ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ[1]

ПЛАНОВАЯ ЗАДАЧА ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ БЕЗНАПОРНОМ ДВИЖЕНИИ ВОДЫ

§ 15-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Будем рассматривать только турбулентное движение воды, отвечающее квадратичной области сопротивления. Представим на рис. 15-1 безнапорный резко изменяющийся в плане поток воды. Направление осредненных скоростей движения воды этого потока будем считать близким к горизонтальному.

Для расчета такой действительный поток в соответствующих случаях можно заменить с некоторым приближением условным потоком («неполной воображаемой моделью»), имеющим внешние границы такие же, как у действительного потока, и обладающим следующим свойством:

живые сечения условного потока представляют собой цилиндрические поверхности с вертикальными образующими.

Такого рода модель действительного потока характеризуется рядом особенностей.

а) цилиндрические поверхности, проведенные ортогонально к намеченным цилиндрическим живым сечениям, являются поверхностями тока;

б) живые сечения воображаемого потока и отмеченные поверхности тока, будучи спроектированы на горизонтальную плоскость, дают нам две системы линий (любой кривизны), причем совокупность этих двух систем образует в плане ортогональную сетку, которую можно назвать «гидродинамической сеткой».

Рис. 15-1. Модель Бернадского («плановый поток»): *а* — вертикальный разрез потока, *б* — план потока (векторное поле расходов q)

в) вертикальные составляющие осредненных скоростей для рассматриваемой модели турбулентного потока равны нулю; при этом давление вдоль любой вертикали, проведенной внутри воображаемого потока, распределится по линейному закону;

г) векторы горизонтальных осредненных скоростей, относящиеся к различным точкам любой рассматриваемой вертикали, проведенной внутри воображаемого потока, лежат в одной вертикальной плоскости.

Описанный условный поток может быть назван моделью Бернадского[2] или «плановым потоком».

[1] Эта глава написана при участии А. А. Турсунова.

[2] Поскольку Н. М. Бернадский в 1933 г. первый начал исследовать такого рода потоки и впервые применил такую модель [Н. М. Бернадский. Теория турбулентного потока и ее применение в построении течений в открытых водоемах. — В кн.: Материалы по гидрологии, гидрографии и водным силам. — М.: Теплоэлектропроект, 1933.].

Обозначим через $v_в$ скорость, являющуюся средней из скоростей u, относящихся к разным точкам вертикали AB, проведенной через произвольную точку A плана потока (см. рис. 15-1). Легко видеть, что в случае «планового потока» каждая точка его плана характеризуется определенной скоростью $v_в$.

Равным образом каждая точка плана потока характеризуется вполне определенным вектором q, длина (модуль) которого равна

$$q = hv_в, \tag{15-1}$$

где h — глубина потока в данной точке. В связи с этим весь поток в плане может быть представлен как векторное поле величин q, модули которых выражаются зависимостью (15-1).

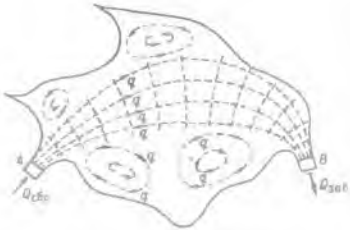

Рис. 15-2. *Пример потока в плане (пруд-охладитель)*

Векторная величина q представляет собой плотность распределения расхода в плане по рассматриваемому живому сечению; эту величину можно назвать «плотностью расхода» или «расходом в точке плана». Разумеется, не следует смешивать указанную векторную величину со скалярной величиной q, которую мы выше называли «удельным расходом».

В дальнейшем, пользуясь зависимостью (15-1), условимся опускать индекс «в» у средней скорости $v_в$; однако этот индекс всюду (в данной главе) следует подразумевать у скорости v и не смешивать среднюю скорость для вертикали (например, для вертикали AB; рис. 15-1, a) со средней скоростью для живого сечения.

Ясно, что при указанной постановке вопроса мы можем, рассматривая план потока, интересоваться, например, «удельной энергией вертикали» Э в точке плана потока:

$$Э = h + \frac{v^2}{2g}, \tag{15-2}$$

а также критической глубиной $h_к$ в точке плана потока:

$$h_к = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}, \tag{15-3}$$

где q — длина (модуль) вектора расхода в точке плана потока.

