'_{ак} \tag{18-52}$$

Для определения величины $T'_{ак}$ даются следующие формулы, подобранные в результате количественного анализа некоторых схем подземного контура, решенных Н. Н. Павловским.

Обозначим через l_0 длину проекции подземного контура на горизонталь и через s_0 длину проекции подземного контура на вертикаль (см. рис. 18-16); тогда:

а) для распластанного подземного контура, когда

$$\frac{l_0}{s_0} \geqslant 5, \tag{18-53}$$

имеем

$$T'_{ак} = 0{,}5l_0; \tag{18-54}$$

б) для промежуточной схемы, когда

$$3{,}4 \leqslant \frac{l_0}{s_0} \leqslant 5, \tag{18-55}$$

имеем:

$$T'_{ак} = 2{,}5s_0; \tag{18-56}$$

в) для заглубленного подземного контура, когда

$$1 \leqslant \frac{l_0}{s_0} \leqslant 3{,}4, \tag{18-57}$$

имеем

$$T'_{ак} = 0{,}8s_0 + 0{,}5l_0; \tag{18-58}$$

г) для весьма заглубленного подземного контура, когда

$$0 \leqslant \frac{l_0}{s_0} \leqslant 1{,}0, \tag{18-59}$$

имеем

$$T'_{ак} = s_0 + 0{,}3l_0. \tag{18-60}$$

4. Определение размера фиктивной эквивалентной трубы. При определении размеров фиктивной трубы нам достаточно установить для нее величину $T_{расч}$

(поскольку очертание трубы сверху принимается тождественным заданному подземному контуру). Здесь поступаем следующим образом.

1) При построении эпюры противодавления величину $T'_{расч}$ принимаем равной:

а) если действительное заглубление водоупора $T_д \leqslant T'_{ак}$,

$$T_{расч} = T_д; \tag{18-61}$$

б) если $T_д > T'_{ак}$ (например, когда $T_д = \infty$),

$$T'_{расч} = T'_{ак}. \tag{18-62}$$

2. При определении максимального выходного градиента на поверхности дна нижнего бьефа:

а) если $T_д < T''_{ак}$,

$$T_{расч} = T_д; \tag{18-63}$$

б) если $T_д \geqslant T''_{ак}$,

$$T''_{расч} = T'_{ак}. \tag{18-64}$$

3. При определении фильтрационного расхода величину $T'''_{расч}$ всегда следует принимать равной

$$T'''_{расч} = T_д, \tag{18-65}$$

т. е. следует исходить из действительного положения водоупора.

Надо заметить, что при больших значениях $T_д$ величину расхода по методу коэффициентов сопротивления можно найти только грубо приближенно.

5. Общий ход расчета фиктивного основания (фиктивной горизонтальной трубы). Имеем заданный подземный контур, а также высотное положение горизонтов воды в бьефах: найдя расчетное положение водоупора $D-D$ (см. п. 4°), расчет, согласно методу коэффициентов сопротивления, выполняем следующим образом.

Разбиваем заданный контур на отдельные элементы (рис. 18-16):

1) входной и выходной элементы контура в виде, например, входного и выходного шпунтов (см. элементы $1-а-2$ и $5-в-6$);

2) внутренний шпунт (см. элемент $3-б-4$); таких внутренних шпунтов может быть несколько; если величина $s = 0$, то вместо внутреннего шпунта мы получаем промежуточный вертикальный уступ $3-4$,

3) горизонтальные элементы контура ($2-3$; $4-5$).

Как видно, получаем только три типовых элемента контура. Вдоль каждого из них теряется напор h_f. Потеря напора h_f в случае ламинарной фильтрации выражается формулой (18-49').

Обозначим:

$\zeta_{вх}$ и $\zeta_{вых}$ — коэффициенты сопротивления входного и выходного элементов подземного контура;

$\zeta_{ш}$ — коэффициенты сопротивления внутреннего шпунта (при $s = 0$ вместо $\zeta_{ш}$ имеем $\zeta_{ус}$);

$\zeta_{г}$ — коэффициент сопротивления горизонтального элемента контура;

$\sum\zeta$ — суммарный коэффициент сопротивления всего подземного контура.