В качестве примера действительных потоков, которые можно для расчета заменить моделью Вернадского, приведем следующие:

1) на рис. 15-2 представлен так называемый пруд-охладитель: в точке A этого пруда сбрасывается расход $Q_{сбр}$ воды, прошедшей через теплоэлектростанцию, где эта вода нагрелась (при охлаждении ею тех или других агрегатов) до определенной температуры; в точке B пруда из него забирается расход $Q_{заб}$ воды, охладившейся в пруде и подаваемой снова на теплоэлектростанцию. При расчете процесса охлаждения воды в пруде приходится интересоваться поясненным выше полем расходов q;

2) на рис. 15-3 представлен план так называемой подходной выемки A, обеспечивающей подвод воды к какому-либо водосливу $Б$, устроенному, например, на берегу реки (сбоку плотины $В$). Здесь мы также получаем поток,

который можно для расчета заменить моделью Бернадского. Подобного рода подходные выемки проектируют так, чтобы получить безотрывное обтекание водой берегов этой выемки. В связи с этим берега данных выемок в плане должны очерчиваться по боковым граничным линиям тока рассматриваемого потока. Кроме того, подходная выемка должна быть запроектирована так, чтобы распределение удельных расходов q воды вдоль фронта водослива *Б* было равномерным.

Примеры, приведенные на рис. 15-2 и 15-3, относятся к случаю спокойного движения воды, когда $h > h_к$, т.е. глубины потока h всюду больше критической глубины $h_к$.

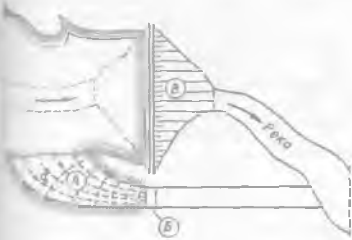

Рис 15-3 Пример потока в плане (подходная выемка *А* к водосливу *Б*)

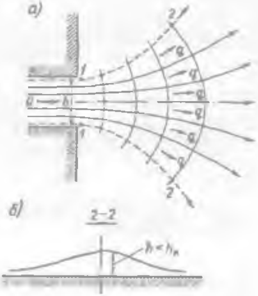

Рис. 15-4. Пример потока в плане (бурный поток в нижнем бьефе водосброса)

Достаточно часто в практике встречаются бурные потоки, при расчете которых также может быть использована поясненная выше модель. Для примера на рис. 15-4 представлен нижний бьеф какого-либо сооружения; бурный поток, поступающий в него из отверстия сооружения, шириной b, растекается в пределах нижнего бьефа, как показано на чертеже [см. граничные линии тока $1-2$ растекающейся струи на схеме (*а*) и разрез этой струи по живому сечению $2-2$ на схеме (*б*)].

Надо подчеркнуть, что вопросы «планового движения» воды осложняются следующими обстоятельствами, существенными в практическом отношении:

1) в случае спокойного движения (когда $h > h_к$) при определенных условиях в том или другом месте потока мы можем получить отрыв «транзитной струи» от боковых стенок русла, причем в этом месте возникает водоворотная область, имеющая (при рассмотрении осредненного во времени движения) вертикальную ось (рис. 15-2);

2) в случае бурного движения (когда $h < h_к$) при определенных условиях на свободной поверхности потока могут возникнуть особые волны иногда большой высоты.[1]

С тем чтобы в общих чертах пояснить вопрос об этих волнах представим на рис. 15-5, *а* план быстротока, который имеет между сечениями $I-I$ и $II-II$

[1] В случае бурного потока иногда могут возникнуть также и упомянутые выше водоворотные области, но они здесь не имеют большого значения.

сужение, образованное стенками AB. При наличии такого сужения отдельные струйки бурного потока (см. на рис. струйки 1, 2, 3) набегают с большой скоростью на стенки AB; при этом свободная поверхность потока резко поднимается кверху, что и обусловливает возникновение волн. Эти волны налагаются друг на друга и уносятся вниз по течению. В результате возникновения таких волн (в данном примере положительных) и их интерференции свободная поверхность потока в месте его сужения и далее по течению приобретает резко выраженную волнообразную форму [см. на рис. 15-5 схему (*б*), где представлен продольный разрез потока, и схему (*в*), где изображено поперечное сечение потока по линии MN]. Такого рода установившиеся, неизменные во времени, волны (косые в плане по отношению к продольной оси потока), возникающие на свободной поверхности потока в случае его деформации (в плане), существенно изменяют ту картину движения воды в пределах сооружения, которую мы описывали в гл. 14, когда говорили только о **плоской задаче** движения воды в быстротоках. Волны (косые в плане) на свободной поверхности иногда достигают большой высоты, причем их часто приходится учитывать при назначении размеров проектируемого сооружения (высоты бортов быстротоков и т. п.).

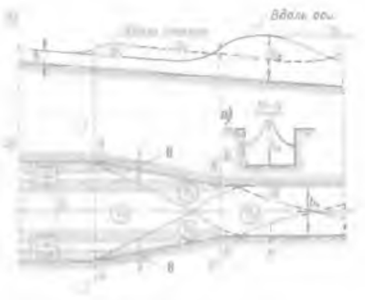

Рис. 15-5. Косые волны на поверхности потока, возникающие при его сужении

Вопрос об установлении границ водоворотных областей (в плане) в случае **спокойного** *потока, затронутый нами на стр. 511, как мы видели, осложняется* в частности, тем, что при наличии спокойного движения всегда приходится учитывать потери напора; в этом случае силы трения являются соизмеримыми с силами инерции движущейся воды, и потому модель идеальной жидкости в данном случае является, как правило, неприемлемой. В случае бурного потока достаточно часто силами трения можно пренебрегать и пользоваться моделью идеальной жидкости. В связи с этим бурные потоки оказываются более доступными для их анализа.

Вместе с тем, рассматривая бурный поток, приходится решать ряд специальных задач, касающихся вопроса о возникновении на их свободной поверхности указанных выше волн.

Стремясь «управлять» бурным потоком, т. е. изменять его форму и направление (так, однако, чтобы при этом не образовывались большие волны и не нарушалось равномерное распределение расхода q по ширине русла), в настоящее время устраивают особые русла с криволинейным дном и криволинейными боковыми стенками. В воде, движущейся в таких руслах, возникают большие силы инерции, используя которые и добиваются практически приемлемой деформации бурного потока.

Вопрос о плановой задаче может дополнительно осложняться, когда бурный плановый поток переходит в спокойный плановый поток. В этом случае в месте такого перехода получается иногда гидравлический прыжок особого вида — так называемый **косой гидравлический прыжок**.

Ниже приведем соответствующие дифференциальные уравнения, описывающие плановый (двухразмерный в плане) поток (спокойный и бурный), а также дадим общие указания о решении этих уравнений. Кроме того, приведем еще краткое пояснение вопроса о косых волнах. Вопроса о расчете упомянутых выше криволинейных русел (так называемых **в и р а ж е й и р а с с е и в а ю щ и х т р а м п л и н о в**) касаться не будем.

§ 15-2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЗКО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ (В ПЛАНЕ) БЕЗНАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ И ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИХ РЕШЕНИИ

Рассматриваемое движение воды, заменяемое для расчета воображаемой моделью Бернадского, может быть описано тремя дифференциальными уравнениями: одним уравнением баланса расхода и двумя уравнениями динамического равновесия.

1°. Уравнение баланса расхода. Будем иметь в виду только случай русла с плоским г о р и з о н т а л ь н ы м дном ($i = 0$). Оси координат Ox и Oy расположим в плоскости этого дна (рис. 15-6); глубины h потока будем измерять вдоль вертикальной оси Oz.

Наметим на дне потока произвольную точку A, причем у этой точки выделим в пределах потока параллелепипед (рис. 15-6), имеющий бесконечно малую площадь основания (равную $dx\,dy$) и высоту, равную h. Считаем, что данный параллелепипед неподвижен в пространстве, причем вода протекает через его вертикальные (боковые) грани. Далее рассуждаем так же, как и в § 3-10: подсчитываем объем воды, вошедший в наш параллелепипед, и объем воды, вышедший из него, причем оба этих объема приравниваем друг другу. В результате такой операции и получаем искомое дифференциальное уравнение (относящееся к любой заданной точке плана потока) в виде

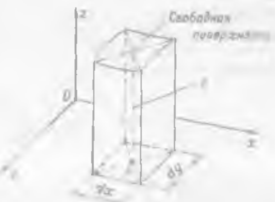

Рис. 15-6. К выводу уравнения баланса расхода

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x}(hv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_y) = 0, \qquad (15\text{-}4)$$

где q_x и q_y – проекции вектора q на соответствующие оси координат (рис. 15-1); v_x и v_y – проекции средней скорости для рассматриваемой вертикали на те же оси (Ox и Oy).