Для рис. 18-16

$$\sum\zeta = \zeta_{вх} + \zeta'_{г} + \zeta_{ш} + \zeta''_{г} + \zeta_{вых}, \tag{18-66}$$

где $\zeta'_{г}$ и $\zeta''_{г}$ — коэффициенты сопротивления соответственно для первого ($2-3$) и второго ($4-5$) горизонтальных элементов.

Можно показать, что численные значения коэффициентов ζ не зависят от направления фильтрации. В связи с этим при одинаковых формах и размерах входного и выходного элементов контура и при одинаковых величинах T имеем:

$$\zeta_{вх} = \zeta_{вых}. \tag{18-67}$$

Зная численные значения коэффициентов ζ для всех выделенных элементов контура, можно легко решать любые фильтрационные задачи.

6°. Определение численных значений коэффициентов сопротивления. Для определения величин ζ даются следующие расчетные формулы (подробнее см. [18-10; 18-8; 18-7]).

а) Коэффициент сопротивления внутреннего шпунта или уступа $\left(\text{при } 0{,}5 \leqslant \dfrac{T_2}{T_1} \leqslant 1{,}0 \text{ и при } 0 < \dfrac{s}{T_2} \leqslant 0{,}8\right)$

$$\zeta_{ш} = \frac{a}{T_1} + 1{,}5\frac{s}{T_2} + \frac{0{,}5\dfrac{s}{T_2}}{1 - 0{,}75\dfrac{s}{T_2}}, \tag{18-68}$$

где a – высота вертикального уступа; s – глубина шпунта; T_1 и T_2 – заглубления расчетного водоупора под подошвой сооружения с одной и с другой стороны шпунта;[1] всегда $T_1 > T_2$, причем $T_1 = T_2 + a$.

В случае $s = 0$ получаем коэффициент сопротивления вертикального уступа

$$\zeta_{ус} = \frac{a}{T_1}; \tag{18-69}$$

когда $T_1 = T_2$, формула (18-68) также несколько упрощается.

б) Коэффициент сопротивления входного и выходного элементов контура.

В общем случае

$$\zeta_{вх} = \zeta_{вых} = \zeta_{ш} + \frac{\ln 4}{\pi} = \zeta_{ш} + 0{,}44, \tag{18-70}$$

где $\zeta_{ш}$ определяется, как указано выше (в п. «а»), в предположении, что данный входной или выходной шпунт является внутренним шпунтом.

В частных случаях:

когда $s = 0$,

$$\zeta_{вх} = \zeta_{вых} = \zeta_{ус} + 0{,}44 = \frac{a}{T_1} + 0{,}44; \tag{18-71}$$

когда $s = 0$ и $a = 0$, т. е. при так называемом плоском входе или выходе,

$$\zeta_{вх} = \zeta_{вых} = 0{,}44. \tag{18-72}$$

В последнем случае входной или выходной фрагмент обращается в точку, которой и отвечает указанное значение ζ. Эта величина ($\zeta = 0{,}44$) может быть названа коэффициентом сопротивления чистого поворота потока на 90°.

[1] На рис. 18-16 указаны три пары размеров T_1 и T_2; каждая такая пара относится соответственно к *1*, *2* и *3* шпунтам. Заметим, что чертеж на рис. 18-16 выполнен в несколько искаженном масштабе.

в) Коэффициент сопротивления горизонтальных элементов контура (например, элемента $2-3$ или $4-5$):

при

$$l \geqslant 0{,}5\,(s_1 + s_2) \tag{18-73}$$

величина

$$\zeta_{\text{г}} = \frac{l - 0{,}5\,(s_1 + s_2)}{T} \tag{18-74}$$

(обозначения указаны на рис. 18-17);

при

$$l \leqslant 0{,}5\,(s_1 + s_2) \tag{18-75}$$

величина $\zeta_{\text{г}}$ для элемента $2-3$ принимается

$$\zeta_{\text{г}} = 0. \tag{18-76}$$

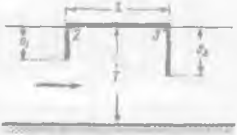

Рис. 18-17. К пояснению формулы (18-74)

7°. Построение эпюры противодавления, действующего на подошву плотины. Определив по найденной величине $T'_{\text{расч}}$ (см. выше п. 3°) положение расчетного водоупора и установив при таком его положении численные значения коэффициентов сопротивления для отдельных элементов контура (см. п. 6°), строим пьезометрическую линию $P-P$ для горизонтальных элементов контура, руководствуясь следующим правилом:

полный напор на сооружении Z [т. е. потеря напора вдоль всего подземного контура) должен распределяться между отдельными элементами контура прямо пропорционально численным значениям их коэффициентов сопротивления.