На основании уравнений (15-4) можем утверждать следующее: на сколько увеличивается расход q вдоль оси Ox, *настолько же он должен уменьшаться вдоль оси Oy*. Только при этом условии вода (в случае безнапорного у с т а н о в и в ш е г о с я движения) будет двигаться сплошным потоком без образования разрывов (см. план потока на рис. 15-1).

2°. Уравнения динамического равновесия. Будем пренебрегать потерями напора, т. е. считать воду идеальной жидкостью; как и выше, будем рассматривать русло с горизонтальным дном ($i = 0$). При этом приложим известные уравнения Эйлера (3-6) (которые представляют собой уравнения динамического равновесия, составленные для элементарного объема жидкости) к единице массы жидкости, заполняющей в данный момент времени параллелепипед, представленный на рис. 15-6.

Используя уравнения Эйлера, учтем следующее:

а) в случае рассматриваемого планового движения скорости u_x, u_y и u_z, входящие в уравнения Эйлера, пренебрегая неравномерностью распределения скоростей u по вертикалям, следует считать

$$u_x = v_x; \; u_y = v_y; \; u_z = v_z = 0;$$

б) для у с т а н о в и в ш е г о с я движения т я ж е л о й жидкости (т. е. жидкости, находящейся под действием объемных сил тяжести) можно написать

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0, \quad \phi_x = \phi_y = 0, \quad \phi_z = -g,$$

где g — ускорение силы тяжести

Подставляя указанные соотношения в уравнения Эйлера (3-6) и учитывая дополнительно равенство (3-8), получаем следующую систему уравнений, отнесенную к единице массы рассматриваемой воды

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}; \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15-5}$$

Пренебрежем атмосферным давлением (положим, что $p_a = 0$). Учитывая, что для точек дна потока величина $z = 0$, а для точек свободной поверхности потока, лежащей на данной вертикали $z = h$, получаем, после интегрирования 3-го уравнения системы (15-5) по координате z, следующую зависимость

$$p = (h - z)\gamma, \tag{15-6}$$

где z — координата любой точки, намеченной на рассматриваемой вертикали (возвышение точки над дном); p — гидродинамическое давление в этой точке. Ясно, что согласно (15-6), давление в точке свободной поверхности $p = 0$, а давление в точке у дна (для которой $z = 0$) равняется

$$p = \gamma h \tag{15-7}$$

Как видно из (15-6), *для описанной выше модели Бернадского гидродинамическое давление p изменяется вдоль любой вертикали, намеченной внутри потока, согласно гидростатическому закону* (что уже отмечалось выше)

Рассматривая любую точку потока, взятую на той или другой вертикали, подставляем величину p, определяемую равенством (15-6), в первые два уравнения системы (15-5); при этом, учитывая, что $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, получаем два искомых уравнения динамического равновесия (относящихся к любой точке плана потока):

$$\left.\begin{aligned} &\text{(II)} \qquad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial x}; \\ &\text{(III)} \qquad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{15-8}$$

3°. Общие замечания о решении дифференциальных уравнений (I), (II) и (III). Полученные выше три уравнения (I), (II) и (III) представляют собой системы трех уравнений с тремя неизвестными

$$v_x = f_1(x, y), \; v_y = f_2(x, y); \; h = f_3(x, y). \tag{15-9}$$

Эта система впервые была получена Н. Т. Мелещенко в 1940 г.[1]

Решив данную систему уравнений, будем иметь возможность при заданных пограничных условиях построить для случая, когда у боковых стенок отсутствуют водоворотные области, свободную поверхность потока и найти средние скорости v в любой точке плана потока.

[1] См. Н. Т. Мелещенко. Плановая задача гидравлики открытых водотоков.— Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, т. 36, 1948 (статья составлена С. Н. Нумеровым на основе отчета Н. Т. Мелещенко по работе: «Разработка вопросов двухразмерной гидравлики в связи с изучением растекания потока в плане» во ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева в 1940 г.).

Анализ этой системы трех уравнений показывает, что способы решения ее оказываются различными для спокойного и для бурного движения:

в случае спокойного движения (когда $h > h_к$) данная система приводится к уравнению эллиптического типа, причем решение задачи об отыскании скоростей v в различных точках плана потока иногда может быть осуществлено при помощи метода конформных отображений;

в случае бурного движения (когда $h < h_к$) данная система приводится к уравнению гиперболического типа, причем для решения задачи могут применяться специальные графоаналитические методы

Приведем еще следующие дополнительные общие указания в отношении двух указанных случаев.

1 Спокойное движение Как было отмечено (в § 15-1), специальные исследования показывают, что в этом случае, как правило, не представляется возможным пренебрегать потерами напора. Существуют два метода учета сил сопротивления:

а) первый метод, согласно которому силы сопротивления рассматриваются как силы объемные, равномерно распределенные по глубине и исчисляемые по формуле Шези; этот метод был использован С. Н. Нумеровым,[1] который показал, что при рассмотрении поставленного вопроса данная задача с некоторым приближением может быть решена при помощи метода ЭГДА (см. § 18-11);

б) второй метод, согласно которому силы сопротивления рассматриваются как силы поверхностные. исчисляемые также по формуле Шези и в соответствующих случаях с учетом турбулентных касательных напряжений; по этому пути шел Н М. Бернадский, причем он записывал уравнения (I), (II) и (III) применительно к криволинейным осям координат (одна ось направлена вдоль линии тока, другая — вдоль живого сечения в плане).

2. Бурное движение. В данном случае очень часто можно пренебрегать силами сопротивления (трения), что мы выше в делали. Здесь для решения задачи, согласно предложению Н. Т. Мелещенко, может быть использован особый разработанный им графоаналитический метод, аналогичный методу характеристик, примененному С А Христиановичем для решения задачи неустановившегося движения (см. § 9-14). Заметим, что имеются предложения отдельных авторов (С. Н. Нумерова, Ф. И. Франкля, Б. Т. Емцева), позволяющие при рассмотрении бурных потоков учитывать силы сопротивления и относительно небольшие уклоны дна русла. Н. Т. Мелещенко дал точное решение одного частного случая планового бурного движения жидкости (при $i = 0$), когда это движение можно рассматривать как потенциальное.

§ 15-3. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПЛАНОВЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрим две особенности плановых потоков.

1°. О распространении волн возмущений, возникающих на свободной поверхности потока, в случае спокойного и в случае бурного движений. В гл. 9, В были рассмотрены «волны перемещения», возникающие при особых условиях на свободной поверхности безнапорного неустановившегося потока. Было отмечено, что эти волны могут быть: а) или положительными; лоб этих волн оказывается ограниченным почти вертикальной плоскостью; б) или отрицательными; лоб таких волн оказывается пологим (см., например, рис 9-30, *в*, *г*). В § 9-15 было указано, что при движении идеальной жидкости относительная скорость c перемещения лба волны (по отношению к движущейся или покоящейся воде) может быть с некоторым приближением в случае, когда высота волны ξ мала сравнительно с глубиной потока h, принята

$$c = \sqrt{gh}. \tag{15-10}$$

[1] С. Н Нумеров. К вопросу о построении плана спокойных течений – Известия ВНИИГ, т. 42. 1950.

В дальнейшем указанные волны будем называть волнами возмущения, а скорость c – относительной скоростью распространения малых возмущений; лоб волны в плане будем именовать фронтом волны.

Представим на рис. 15-7 план потока воды, движущейся равномерно в широком прямоугольном русле, причем будем считать, что на рис. 15-7,*а* изображено спокойное движение (когда $v < c$, см. § 9-16), а на рис. 15-7,*б* – бурное движение (когда $v > c$).

Если в некоторой точке A рассматриваемого потока в момент времени t_0 мгновенно установим вертикальный тонкий стержень, то в этот момент t_0, благодаря набеганию воды на данный стержень на свободной поверхности

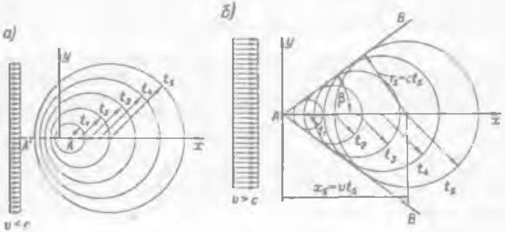

Рис. 15-7. Распространение волн возмущения на свободной поверхности потока: *а* – спокойное движение, *б* – бурное движение