Согласно этому правилу, потеря напора $(h_f)_n$ на длине некоторого n-го элемента контура будет

$$(h_f)_n = \frac{Z}{\sum \zeta}\,\zeta_n, \tag{18-77}$$

где ζ_n – коэффициент сопротивления рассматриваемого n-го элемента контура.

Вычислив по формуле (18-77) потерю напора на длине каждого элемента контура (h_{I}, h_{II}, h_{III}, h_{IV} и h_{V})[1], строим по этим потерям напора пьезометрическую линию $P-P$ и получаем искомую эпюру противодавления (см. площадь, заштрихованную на рис. 18-16).

8°. Определение максимального выходного пьезометрического уклона на поверхности дна нижнего бьефа. Максимальный выходной градиент $J_{\text{вых}}$ будет иметь место в точке 6 (см. рис. 18-16).

Определив по величине $T'_{\text{расч}}$ расчетное положение водоупора и установив при этом положении водоупора значения ζ, величину $J_{\text{вых}}$ находим по формуле, полученной исходя из решения С. Н. Нумерова, относящегося к схеме на рис. 18-15, б,

$$J_{\text{вых}} = \frac{Z}{T_1}\,\frac{1}{\alpha \sum \zeta}, \tag{18-78}$$

где

$$\alpha \approx \sqrt{\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{s}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} + 1\right)\right]}; \tag{18-79}$$

---

[1] Вместо $(h_f)_{\text{I}}$, $(h_f)_{\text{II}}$, $(h_f)_{\text{III}}$ и т. д. здесь пишем просто h_{I}, h_{II}, h_{III} и т. д.

здесь T_1 – заглубление водоупора под дном нижнего бьефа (см. рис. 18-16, где указаны также величины T_2 и s, относящиеся к выходному шпунту).

Более точное значение α можно определить по особому графику [18-10]. Для глубокого заложения водоупора, когда мы принимаем $T''_{расч} = T'_{акт}$, формула (18-78) дает несколько заниженное значение $J_{вых}$. В связи с этим в правую часть формулы (18-78) следует вводить поправочный множитель, равный 1,1

В случае так называемого **чистого шпунта** при действительном водоупоре, заложенном весьма глубоко, $J_{вых}$, согласно гидромеханическому решению Н. Н. Павловского,

$$J_{вых} = 0{,}318\,\frac{Z}{s} \tag{18-80}$$

Умножая найденное $J_{вых}$ на коэффициент фильтрации k, находим наибольшую скорость фильтрации на поверхности дна нижнего бьефа (в точке $б$).

9°. Определение фильтрационного расхода. Определив при $T''_{расч} = T_д$ коэффициенты ζ, величину удельного фильтрационного расхода находим по формуле

$$q = \frac{Z}{\sum \zeta}\,k \tag{18-81}$$

Как отмечалось, эта формула при больших значениях $T_д$ дает только грубо приближенное значение q.

10°. Дополнительное замечание о построении эпюры противодавления. При построении эпюры противодавления надо различать особый случай, когда входной или выходной элемент контура характеризуется соотношением (см. рис. 18-16)

$$\frac{s}{T_1} < \frac{1}{4}\left(\frac{T_2}{T_1} - \frac{1}{3}\right), \tag{18-82}$$

т. е. когда подземный контур имеет входной или выходной элемент, близкий или совпадающий с **плоским** входом или выходом

При наличии соотношения (18-82) найденная выше потеря напора $h_{вх}$ или $h_{вых}$, обозначенная на чертеже через h_I или h_V, может иногда значительно отличаться от **действительной** потери напора на входном или выходном элементе. Обозначим эту действительную потерю через $(h_{вх})_д$ или $(h_{вых})_д$