потока в точке A возникает круговая (в плане) волна возмущения (будем считать ее положительной). Фронт этой положительной волны будет перемещаться (по отношению к воде, движущейся с продольной скоростью v) с относительными скоростями c, причем радиус данной круговой волны будет с течением времени увеличиваться.[1]

При этом для спокойного и для бурного потоков получим принципиально различные картины формирования (во времени) свободной поверхности потока:

а) при спокойном движении воды точки фронта круговой волны, лежащие на продольной оси $A'x$, будут перемещаться (в неподвижном пространстве): правая точка – по течению, со скоростью $v + c$, и левая точка – против течения, со скоростью $v - c$ (см. рис. 15-7,*а*, на котором отдельными окружностями представлены положения фронта рассматриваемой волны, отвечающие различным моментам времени t_1, t_2, t_3, t_4, t_5);

б) при бурном движении воды точки фронта круговой волны, лежащие на продольной оси Ax, будут перемещаться (в неподвижном пространстве) только по течению, с теми же скоростями: $v + c$ и $v - c$ (см. рис. 15-7,*б*, где отдельные окружности являются фронтами отдельных круговых волн возмущения, возникающих у стержня в различные моменты

[1] Указанный стержень является условной моделью, при помощи которой мы генерируем в точке A свободной поверхности возмущения ее в виде только положительной круговой в плане волны (или в виде положительных круговых в плане волн). В действительности положительная волна возникает только перед стержнем; за стержнем будет образовываться отрицательная пологая волна, которая, однако, будет также распространяться со скоростью c в радиальном направлении.

времени; в частности, волна, зародившаяся у стержня в момент времени t_0, по истечении отрезка времени t_5, будет иметь вид окружности, отмеченной на рисунке, t_5; волна же зародившаяся у стержня в момент t_1, по истечении отрезка времени t_4, будет иметь вид окружности t_4).

В свете сказанного, легко видеть следующее (рис. 15-7):

а) в случае спокойного движения фронт одной волны, возникшей в точке A, по истечении продолжительного времени t уйдет за пределы интересующей нас области, и в пределах этой области мы не будем иметь на свободной поверхности какой-либо волны; здесь останется только некоторая местная установившаяся деформация свободной поверхности, обусловленная набеганием воды на вертикальный стержень, находящийся в точке A;

б) в случае бурного движения на свободной поверхности потока должна установиться по линиям AB (при наличии стержня в точке A) стационарная волна: ее фронт и ее высота в разных точках фронта будут неизменными во времени. Лобовая поверхность данной стационарной волны является поверхностью, огибающей круговые волны возмущения, постоянно возникающие в точке A и сносимые потоком вниз по течению. Можно сказать, что лоб AB указанной стационарной волны является установившейся волновой границей, вдоль которой движутся непрерывно возникающие в точке A волны возмущения. Исходя из сказанного выше, легко найти величину угла β, определяющего направление фронта AB стационарной волны (см. рис. 15-7, *б*):

$$\sin\beta = \frac{r_5}{x_5} = \frac{ct_5}{vt_5} = \frac{c}{v}. \tag{15-11}$$

Как видно, в случае $v = c$ величина β оказывается равной 90°.

Поясненная стационарная волна называется косой волной (в данном примере положительной). Фронт AB этой косой волны иногда называют линией возмущения, а угол β — волновым углом.

Не следует смешивать стационарную косую волну на поверхности воды с круговыми волнами возмущения, зарождающимися в точке A.

2°. Об изменении скорости v и глубины h вдоль расширяющихся и вдоль сужающихся в плане потоков при спокойном и при бурном движениях. Рассмотрим элементарную струйку планового потока (модели Бернадского), ограниченную двумя близко расположенными поверхностями тока (см. рис. 15-2 или 15-4, *а*). Переменную (вдоль течения) ширину этой струйки обозначим через b_0; тогда расход δQ данной струйки можно представить в виде

$$\delta Q = b_0 h v. \tag{15-12}$$

Для установившегося движения величина δQ должна оставаться постоянной вдоль струйки.

Из выражения (15-2) легко можно получить следующие зависимости:

$$h = Э - \frac{v^2}{2g} = \frac{2gЭ - v^2}{2g}; \tag{15-13}$$

$$2gЭ = 2c^2 + v^2, \tag{15-14}$$

где c — скорость распространения малых возмущений, определяемая по формуле (15-10).

Подставляя (15-13) и (15-12), находим ширину элементарной струйки

$$b_0 = \frac{\delta Q}{hv} = \frac{2g\delta Q}{2gЭv - v^3}. \tag{15-15}$$

Для движения идеальной жидкости в прямоугольном горизонтальном русле величина «удельной энергии вертикали» Э должна оставаться одинаковой для всех точек плана потока. Имея это в виду, заключаем, что ширина b_0, согласно (15-13), зависит только от одной переменной величины – от скорости v.

Возьмем производную выражения (15-15) по v, учтя зависимости (15-13) и (15-14):

$$\frac{db_0}{dv} = -4g\delta Q \frac{(c^2 - v^2)}{(2gЭv - v^3)^2} \tag{15-16}$$

Выражение (15-16) показывает, как с изменением (вдоль потока) скорости v (а следовательно, и с изменением площади живого сечения элементарной струйки $\omega_0 = \delta Q : v$) изменяется ширина элементарной струйки b_0.

Пользуясь зависимостью (15-16) и учитывая, что знаменатель правой части ее всегда положителен, можно доказать справедливость следующих важных положений, относящихся к целому потоку идеальной жидкости, движущейся в прямоугольном горизонтальном русле:

1-е положение. В случае спокойного движения ($v < c$) имеем, согласно (15-16),

$$\frac{db_0}{dv} < 0;$$

следовательно:

а) для расширяющегося по течению русла, когда имеем также и расширяющиеся по течению элементарные струйки ($db_0 > 0$), скорость v должна уменьшаться по течению ($dv < 0$), а глубина h и площадь живого сечения потока ω должна увеличиваться по течению;

б) для сужающегося по течению русла ($db_0 < 0$) получаем обратную картину: скорость v увеличивается ($dv > 0$), а глубина h и площадь ω уменьшаются (по течению);

2-е положение. В случае бурного движения ($v > c$) имеем согласно (15-16):

$$\frac{db_0}{dv} > 0;$$

следовательно:

а) для расширяющегося по течению потока ($db_0 > 0$) скорость должна увеличиваться по течению ($dv > 0$), а глубина h и площадь живого сечения ω – уменьшаться по течению;

б) для сужающегося по течению потока ($db_0 < 0$) получаем обратную картину: скорость v должна уменьшаться ($dv < 0$), а глубина h и площадь живого сечения ω должны увеличиваться (по течению).

§ 15-4. ОБТЕКАНИЕ ПОТОКОМ БОКОВОЙ СТЕНКИ РУСЛА, ИМЕЮЩЕГО ПОВОРОТ В ПЛАНЕ

В качестве только примера использования теории «плановой задачи» в практике, рассмотрим вопрос о формировании свободной поверхности потока идеальной жидкости при обтекании ею боковой вертикальной стенки (при уклоне дна $i = 0$), имеющей малый угол $\Delta\theta$ поворота в плане (рис. 15-8).[1] Как ясно

[1] Дополнительные примеры использования данной теории (обтекание одной криволинейной стенки, построение плана свободной поверхности потока в прямоугольном русле ограниченной ширины, поворот бурного потока на угол $\Delta\theta$ и т. п.) – см. [15-4, с. 459 – 465].

из предыдущего, этот поворот (как и стержень, рассмотренный в § 15-3) должен порождать волны возмущения малой высоты.

Предварительно отметим, что пологий лоб отрицательной волны возмущения (см. § 15-3, п. 1°) в случае небольшой ее высоты для расчета можно заменить (с некоторым приближением) вертикальным. При таком допущении анализ формирования свободной поверхности плановых потоков в руслах различной формы значительно упрощается. Разумеется, результаты такого анализа, будучи отнесенными к отрицательным волнам, имеющим сравнительно большую длину, могут рассматриваться как справедливые только в качественном (но не в количественном) отношении.