Расхождение в величинах $h_{вх}$ и $(h_{вх})_д$ или $h_{вых}$ и $(h_{вых})_д$ носит местный характер, в связи с чем этим расхождением часто можно пренебречь. Однако при желании указанную погрешность, возникающую при наличии соотношения (18-82), легко можно устранить. При этом поступаем следующим образом

а) вычисляем действительные значения потерь напора $(h_{вх})_д$ и $(h_{вых})_д$ по формулам:

$$(h_{вх})_д = \delta h_{вх}; \quad (h_{вых})_д = \delta h_{вых}, \tag{18-83}$$

где при

$$0{,}7 \leq (T_2 : T_1) \leq 1{,}0$$

величина

$$\delta \approx \sqrt{\sin\left[\frac{3}{4}\pi\left(4\,\frac{s}{T_1} + 1 - \frac{T_2}{T_1}\right)\right]}, \tag{18-84}$$

предельное максимальное значение: $\delta = 1$;

б) зная $(h_{вх})_д$ и $(h_{вых})_д$, обращаемся к рис. 18-18, где $PN'P$ есть та пьезометрическая линия, которая была построена выше (см. п. 6°).

Откладывая, как показано на чертеже, отрезок $(h_{вых})_д$, получаем точку N; далее на линии $PN'P$ намечаем точку M на расстоянии от конца флютбета, равном $0{,}1l$, где l — длина флютбета; затем соединяем точки N и M прямой. Искомая уточненная пьезометрическая линия будет иметь вид $PMNP$; участок $MN'N$ отбрасываем.

11°. Способ удлиненной контурной линии. Этот весьма простой способ представляет собой графическое оформление метода коэффициентов сопротивления, относящееся к распластанной схеме подземного контура [см. соотношение (18-53)], а также к некоторым случаям промежуточной схемы [см. соотношение (18-55)].

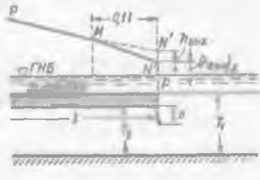

Рис. 18-18. Местное исправление полученной пьезометрической линии в случае выходного элемента близкого к «плоскому выходу»

Согласно данному способу при построении эпюры противодавления поступаем следующим образом.

Определяем, как указано в п. 4, расчетное заглубление водоупора $T'_{расч}$. Далее, исходя из этого положения водоупора, устанавливаем величину $T_{ср}$, представляющую собой среднее заглубление водоупора под дном верхнего и нижнего бьефов, а также под отдельными горизонтальными участками подземного контура.

Затем разворачиваем заданный подземный контур (рис. 18-19, *а*) в горизонтальную прямую AB, показанную на рис. 18-19, *б*. Длина этой линии равна длине подземного контура L.

После этого от точек A и B полученной линии соответственно влево и вправо откладываем горизонтальные отрезки, равные

$$\lambda_0 = 0{,}44T_{ср}.$$

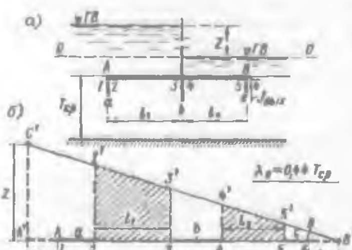

Рис. 18-19. Построение эпюры противодавления для распластанных схем по способу удлиненной контурной линии Р. Р. Чугаева

При этом получаем удлиненную контурную линию $A'B'$, длина которой равна λ.

Откладываем далее от точки A' по вертикали вверх отрезок, равный напору на сооружении Z, получаем точку C'. Соединяя точку C' с точкой B' прямой линией, получаем площади, показанные на рис. 18-19, *б* штриховкой. Эти площади представляют собой эпюры напоров для горизонтальных элементов контура $2-3$ и $4-5$. При таком построении имеем в виду, что плоскость сравнения OO, от которой отсчитываются напоры, проведена на уровне горизонта воды нижнего бьефа.

Получив указанные эпюры напоров, строим искомые эпюры противодавления. С этой целью к ординатам найденных эпюр напора прибавляем величины заглубления соответствующих точек подземного контура под уровнем воды нижнего бьефа

Пользуясь данным способом, можно с некоторым приближением определить также величину $J_{вых}$ и величину напора на острие выходного шпунта [18-7].

Надо заметить, что введение в расчет двух поясненных выше отрезков λ_0 позволяет нам учесть дополнительные потери напора, возникающие в результате поворотов фильтрационного потока (на 90°), имеющих место в области входного и выходного элементов подземного контура. В остальном, согласно способу удлиненной контурной линии, напор вдоль линии подземного контура падает по линейному закону (что и имеет место для рассматриваемых схем контура).

§ 18-13. ПОСТРОЕНИЕ ГИДРОИЗОГИПС БЕЗНАПОРНОГО ПОТОКА НА ОСНОВЕ ЗАМЕНЫ ЕГО НАПОРНЫМ ПОТОКОМ (ПЛАНОВАЯ ЗАДАЧА)[1]

Рассмотрим два разных потока, имеющих одинаковое очертание (любого вида) в плане:

I поток (рис. 18-20, *а*): безнапорный, который назовем действительным, причем будем считать, что этот поток имеет вид, позволяющий заменить его уже знакомой нам «моделью Форхгеймера» (см. § 17-11);

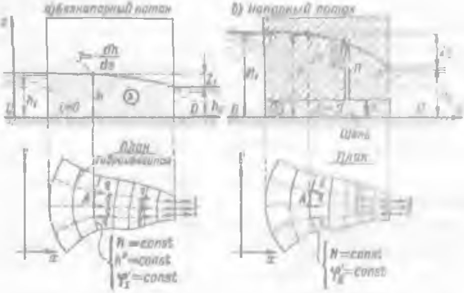

Рис. 18-20. К пояснению плановой задачи фильтрации

II поток (рис. 18-20, *б*): напорный — в плоской горизонтальной «щели» (высотой, равной *a*), заполненной грунтом, имеющим тот же коэффициент фильтрации *k*, что и грунт, образующий упомянутую модель Форхгеймера; этот напорный поток будем называть «воображаемым».

Наметим на планах двух рассматриваемых потоков ряд линий тока *s*. Обозначим: глубины первого потока в различных точках его плана через *h*; напоры второго потока в различных точках его плана через *H*, причем плоскость сравнения *OO* наметим, как указано на чертеже. Для любой точки плана первого и второго потоков (см., например, точку *A*) «расход в точке» *q* (см. § 15-1) может быть представлен в виде:

а) для первого потока

$$q = -kh\frac{dh}{ds}, \tag{18-85}$$

[1] Данный вопрос был решен Ф. Форхгеймером. Некоторое развитие этого вопроса дано в работах В. И. Аравина.

б) для второго потока

$$q = -ka\,\frac{dH}{ds}, \tag{18-86}$$

где h и H являются функциями координат x и y.

Из сказанного ясно, что план каждого из двух потоков на рис. 18-20 может рассматриваться как векторное поле «расходов в точке» q, выражаемых соответственно формулой (18-85) или (18-86).

Легко показать (см. § 18-4), что оба упомянутых векторных поля описываются уравнением Лапласа (18-18):

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0, \tag{18-87}$$

где φ' — потенциальная функция векторного поля q, имеющая разные выражения для первого и второго потоков:

для первого потока

$$\varphi' = \varphi'_{\mathrm{I}} = -\frac{kh^2}{2}; \tag{18-88}$$

для второго потока

$$\varphi' = \varphi'_{\mathrm{II}} = -kaH. \tag{18-89}$$

Рис. 18-21. К пояснению замены безнапорного потока «плановым» напорным потоком

Действительно, величины φ'_{I} и φ'_{II} являются функциями только координат x и y; частные же производные от функций (φ'_{I}) и (φ'_{II}) по координатам дают выражения, которые легко приводятся соответственно к зависимостям (18-85) и (18-86).

Подставляя (18-88) и (18-89) в (18-87), получаем, после сокращения постоянных, два разных дифференциальных уравнения второго порядка:

1-е уравнение, относящееся к первому (действительному) потоку:

$$\frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2} = 0; \tag{18-90}$$

2-е уравнение, относящееся ко второму (воображаемому) потоку

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \tag{18-91}$$

Очевидно, что функции $h(x, y)$ и $H(x, y)$, входящие в эти уравнения, должны удовлетворять существующим условиям на границах потоков.

Наложим друг на друга два рассматриваемых потока (рис. 18-21); пьезометрическая линия $P-P$ второго потока показана на этом чертеже штриховой линией. Дополнительно поставим условие, чтобы напоры H_1 и H_2 на границах второго (воображаемого) потока были равны:

$$H_1 = h_1^2 \text{ и } H_2 = h_2^2, \tag{18-92}$$

где h_1 и h_2 — глубины верхнего и нижнего бьефов действительного безнапорного потока (которые могут считаться заданными, как и очертание интересующего нас безнапорного потока в плане).

Сопоставляя при наличии пограничных условий (18-92) полученные выше уравнения (18-90) и (18-91), видим, что для всех точек области фильтрации (рассматриваемой в плане) должно иметь место равенство (полученное Форхгеймером):

$$h^2 = H, \tag{18-93}$$

т. е. при соблюдении равенств (18-92) и при наличии плоскости сравнения *OO*, проведенной по дну воображаемой щели, *квадрат глубины h безнапорного потока* (рис. 18-20, *а*) *в любой точке его плана равняется величине напора H в соответственной точке плана воображаемого напорного потока, получающегося в горизонтальной щели* (имеющей в плане то же очертание, что и действительный безнапорный поток).

Отсюда можно сделать следующий вывод: если наложить друг на друга планы действительного и воображаемого потоков (рис. 18-20), то линии $h^2 = \text{const}$, намеченные для действительного потока, будут в точности совпадать с линиями равного напора (линиями $H = \text{const}$), построенными для воображаемого напорного потока. Следовательно, линии $h = \text{const}$, т. е. гидроизогипсы безнапорного потока, должны в точности совпадать с линиями $H = \text{const}$, причем глубины h, отвечающие гидроизогипсам действительного безнапорного потока, будут определяться формулой:

$$h = \sqrt{H}, \tag{18-94}$$

где H — величина напора, соответствующая линии равного напора ($H = \text{const}$), совпадающей с данной гидроизогипсой и построенной в предположении, что соблюдаются равенства (18-92) и что плоскость сравнения намечена, как указано выше.

Таким образом, для построения гидроизогипс (т. е. в данном случае линий $h = \text{const}$) любого безнапорного потока, имеющего вид, близкий к «модели Форхгеймера» (рис. 18-20, *а*), необходимо найти (например, по методу ЭГДА) линии равного напора H для воображаемого напорного потока в горизонтальной щели (рис. 18-20, *б*) с соблюдением отмеченных выше условий в отношении H_1 и H_2 [см. рис. 18-21 и формулу (18-92)]; далее, приняв эти линии за гидроизогипсы, следует определить для них глубины h по формуле (18-94).

Пользуясь этим методом, легко можно строить гидроизогипсы безнапорных потоков, получающихся при фильтрации воды в берегах в обход устоев бетонных плотин, при фильтрации воды, поступающей в котлованы различной геометрической формы в плане и т. п. При решении таких задач исходную зависимость (18-93) иногда несколько преобразовывают: величину H выражают, например, через приведенный напор H_r (см. § 18-9) и т. п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

18-1. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. — М.: Гостехиздат, 1953.

18-2. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. — М.: Госстройиздат, 1955.

18-3. **Дружинин Н. И.** Метод электрогидродинамических аналогий и его приложение при исследовании фильтрации. — М. — Л.: Госэнергоиздат, 1956.

18-4. **Дружинин Н. И.** Изучение региональных потоков подземных вод методом электрогидродинамических аналогий. — М.: Недра, 1966.

18-5. **Павловский Н. Н.** Собрание сочинений. Т. II. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

18-6. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977.

18-7. **Руководство** по проектированию и расчету подземного контура плотин на нескальном основании и их сопрягающих устоев (издание второе). — Л.: Энергия, 1978.

18-8. **Технические условия** и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Подземный контур плотин на нескальном основании. МЭС — 125 — 57. — М. — Л.: Госэнергоиздат, 1958.

18-9. **Фильчаков П. Ф.** Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, Т. I и Т. II. — Киев: Изд-во АН УССР, 1959 и 1960.

18-10. **Чугаев Р. Р.** Подземный контур гидротехнических сооружений/(проектирование подземных частей плотин на нескальном основании). - Л.: Энергия, 1974