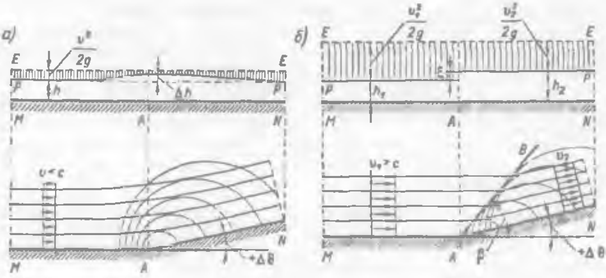

Рис. 15-8. Обтекание спокойным (*а*) и бурным (*б*) потоком внутреннего тупого угла

1°. Обтекание спокойным и бурным потоком внутреннего тупого угла, образованного в плане боковой стенкой. Рассмотрим равномерное течение воды вблизи твердой боковой вертикальной стенки MAN, имеющей малый угол поворота $+\Delta\theta$ в плане (рис. 15-8). Здесь для спокойного и бурного движений воды получим принципиально разные виды свободной поверхности установившегося потока.

При спокойном движении фронт, зародившейся в точке A (в момент времени t_0) волны возмущения, по истечении продолжительного времени t уйдет (так же как и в случае вертикального стержня на рис. 15-7, *а*) за пределы интересующей нас области, причем в районе точки A останется некоторый подпор величиной Δh (см. продольный разрез потока на рис. 15-8, *а*). Этот небольшой подпор при рассмотрении установившегося движения (оставшийся после того, как неустановившаяся волна возмущения уйдет на большое расстояние от точки A) может быть объяснен как следствие действия центробежных сил плавно поворачивающихся струек, а также еще тем, что скорость v в точке A несколько уменьшается.

В случае бурного движения картина получается аналогичной, представленной на рис. 15-7, *б*. Можно считать, что здесь в точке A (рис. 15-8, *б*) постоянно зарождаются волны (такие же как и в случае стержня, показанного на рис. 15-7, *б*), которые сносятся по течению, причем в конечном счете по линии AB возникает установившаяся (неизменная во времени) положительная косая волна (см. продольный разрез потока на рис. 15-8, *б*). Направление (в плане) фронта косой волны AB (вдоль которой движутся волны возмущения, зарождающиеся в точке A) определяется волновым углом β:

$$\sin\beta = \frac{c}{v_1}. \tag{15-17}$$

где v_1 — скорость потока перед косой волной. Что касается высоты волны ξ (малой величины), то эта высота может быть найдена из уравнения количества движения (особым образом использованного), которое приводит нас к следующей расчетной формуле:

$$\xi = \frac{v_1^2}{g}(\Delta\theta)\,\mathrm{tg}\,\beta. \tag{15-18}$$

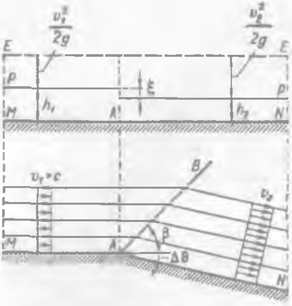

Рис. 15-9. Обтекание бурным потоком наружного тупого угла, образованного боковой стенкой русла

2°. Обтекание бурным потоком наружного тупого угла, образованного в плане боковой стенкой. При тех же условиях, что и в п. 1°, рассмотрим боковую стенку MAN, представленную на рис. 15-9. Условимся в данном случае угол $\Delta\theta$ считать отрицательным.

В отличие от схемы на рис. 15-8, *б*, на рис. 15-9 вдоль фронта AB, направление которого определяется формулой (15-17), получим косую установившуюся о т р и ц а т е л ь н у ю волну (см. продольный разрез потока); высота ее определяется по формуле (15-18).

Можно показать, что при обтекании бурным потоком внутреннего тупого угла (рис. 15-8, *б*) происходит с у ж е н и е в плане элементарных струек потока, а следовательно, и увеличение удельных расходов q. Наоборот, при обтекании бурным потоком наружного тупого угла (рис. 15-9) происходит р а с ш и р е н и е в плане элементарных струек, а следовательно, уменьшение удельных расходов q.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

15-1. Емцев Б. Т. Двухмерные бурные потоки. — М.: Энергия, 1967.

15-2. Сунцов Н. Н. Методы аналогий в аэрогидродинамике. — М.: Физматгиз, 1958.

15-3. Сухомел Г. И. Вопросы гидравлики открытых русел и сооружений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1949.

15-4. Чугаев Р. Р. Гидравлика. — Л.: Энергия, 1975.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

§ 16-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ

В области, которая может быть названа *«моделированием»*, относящимся к исследованию тех или других физических явлений (в нашем случае — к исследованию движения жидкости), необходимо различать два совершенно различных вида м о д е л и р о в а н и я: