

стр. 204); 4) возникновение волн на поверхности воды различного происхождения [ветровых, корабельных, если канал судоходен, волн перемещения (см. гл. 9)]; 5) отклонение (в плане) динамической оси потока (вдоль которой мы имеем скорости u_{\max}) от геометрической оси потока, вызванное случайными причинами; при таком отклонении поток «прижимается» к одному берегу и скорости u у этого берега возрастают, что может способствовать размыву данного берега; здесь надо иметь в виду, что при больших β (например, при $\beta > 10,0$) динамическая ось канала является иногда недостаточно устойчивой (в плане); такая неустойчивость объясняется тем, что максимум эпюры скоростей (в плане), построенных для различных живых сечений, оказывается (при больших β) выраженным не резко.

Разумеется, «борьба» с некоторыми перечисленными «искажающими факторами» может осуществляться в процессе эксплуатации канала, при помощи соответствующих ремонтных работ. Вместе с тем, ряд других «искажающих факторов» приходится учитывать при расчете канала, вводя в расчет соответствующие коэффициенты запаса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 6-1. Агроскин И. И. Гидравлический расчет каналов.— М.-Л.: Госэнергоиздат, 1958.
- 6-2. Павловский Н. Н. Гидравлический справочник.— Л.-М.: ОНТИ НКТП, 1937.
- 6-3. Угичус А. А. Каналы и сооружения на них.— М.: Госстройиздат, 1952.
- 6-4. Угичус А. А. Гидравлические и технико-экономические расчеты каналов.— М.: Стройиздат, 1965.
- 6-5. Чертоусов М. Д. Гидравлика. Специальный курс.— М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962.
- 6-6. Чоу В. Т. Гидравлика открытых каналов.— М.: Стройиздат, 1969.
- 6-7. Чугаев Р. Р. Гидротехнические сооружения. Глухие плотины.— М.: Высшая школа, 1975.
- 6-8. Технические условия и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Деривационные каналы гидроэлектростанций.— М.-Л.: Госэнергоиздат, 1960.
- 6-9. СНиП II-52—74. Сооружения мелиоративных систем.— М.: Стройиздат, 1975.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

НЕРАВНОМЕРНОЕ БЕЗНАПОРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В КАНАЛАХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 7-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Как и в предыдущей главе, будем рассматривать только турбулентное движение воды, относящееся к квадратичной области сопротивления. При этом будем иметь в виду в основном неравномерное плавно изменяющееся движение. Данный случай движения представлен на рис. 7-1.¹

Если твердое тело начинает падать в воздушной среде, то вначале движение этого тела является ускоренным; по мере увеличения скорости падения данного тела сопротивление воздуха растет, поэтому ускоренное движение тела постепенно переходит в равномерное; при таком равномерном движении сила

¹ Рисунок 7-1, равно как и многие другие рисунки, приводимые далее (на которых изображается продольный профиль потока), представлен в искаженном масштабе.

тяжести тела уравнивается силой сопротивления воздуха. Если в цилиндрический канал будем подавать воду, то вначале объемы воды, попавшие в канал, будут двигаться неравномерно; однако по мере изменения их скорости должны изменяться и силы сопротивления (трения), препятствующие указанному движению; в конечном счете, и здесь силы тяжести воды уравниваются силами трения, и на некотором расстоянии от места поступления воды в канал получим равномерное движение. Всякий поток стремится, в конечном счете, принять равномерное движение, при котором работа сил тяжести равняется работе сил трения. Неравномерное движение воды в канале возникает в случае, когда мы тем или иным путем нарушаем режим равномерного движения.

Приведем примеры, когда в канале возникает безнапорный неравномерный режим движения воды, который, как известно, характеризуется в общем случае условиями:

$$h \neq \text{const (вдоль течения);}$$

$$v \neq \text{const (вдоль течения).}$$

Вопроса о деформации эпюры ос-

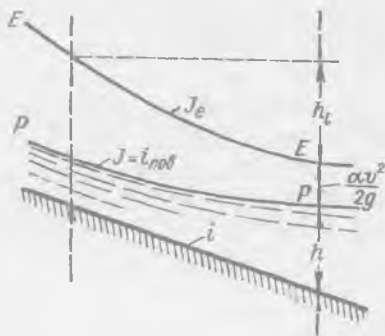


Рис. 7-1. Неравномерное движение воды в канале (рисунок дан в искаженном масштабе)

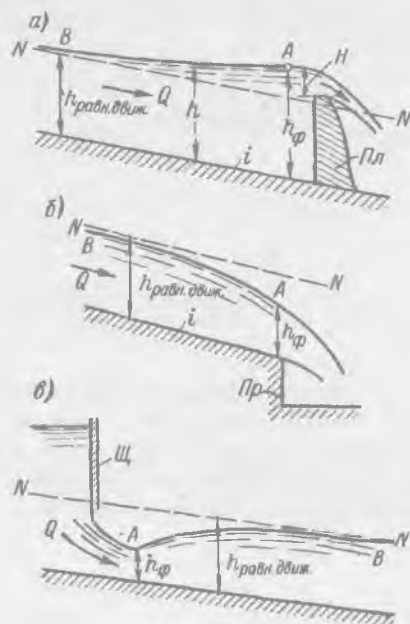


Рис. 7-2. Примеры неравномерного движения в цилиндрическом канале с прямым уклоном ($i > 0$)

редненных скоростей вдоль потока здесь касаться не будем.

1°. Русло канала цилиндрическое (т. е. имеющее всюду одинаковое поперечное сечение) с прямым уклоном дна ($i > 0$). Здесь равномерный режим нарушается, в частности, в следующих случаях.

а) В канале устраиваем плотину $Пл$ (рис. 7-2, а); вода начинает переливаться через плотину. Как видно, в результате устройства плотины мы искусственно зафиксировали в русле точку A свободной поверхности потока, а также глубину $h_ф$ (см. чертеж), отличную от глубины, свойственной равномерному движению (см. свободную поверхность NN , отвечающую этому движению):

$$h_ф \neq h_{\text{равн. движ.}}$$

При таком условии на некоторой ограниченной длине русла AB получим неравномерный режим; вдали же от плотины будет равномерное движение.

б) В канале устраивается перепад $Пр$ (рис. 7-2, б). Как будет показано далее, на гребне этого перепада устанавливается некоторая глубина $h_ф$, в общем случае

отличная от глубины равномерного режима (т. е. той глубины, которая определяется для заданного расхода по зависимостям предыдущей главы):

$$h_{\phi} \neq h_{\text{равн. движ.}}$$

Поскольку в этом случае мы искусственным путем зафиксировали в канале глубину, отличную от глубины равномерного движения, то на некоторой ограниченной длине канала AB должно возникнуть неравномерное движение.

в) В канале устанавливается штит Π (рис. 7-2, в); при истечении воды из-под щита получаем глубину в канале

$$h_{\phi} \neq h_{\text{равн. движ.}}$$

причем на длине потока AB возникает неравномерное движение.



Рис. 7-3. Примеры неравномерного движения в цилиндрических каналах горизонтальных ($i = 0$) и с обратным уклоном ($i < 0$)

Следует запомнить, что *неравномерное движение воды в цилиндрическом канале с прямым уклоном дна ($i > 0$) возникает в том случае, когда в нем каким-либо искусственным путем фиксируем глубину h_{ϕ} , отличную от глубины равномерного движения* (вычисляемой для заданного расхода по зависимостям предыдущей главы).

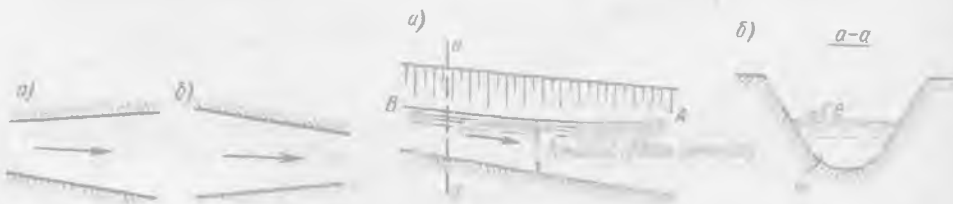


Рис. 7-4. Нецилиндрические (непризматические) русла (план)

Рис. 7-5. Продольный (а) и поперечный (б) разрез русла

AB – кривая свободной поверхности потока

2°. Русло канала цилиндрическое: горизонтальное ($i = 0$) или имеющее обратный уклон ($i < 0$), см. рис. 7-3. Анализируя формулу Шези для скорости v , легко видеть, что при $i = 0$ скорость равномерного движения воды $v = 0$. Отсюда заключаем, что при $i = 0$, а тем более при $i < 0$ равномерный режим движения воды физически не может существовать. В этом случае может получиться только неравномерное движение.

3°. Русло нецилиндрическое: расширяющееся или сужающееся (см. на рис. 7-4 планы русла). Здесь может возникнуть только неравномерный режим.

Таким образом, необходимо запомнить следующее. Неравномерное движение воды имеет место:

1) в случае цилиндрического русла:

а) когда $i > 0$, причем в русле зафиксирована глубина (рис. 7-2)

$$h_{\phi} \neq h_{\text{равн движ}};$$

б) когда уклон дна русла $i = 0$ или $i < 0$ (рис. 7-3);

2) в случае нецилиндрического русла (рис. 7-4).

Равномерное движение воды получается только в цилиндрическом русле с прямым уклоном дна ($i > 0$) при условии, что это русло достаточно длинное и не имеет каких-либо устройств, нарушающих равномерный режим (плотины, перепада и т. п.; рис. 7-2).

В практике случаи неравномерного движения воды встречаются значительно чаще, чем случаи равномерного.

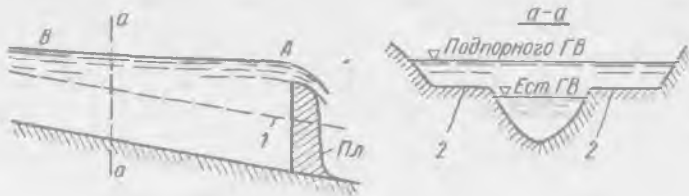


Рис. 7-6. Продольный (слева) и поперечный (справа) вертикальные разрезы реки

Пл — плотина; АВ — кривая свободной поверхности; 1 — естественная свободная поверхность; 2 — затопление берегов

При рассмотрении неравномерного плавно изменяющегося движения главным образом занимаются вопросом о построении так называемой кривой свободной поверхности АВ потока, т. е. кривой пересечения вертикальной продольной плоскости со свободной поверхностью потока (рис. 7-5). Построение кривой свободной поверхности АВ представляет большой практический интерес. Например:

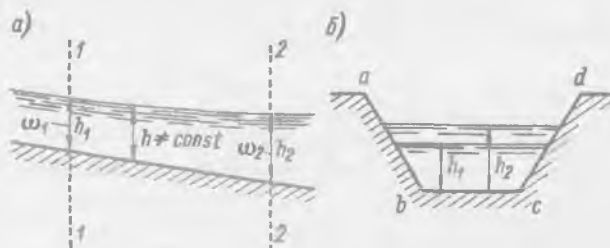


Рис. 7-7. Цилиндрическое (призматическое) русло

а) построив кривую АВ, найдем глубины h воды в канале в различных его сечениях; зная же глубины воды h , можем решить вопрос о глубине выемок канала в разных его местах; вопросы судоходства требуют знания глубин воды в канале, и т. п.;

б) построив кривую АВ для реки, на которой сооружается плотина Пл (рис. 7-6), найдем размеры затопления берегов, обусловленного подпором, в разных поперечных сечениях реки, и т. д.

Задача построения кривой АВ в теории неравномерного движения воды ставится и решается согласно следующей схеме:

1) считаем, что нам заданы характеристики русла водотока (его форма, размеры, уклон, шероховатость) и расход Q ;

2) рассматривая заданное русло, выделяем элементарный участок потока длиной ds , затем, используя соответствующие гидравлические зависимости, составляем для этого участка дифференциальное уравнение движения воды; это уравнение называется дифференциальным уравнением неравномерного движения;

3) полученное уравнение путем специальных преобразований приводим для цилиндрических русел к виду, удобному для интегрирования;

4) интегрируем это дифференциальное уравнение, в результате чего получаем уравнение кривой AB , которое называется уравнением неравномерного движения (для цилиндрических русел);

5) пользуясь уравнением неравномерного движения, вычисляем координаты точек кривой AB , по которым строим на чертеже данную кривую.

Составлением дифференциального уравнения неравномерного движения занимались Кориолис, который дал приближенное решение задачи, Буссинеск, предложивший современное решение вопроса, и др. Что касается интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения, то современные способы решения этой задачи были разработаны в СССР Б. А. Бахметевым, Р. Р. Чугаевым, А. Н. Рахмановым и др.

Ниже мы будем рассматривать главным образом цилиндрические (призматические) русла. Как отмечалось выше, цилиндрическим (призматическим) руслом называется такое прямолинейное русло, форма и размеры которого по длине потока не изменяются. Нельзя, разумеется, смешивать поперечное сечение русла и поперечное сечение потока (т. е. живое сечение). На рис. 7-7 показано призматическое русло, имеющее всюду одинаковое поперечное сечение $a-b-c-d$ (рис. 7-7,б). Вместе с тем глубина наполнения этого русла (рис. 7-7,а) при неравномерном движении в разных сечениях различна ($h_1 \neq h_2$); поэтому живые сечения рассматриваемого потока будут различными ($\omega_1 \neq \omega_2$).

§ 7-2 ОСНОВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ (ПЕРВЫЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ)

Рассмотрим вначале общий случай — случай нецилиндрического русла. При этом будем иметь в виду (как здесь, так и всюду ниже) случай «безотрывного» плавно изменяющегося движения воды в русле (случай, когда водоворотные области не образуются и живые сечения принимаются плоскими).

Представим на рис. 7-8 продольный разрез потока, находящегося в состоянии неравномерного движения. Оси координат для построения кривой свободной поверхности наметим, как показано на чертеже: ось глубин h — вертикально; ось s — по линии дна русла.

Возьмем два плоских вертикальных живых сечения потока: $1-1$, удаленное от начального сечения $W-W$ на конечное расстояние s , и $2-2$, расположенное от $1-1$ на бесконечно малом расстоянии ds .

Обозначим потерю напора на длине ds потока (при неравномерном движении) через dh_l . Очевидно, величину dh_l можно представить в виде

$$dh_l = J_e ds, \quad (7-1)$$

где [см. формулы (3-105)] гидравлический уклон

$$J_e = - \frac{d}{ds} \left(z + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) \quad (7-2)$$

или

$$J_e = -\frac{dz}{ds} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right), \quad (7-3)$$

причем здесь возвышение точки A свободной поверхности над плоскостью сравнения OO ; v — средняя скорость в 1-м сечении; α — корректив кинетической энергии, который условно будем принимать равным $\alpha \approx 1,0 \div 1,1$, т. е. таким же, как и для равномерного движения.

Подставляя (7-3) в (7-1), имеем

$$dh_t = -dz - d \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right). \quad (7-4)$$

Вводя теперь обозначение

$$\frac{\alpha v^2}{2g} = h_v, \quad (7-5)$$

переписываем (7-4) в виде

$$-dz = dh_v + dh_t. \quad (7-6)$$

Это и есть основное уравнение неравномерного движения, причем здесь dz представляет собой поднятие свободной поверхности AB на длине ds (dz может быть как положительным, так и отрицательным; на рис. 7-8 dz имеет отрицательное значение, а следовательно, представляет собой падение свободной поверхности).

Из (7-6) видно, что падение свободной поверхности, т. е. уменьшение удельной потенциальной энергии, равно увеличению удельной кинетической энергии плюс потеря напора.

Разделим уравнение (7-6) на величину ds :

$$-\frac{dz}{ds} = \frac{dh_v}{ds} + \frac{dh_t}{ds}. \quad (7-7)$$

Так как в случае безнапорного движения пьезометрическая линия $P-P$ совпадает со свободной поверхностью, то

$$-\frac{dz}{ds} = J, \quad (7-8)$$

где J — пьезометрический уклон.

Величину (dh_t/ds) , входящую в (7-7), т. е. гидравлический уклон J_e часто представляют в виде

$$\frac{dh_t}{ds} = J_e = i_f \text{ (обозначение)}, \quad (7-9)$$

где i_f иногда называют уклоном трения.

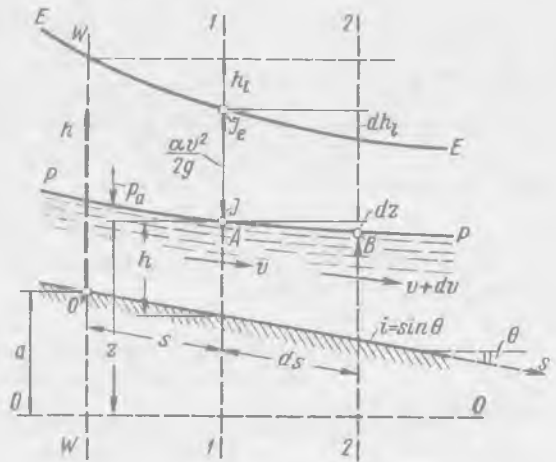


Рис. 7-8. К выводу дифференциального уравнения неравномерного движения

Учитывая (7-8) и (7-9), уравнение (7-7) переписываем в виде

$$J = \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) + i_f \quad (7-10)$$

Далее используем следующее допущение: считаем, что потери напора при плавно изменяющемся и безотрывном движении воды выражаются теми же зависимостями, что и в случае равномерного движения воды¹.

В соответствии с этим допущением величину i_f выражаем, пользуясь формулой Шези (справедливой, строго говоря, только для равномерного движения):

$$i_f = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{K^2}, \quad (7-11)$$

где v , C , R и K (см. § 4-12) относятся к рассматриваемому сечению 1-1.

Учитывая (7-11) и полагая $\alpha = \text{const}$, окончательно получаем

$$(I) \quad \boxed{J = \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R}} \quad (7-12)$$

Уравнение (I) является первым видом дифференциального уравнения неравномерного движения.

§ 7-3. ВТОРОЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ

Преобразуем уравнение (I), причем введем в это уравнение глубину потока h . Полагая величину Q и русло заданными, рассмотрим отдельно каждый из членов уравнения (I).

1. Член J (пьезометрический уклон). Представим на рис. 7-9 продольный разрез потока. Из чертежа видно, что

$$z = a - is + h, \quad (7-13)$$

где постоянная величина a — возвышение начала координат над плоскостью сравнения OO .

Очевидно,

$$dz = dh - i ds, \quad (7-14)$$

откуда

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dh}{ds} - i. \quad (7-15)$$

Пьезометрический уклон

$$J = - \frac{dz}{ds}. \quad (7-16)$$

¹ В случае неравномерного движения по длине потока происходит переформирование эпюры осредненных скоростей. Поэтому выражение для потерь напора при неравномерном движении, строго говоря, должно быть иным, чем в случае равномерного движения (когда эпюра осредненных скоростей имеет вполне определенный вид и по длине потока не изменяется).

Подставляя (7-15) в (7-16), окончательно для уклона J получаем зависимость

$$J = i - \frac{dh}{ds} \quad (7-17)$$

2. Член $\alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$. Выражая v через расход Q , получаем

$$\alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{Q^2}{\omega^2 2g} \right) = \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{1}{\omega^3} \frac{d\omega}{ds} \quad (7-18)$$

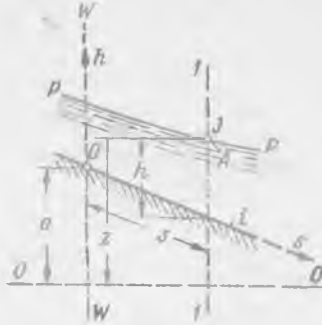


Рис. 7-9. К выводу формулы (7-17)

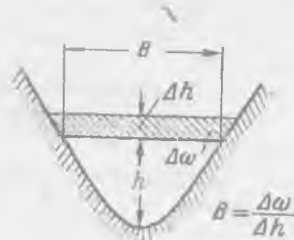


Рис. 7-10. К доказательству соотношения (7-21)

В данном случае мы рассматриваем нецилиндрическое русло. Поэтому площадь живого сечения ω зависит от двух координат: h и s , т. е.

$$\omega = f(h, s). \quad (7-19)$$

Имея это в виду, можем написать:

$$\frac{d\omega}{ds} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial h} \frac{dh}{ds} \right) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B \frac{dh}{ds} \right); \quad (7-20)$$

$$B = \frac{\partial \omega}{\partial h}, \quad (7-21)$$

где B — ширина потока поверху (рис. 7-10).

Подставляя (7-20) в (7-18), получаем окончательно

$$\alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{1}{\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B \frac{dh}{ds} \right). \quad (7-22)$$

3. Член $\frac{v^2}{C^2 R}$. Этот член можно представить в виде:

$$\frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}. \quad (7-23)$$

4. Подставляя теперь найденные выражения (7-17), (7-22) и (7-23) в (I) (см. § 7-2), получаем:

$$i - \frac{dh}{ds} = - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{1}{\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B \frac{dh}{ds} \right) + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R};$$

решая это уравнение в отношении $\frac{dh}{ds}$, окончательно имеем:

$$(II)_{\text{нецилиндрич}} \quad \frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} \left(1 - \frac{\alpha C^2 R}{g \omega} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right)}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}} \quad (7-24)$$

Уравнение $(II)_{\text{нецилиндрич}}$ является вторым видом дифференциального уравнения неравномерного движения; оно относится к общему случаю нецилиндрического русла. Как видно, при помощи этого уравнения можно выразить приращение глубины потока dh на элементарной длине его ds . Подчеркнем, что уравнение (7-24) относится к случаю $Q = \text{const}$ (вдоль потока).

Далее будем рассматривать отдельно: а) цилиндрические, в частности призматические, б) нецилиндрические искусственные и в) естественные русла.

А. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РУСЛАХ

§ 7-4. ВТОРОЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РУСЕЛ

В случае цилиндрических, в частности призматических, русел величина живого сечения целиком определяется размером h ; от величины s живое сечение ω в явном виде здесь не зависит; поэтому вместо (7-19) здесь

$$\omega = f(h). \quad (7-25)$$

Следовательно, для этих русел частная производная

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0, \quad (7-26)$$

т. е. приращение площади живого сечения при изменении s (но при $h = \text{const}$) равно нулю. Вместе с тем для цилиндрических русел

$$\frac{d\omega}{ds} \neq 0, \quad (7-27)$$

так как полная производная $\frac{d\omega}{ds}$ выражает действительное изменение ω , получающееся при изменении координаты s (в действительности в случае неравномерного движения с увеличением или уменьшением s изменяется также и h).

Учитывая (7-26), уравнение $(II)_{\text{нецилиндрич}}$ (см. § 7-3) для случая цилиндрических русел следует переписать в виде

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}}; \quad (7-28)$$

имея же в виду, что

$$\omega^2 C^2 R = K^2, \quad (7-29)$$

где K — модуль расхода, отвечающий действительной глубине h , уравнение (7-28) можем представить в виде

(II)_{цилиндр; i > 0}

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}} \quad (7-30)$$

Уравнение (II)_{цилиндр; i > 0} является вторым видом дифференциального уравнения неравномерного движения для случая цилиндрического русла с прямым уклоном дна ($i > 0$).

Из уравнения (7-30) можно получить известное нам уравнение равномерного движения. Для этого в (7-30) подставляем

$$\frac{dh}{ds} = 0; \quad (7-31)$$

в результате получаем

$$i - \frac{Q^2}{K^2} = 0, \quad (7-32)$$

откуда

$$Q = K \sqrt{i}. \quad (7-33)$$

Рассмотрим теперь дополнительно случаи $i = 0$ и $i < 0$.

а) Случай $i = 0$ (горизонтальное русло; рис. 7-11, а). Подставляя в (7-30) $i = 0$, имеем:

$$(II)_{\text{цилиндр; } i=0} \quad \frac{dh}{ds} = - \frac{\frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}} \quad (7-34)$$

б) Случай $i < 0$ (русло с обратным уклоном; рис. 7-11, б). Условимся обозначать через i' абсолютное значение i :

$$i' = \sin \theta = |i|; \quad (7-35)$$

при этом вместо уравнения (7-30) получаем:

$$(II)_{\text{цилиндр; } i < 0} \quad \frac{dh}{ds} = - \frac{i' + \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}} \quad (7-36)$$

Подчеркнем, что далее, рассматривая уравнения (7-30), (7-34) и (7-36), будем иметь в виду только такие цилиндрические русла, для которых величины K и ω^3/B непрерывно возрастают с увеличением глубины h ¹.

¹ В случае, например, замкнутых профилей (см. рис. 6-3, з) глубина h может рассматриваться, как неоднозначная функция от модуля расхода K (см. рис. 6-12). В случае, например, составных профилей (см. рис. 6-3, в) глубина h , вообще говоря, может также не являться однозначной функцией от выражения ω^3/B (т. е. для одной и той же величины ω^3/B можем получить две или несколько разных глубин h). Для такого рода русел (далее не рассматриваемых) K и ω^3/B с увеличением h могут уменьшаться.

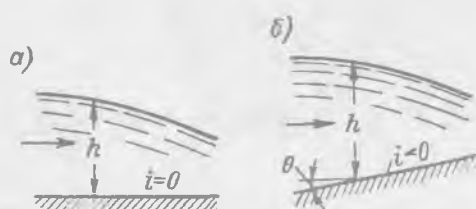
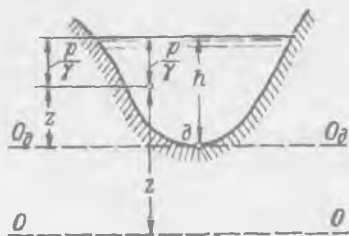


Рис. 7-11. Русла с уклоном $i = 0$ и $i < 0$

**§ 7-5. ЧЕТЫРЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПОНЯТИЯ:
УДЕЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СЕЧЕНИЯ, КРИТИЧЕСКАЯ ГЛУБИНА,
НОРМАЛЬНАЯ ГЛУБИНА, КРИТИЧЕСКИЙ УКЛОН**

При преобразовании и интегрировании уравнения (II) [см. (7-30), (7-34), (7-36)] будем пользоваться некоторыми новыми понятиями, которые здесь предварительно поясним.

1°. **Удельная энергия сечения.** Представим на рис. 7-12 поперечное сечение какого-либо русла, причем укажем на чертеже плоскость сравнения OO . Как известно, удельная энергия (полный напор H_e), т.е. полная энергия, отнесенная к единице веса жидкости, для данного живого сечения выражается зависимостью:



$$H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (7-37)$$

Удельной энергией сечения \mathcal{E} называется частное значение полной удельной энергии, подсчитанное в предположении, что плоскость сравнения проведена через самую нижнюю точку d сечения русла (см. на чертеже линию O_dO_d). Для плоскости сравнения O_dO_d имеем равенство:¹

Рис. 7-12 К обоснованию формул (7-39)

$$z + \frac{p}{\gamma} = h, \quad (7-38)$$

а следовательно, вместо (7-37) получаем

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (7-39)$$

или

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \quad (7-40)$$

Для прямоугольного русла

$$v = \frac{Q}{bh} = \frac{q}{h}, \quad (7-41)$$

где

$$q = \frac{Q}{b} \quad (7-42)$$

называется удельным или единичным расходом. Подчеркнем, что q имеет размерность $L^2:t$ (например, m^2/c).

Подставляя (7-41) в (7-39), выражение \mathcal{E} для прямоугольного русла получаем в виде

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha q^2}{2gh^2} \quad (7-43)$$

¹ Имеющееся атмосферное давление, действующее на поверхность воды, как здесь, так и ниже не учитываем.

Обратимся к анализу зависимостей (7-39) и (7-40). Рассматривая их, будем считать, что при заданном расходе Q вода через данное сечение русла может протекать с различными глубинами h (в зависимости от уклона русла, от его шероховатости и т. п.). При различных глубинах воды в данном русле (и при $Q = \text{const}$) будем получать разные удельные энергии сечения \mathcal{E} [см. зависимость (7-43)]. Поэтому можем написать, что

$$\mathcal{E} = f(h), \quad (7-44)$$

и считать, что значение \mathcal{E} при указанной постановке вопроса целиком определяется глубиной h .

Из уравнений (7-39) и (7-40) легко видеть, что:

а) при $h \rightarrow 0$, получаем $\mathcal{E} \rightarrow \infty$ (так как при $h \rightarrow 0$ второе слагаемое правой части указанных уравнений стремится к бесконечности);

б) при $h \rightarrow \infty$ получаем \mathcal{E} так же стремящееся к бесконечности.

Известно, что если непрерывная функция при граничных значениях независимой переменной оказывается равной плюс бесконечности, то в промежутке данная функция имеет, по крайней мере, один минимум.

Действительно, более подробный анализ показывает, что функция (7-44)

$\mathcal{E} = f(h)$ может быть представлена кривой (рис. 7-13), имеющей один минимум¹. Как видно, кривая $\mathcal{E} = f(h)$ имеет две асимптоты: а) OM , направленную под углом 45° к осям координат, и б) $O\mathcal{E}$, являющуюся горизонтальной осью координат. Площадь, покрытая на чертеже штриховкой, дает эпюру изменения

скоростного напора $\frac{\alpha v^2}{2g}$.

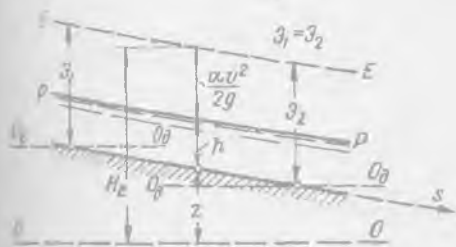


Рис. 7-14. Изменение вдоль потока величины H_e (при $\mathcal{E} = \text{const}$)

некоторая вполне определенная глубина потока h (рис. 7-13). Эта глубина называется критической и обозначается через h_k . Таким образом, критической глубиной называется глубина, отвечающая минимуму удельной энергии сечения.

¹ Для русел, указанных в конце § 7-4, которые мы условились рассматривать. Для некоторых поперечных сечений русел, исключаемых нами из рассмотрения, кривая $\mathcal{E} = f(h)$ может иметь два или несколько минимумов. В случае таких поперечных сечений должны получать две или несколько критических глубин разной величины.

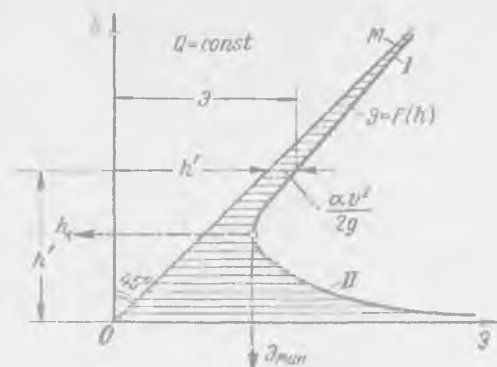


Рис. 7-13. График удельной энергии сечения \mathcal{E}

В случае равномерного движения (когда $h = \text{const}$ вдоль потока) величина H_e уменьшается вдоль потока (в связи с наличием потерь напора); величина же \mathcal{E} при равномерном движении не изменяется вдоль потока ($\mathcal{E} = \text{const}$ вдоль потока), поскольку линию O_1O_2 мы должны представлять проведенной в каждом сечении потока на различной высоте (рис. 7-14).

2°. Критическая глубина. Минимальному значению \mathcal{E} ($\mathcal{E}_{\text{мин}}$) отвечает

Если задано поперечное сечение русла, а также расход Q , то h_k определится из уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = 0. \quad (7-45)$$

Найдем, пользуясь этим уравнением, выражение h_k для прямоугольного русла; затем рассмотрим также и некоторые другие русла.

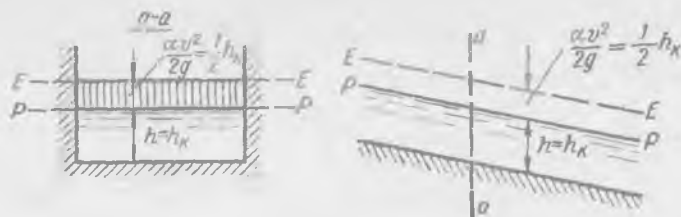


Рис 7-15. Зависимость глубины h_k от скоростного напора

1. Прямоугольное русло. Подставляя в (7-45) выражение (7-43), имеем

$$\frac{\partial \left(h + \frac{\alpha q^2}{2gh^2} \right)}{\partial h} = 0, \quad (7-46)$$

откуда

$$1 - \frac{\alpha q^2}{h^3 g} = 0, \quad (7-47)$$

где $h = h_k$.

Из соотношения (7-47) получаем

$$\frac{\alpha q^2}{h_k^3 g} = 1; \quad h_k^3 = \frac{\alpha q^2}{g} \quad (7-48)$$

и, следовательно,

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{b^2 g}} \quad (7-49)$$

Заметим, что (7-48) можно переписать еще в виде

$$h_k = \frac{\alpha q^2}{h_k^2 g} = \frac{\alpha v^2}{g}, \quad (7-50)$$

т. е.

$$\frac{\alpha v^2}{2g} = \frac{1}{2} h_k; \quad (7-51)$$

отсюда заключаем, что для прямоугольного русла, когда $h = h_k$, скоростной напор равен половине глубины в русле, т. е. напорная линия $E-E$ в этом случае возвышается над горизонтом воды в сечении на величину, равную половине глубины наполнения канала (рис. 7-15).

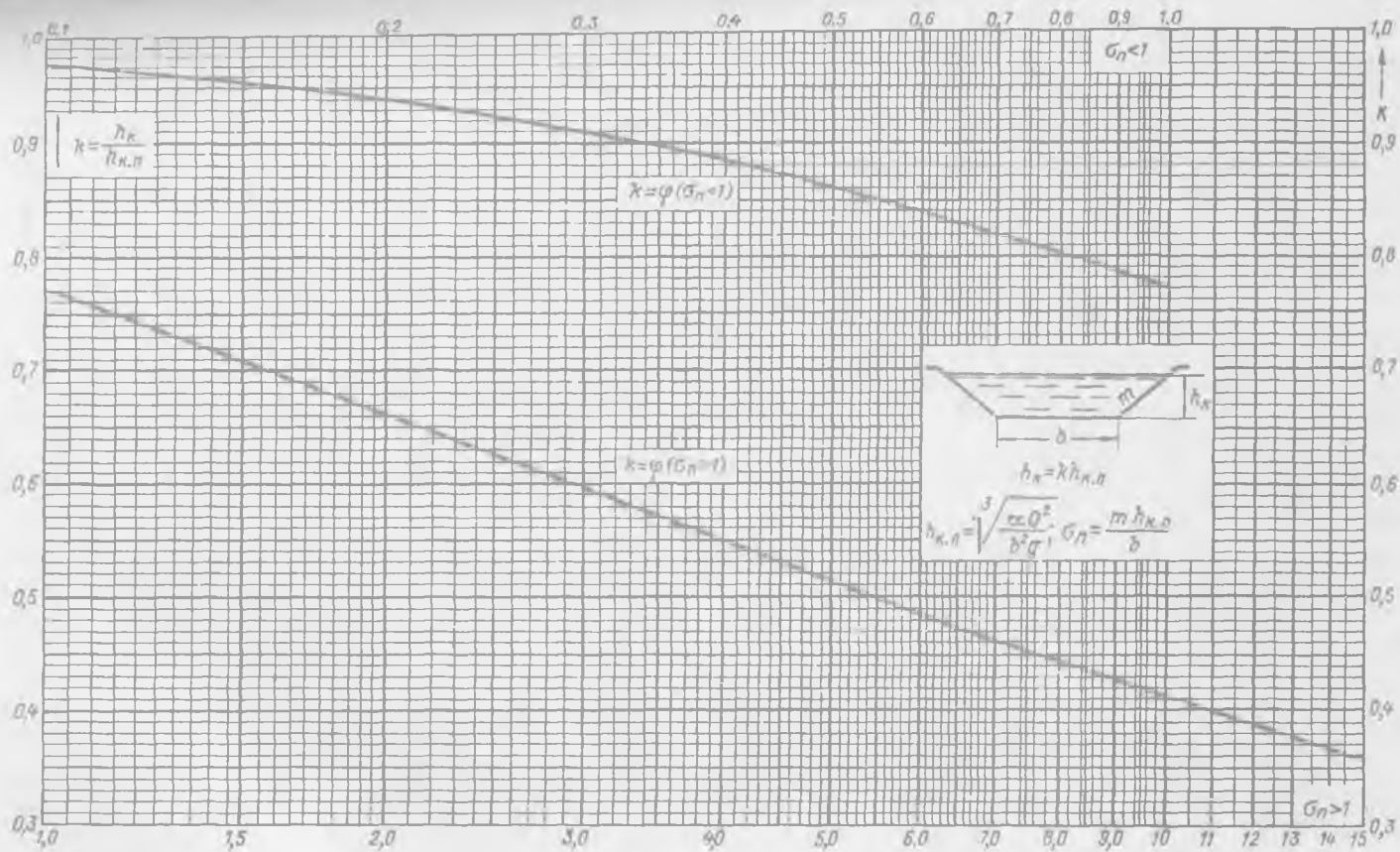


Рис 7-16 График для определения критической глубины в случае каналов симметричного трапецидального поперечного сечения

2. Симметричное треугольное русло. Рассуждая как и выше, для треугольного русла можем получить

$$h_k = \sqrt[5]{\frac{2\alpha Q^2}{gm^2}}, \quad (7-52)$$

где m — коэффициент откоса русла.

3. Симметричное трапециевидальное русло. Здесь выражение для h_k в явном виде получить не удастся (величину h_k можно найти только путем подбора). Практически в этом случае h_k определяют по особому графику. В литературе опубликовано несколько видов такого расчетного графика. Один из них приведен на рис. 7-16.¹ Пользуясь этим графиком, поступаем следующим образом (см. формулы и обозначения, выписанные на графике): а) вычисляем

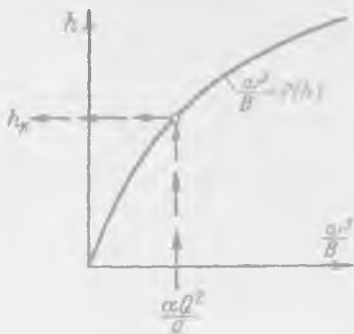


Рис 7-17. Определение критической глубины



Рис. 7-18. Линия нормальной глубины (N — N) и линия критической глубины (K — K)

критическую глубину $h_{k \text{ п}}$, б) затем вычисляем величину $\sigma_{\text{п}}$, в) зная величину $\sigma_{\text{п}}$, определяем по графику коэффициент k , г) зная k , находим $h_k = kh_{k \text{ п}}$.

4. Русло любого поперечного сечения. В общем случае величину h_k можно было бы определить, построив предварительно для заданного поперечного сечения русла и заданной величины Q график $\mathcal{E} = f(h)$ (рис. 7-13). Однако такой способ отыскания h_k неудобен, так как минимум кривой $\mathcal{E} = f(h)$ выражен нерезко, и потому найти h_k с достаточной точностью по этой кривой обычно не удастся.

Практически, рассчитывая русло любого поперечного сечения, поступаем следующим образом. Перепишем (7-45) с учетом (7-40) и (7-21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} &= \frac{\partial \left(h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right)}{\partial h} = 1 + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = \\ &= 1 - 2 \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial h} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3} = 0. \end{aligned} \quad (7-53)$$

¹ Данный график был построен на основе вычислений (с помощью ЭВМ) Л. А. Машковичем, который реализовал предложение А. Н. Рахманова, разработавшего (в 1929 г.) принципиальную схему этого графика

Величины B и ω , входящие в (7-53), должны отвечать критической глубине¹, в связи с чем при буквах B и ω ставим индекс «к» и переписываем (7-53):

$$\frac{\omega_k^3}{B_k} = \frac{\alpha Q^2}{g} \quad (7-54)$$

Из (7-54) видно, что критическая глубина обладает следующим свойством: величина площади живого сечения (отвечающая h_k) в кубе, деленная на ширину потока поверху B_k (отвечающую h_k), всегда должна равняться величине $\frac{\alpha Q^2}{g}$.

Пользуясь этим свойством, находим h_k . Для этого, задаваясь рядом значений h , строим кривую (рис. 7-17)

$$\frac{\omega^3}{B} = f(h); \quad (7-55)$$

далее, вычислив величину $\frac{\alpha Q^2}{g}$, по указанному графику находим h_k .

5. Круглоцилиндрические русла. Для этих русел величину h_k можно найти, пользуясь графиком на рис. 6-16. При этом поступаем следующим образом [см. позицию 7-ю графика, а также формулу (7-54)]: а) вычисляем

величину $\sqrt{\frac{\alpha Q^2}{g}} : D^{5/2}$; б) по этой величине (см. конец § 6-7), пользуясь кривой графика $\sqrt{\frac{\omega^3}{B}} : D^{5/2}$, находим отношение h/D ; в) зная эту величину, определяем

$$h_k = (h/D) \cdot D.$$

3°. **Нормальная глубина.** На рис. 7-18 представлен поток, находящийся в состоянии плавно изменяющегося неравномерного движения (AB — свободная поверхность этого потока). Расход Q считается заданным.

Нормальной глубиной называется глубина, которая при заданном расходе установилась бы в русле, если бы в этом русле движение было равномерным.

Нормальная глубина, обозначаемая далее через h_0 , определяется по зависимостям гл. 6, где рассматривался случай равномерного движения. Все элементы, соответствующие нормальной глубине, далее обозначаем следующим образом: ω_0 , R_0 , χ_0 и т. д. При таких обозначениях уравнение равномерного движения запишется в виде

$$Q = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0 i}. \quad (7-56)$$

Понятиями нормальной глубины h_0 и критической глубины h_k далее будем широко пользоваться. На эти глубины надо смотреть как на некоторые воображаемые, в действительности не существующие (глубины действительные нами обозначаются через h). Можно считать, что h_0 и h_k являются некоторыми удобными обозначениями, которые, будучи искусственно введены в дифференциальное уравнение неравномерного движения, позволяют в дальнейшем упростить это уравнение и привести его к безразмерному виду, удобному для исследования и интегрирования.

¹ В дальнейшем индексом «к» будем обозначать и другие элементы живого сечения, отвечающие критической глубине (K_k , χ_k и др.).

Линия $K-K$, проведенная параллельно дну на расстоянии h_k от него, называется линией критических глубин; линия $N-N$, проведенная параллельно дну на расстоянии h_0 от него, называется линией нормальных глубин (рис. 7-18).

4°. **Критический уклон.** Положим, что нам заданы расход Q , форма и размеры русла, а также его коэффициент шероховатости n . Определенному уклону заданного русла будет отвечать вполне определенная глубина h_0 . На рис. 7-19 слева представим наше русло, укрепленное как бы на шарнире O ; тогда, придавая этому руслу разный уклон i (путем вращения русла относительно шарнира),

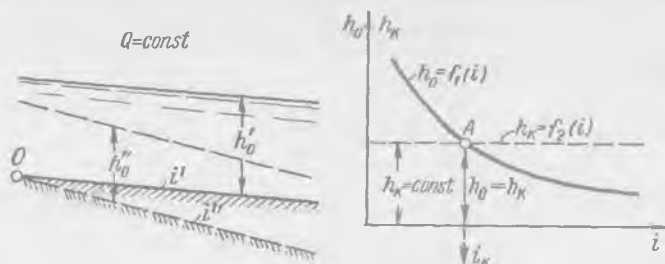


Рис. 7-19. К определению критического уклона

будем получать разные глубины h_0 (h'_0 , h''_0 и т. д.). Справа на рис. 7-19 изображена кривая $h_0 = f_1(i)$, которую можем построить, пользуясь формулой Шези.

В отличие от нормальной глубины критическая глубина для заданного поперечного сечения русла зависит только от расхода Q . От уклона дна русла критическая глубина не зависит (см. п. 2°). Поэтому на графике рис. 7-19 функция $h_k = f_2(i)$ выражается горизонтальной прямой. Как видно из этого графика, существует такой уклон i дна русла, при котором получается равенство

$$h_0 = h_k; \quad (7-57)$$

этот уклон, обозначаемый через i_k и называемый критическим уклоном, отвечает точке A пересечения кривой $h_0 = f_1(i)$ и горизонтальной прямой $h_k = f_2(i)$.

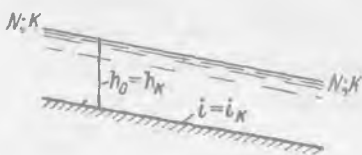


Рис. 7-20. Русло с критическим уклоном

Таким образом, критический уклон есть такой воображаемый уклон, который надо придать рассматриваемому цилиндрическому призматическому руслу, чтобы при заданном расходе Q и при равномерном движении воды в русле нормальная глубина h_0 оказалась равной критической h_k ($h_0 = h_k$).

Очевидно,

- а) если $i_k > i$, то $h_k < h_0$;
- б) если $i_k < i$, то $h_k > h_0$;
- в) если $i_k = i$, то $h_k = h_0$.

Найдем выражение для величины i_k . С этой целью представим себе, что дно заданного русла (рис. 7-20) имеет критический уклон: $i = i_k$; при этом линии $K-K$ и $N-N$ совпадут и дадут в случае равномерного движения свободную поверхность потока. Рассматривая такой поток, находящийся в состоянии равномерного движения, можно написать:

$$Q = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0 i} = \omega_k C_k \sqrt{R_k i_k} \quad (7-58)$$

Ранее при определении h_k было получено

$$\frac{\omega_k^3}{B_k} = \frac{\alpha Q^2}{g} \quad (7-59)$$

Подставляя в эту зависимость выражение для Q согласно (7-58), получаем:

$$\frac{\omega_k^3}{B_k} = \frac{\alpha (\omega_k C_k \sqrt{R_k i_k})^2}{g} \quad (7-60)$$

или

$$\frac{\omega_k}{B_k} = \frac{\alpha C_k^2 R_k i_k}{g}, \quad (7-61)$$

откуда

$$i_k = \frac{g}{\alpha C_k^2} \frac{\omega_k}{B_k R_k}, \quad (7-62)$$

или окончательно

$$i_k = \frac{g}{\alpha C_k^2} \frac{\chi_k}{B_k}. \quad (7-63)$$

Для весьма широких русел

$$\chi \approx B, \quad (7-64)$$

поэтому в случае таких русел

$$i_k = \frac{g}{\alpha C_k^2}. \quad (7-65)$$

Для заданного русла, имеющего действительный уклон i , всегда можем себе представить еще и критический уклон i_k , в общем случае не равный i .

Такой критический уклон (всегда больший нуля) можно себе представить не только при $i > 0$, но и когда $i = 0$ и $i < 0$.

§ 7-6. СПОКОЙНОЕ, БУРНОЕ И КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЯ ПОТОКА

Как было отмечено в конце § 7-4, мы ограничиваемся рассмотрением только таких русел, для которых величины K и ω^3/B непрерывно возрастают с увеличением глубины h .

Для таких русел кривая $K = f_1(h)$ не имеет максимума, а потому каждое из этих русел имеет только одну нормальную глубину. Что касается кривой $\omega = f_2(h)$, то, как ясно из § 7-5, для указанных русел эта кривая имеет только один минимум (см. рис. 7-13); поэтому каждое из этих русел имеет также только одну критическую глубину.

Различают три состояния безнапорного потока в указанных руслах:

1) спокойное состояние потока, когда действительные глубины потока (при равномерном или неравномерном движении воды) больше критической глубины: $h > h_k$;

2) бурное состояние потока, когда $h < h_k$;

3) критическое состояние потока, когда $h = h_k$.

В случае критического состояния всегда должно быть равномерное движение, характеризуемое условием $i = i_k$ (рис. 7-20). В одном и том же русле, в зависимости от условий образования потока, можем иметь и спокойное (см. поток А

на рис. 7-21) и бурное движение (см. поток B на рис. 7-21); на рис. 7-21 совмещены два разных потока: A и B .

Спокойному движению отвечает ветвь I (см. рис. 7-13) кривой $\mathcal{E} = f(h)$, откуда видно, что спокойное движение характеризуется условием

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} > 0, \quad (7-66)$$

т. е. здесь с увеличением глубины h удельная энергия сечения \mathcal{E} возрастает.

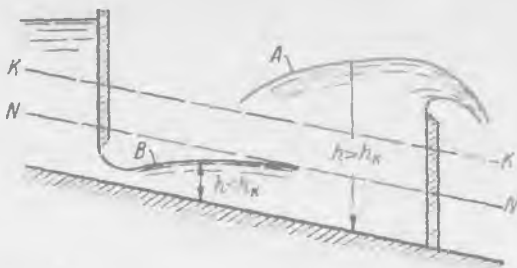


Рис. 7-21. Спокойный (A) и бурный (B) потоки

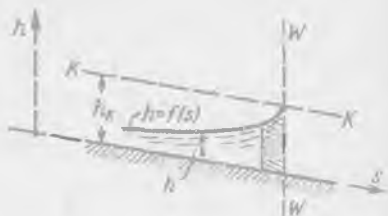


Рис. 7-22. Свободная поверхность в районе $h \approx h_k$

Бурному движению отвечает ветвь II (рис. 7-13) кривой $\mathcal{E} = f(h)$, откуда видно, что бурное движение характеризуется условием

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} < 0, \quad (7-67)$$

т. е. здесь с возрастанием h величина \mathcal{E} убывает.

Далее в § 9-16 будет показано следующее.

Если в русле имеет место спокойное установившееся движение воды, то характер протекания воды на низовых участках влияет на течение в пределах верхних участков; течение же на верхних участках русла не сказывается на протекании воды в пределах низовых участков. Следовательно, при спокойном установившемся движении глубина воды в данном сечении русла определяется обстоятельствами движения воды в пределах нижележащей части потока и не зависит от обстоятельств движения в пределах верхней части потока.

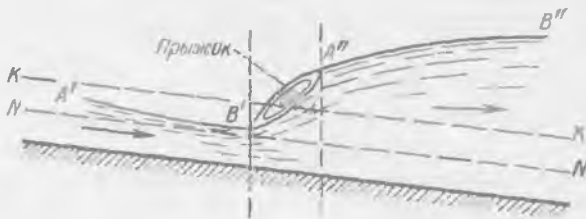


Рис. 7-23. Гидравлический прыжок

части потока.

В случае бурного установившегося движения воды имеем обратную картину: глубина в данном сечении русла определяется обстоятельствами движения воды на вышележащем участке русла и не зависит от обстоятельств движения на нижележащем участке.

Рассмотрим вопрос о том, как сопрягаются два потока, когда один из них является спокойным, а другой бурным.

Выше было показано, что при

$$h = h_k \quad (7-68)$$

величина

$$\frac{\omega^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}, \quad (7-69)$$

т. е. в случае (7-68) имеем:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3} = 1,0. \quad (7-70)$$

Из уравнения (7-30) видим, что в случае (7-68), когда имеет место соотношение (7-70), знаменатель правой части (7-30) обращается в нуль и, следовательно, при $h \rightarrow h_k$ величина $\frac{dh}{ds}$ стремится к бесконечности, т. е.

$$\frac{dh}{ds} \rightarrow \infty. \quad (7-71)$$

Следует запомнить, что критическая глубина обращает в нуль знаменатель правой части дифференциального уравнения неравномерного движения.

Из сказанного ясно, что кривая свободной поверхности, т. е. кривая $h = f(s)$, при $h = h_k$, имеет вертикальную касательную $W-W$ (рис. 7-22).

Однако надо учитывать, что указанный вывод получается в результате формального анализа уравнения (7-30). В действительности, в районе вертикали $W-W$ (см. заштрихованную область на рис. 7-22) имеем резко изменяющееся движение, в то время как уравнение (7-30) было выведено для плавно изменяющегося движения. В связи с этим дифференциальное уравнение (7-30), строго говоря, неприменимо к области потока, где глубины его близки к критической, а следовательно, упомянутый выше вывод носит условный характер.

Опыт показывает следующее (рис. 7-23 и 7-24):

1) переход бурного потока $A'B'$ в спокойный $A''B''$, как правило, осуществляется при помощи так называемого гидравлического прыжка $B'A''$ (рис. 7-23), который характеризуется наличием водоворотной области (вальца жидкости; см. гл. 8);

2) переход спокойного потока $A'B'$ в бурный $A''B''$ (рис. 7-24) осуществляется при помощи водопада $B'A''$ (область резко изменяющегося движения, схематично показанная на чертеже штриховкой, может быть названа водопадом).

§ 7-7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМ (ВИДОВ) КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В СЛУЧАЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РУСЛЕ

Прежде чем перейти к интегрированию дифференциального уравнения неравномерного движения, необходимо выяснить, какой вид может иметь искомая свободная поверхность потока. С этой целью обратимся к исследованию полученного ранее уравнения.¹

Введем обозначение:

$$\Lambda = \frac{\omega^3}{B}. \quad (7-72)$$

¹ Это исследование дается ниже в несколько упрощенном, (сокращенном) виде.

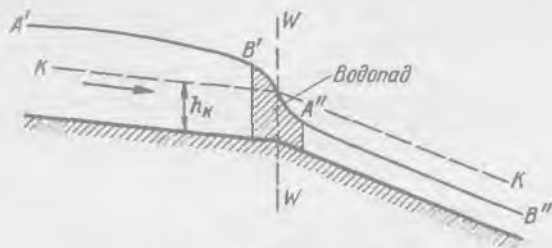


Рис. 7-24. Водопад

Напомним, что мы ограничиваемся рассмотрением только цилиндрических русел «правильной» формы, для которых Λ и K непрерывно возрастают с увеличением глубины наполнения h (русел замкнутого профиля, а также русел, имеющих составное поперечное сечение, мы не касаемся).

Далее будем рассматривать продольный профиль заданного русла (рис. 7-25), причем всю область возможного расположения свободной поверхности будем разбивать на три отдельные зоны (a, b, c) путем проведения линий $N-N$ и $K-K$. На рис. 7-25 линия $N-N$ лежит выше линии $K-K$; однако могут иметь место случаи, когда линия $K-K$ будет располагаться и выше линии $N-N$ (см. ниже).



Рис. 7-25. Зоны расположения отдельных кривых свободной поверхности потока

характеризуемому равномерным движением

1°. Русло с прямым уклоном ($i > 0$). Приведем уравнение (7-30) к виду, удобному для исследования. С этой целью рассмотрим отдельно числитель (χ) и знаменатель (z) правой части этого уравнения:

1. Числитель правой части уравнения (7-30)

$$\chi = i - \frac{Q^2}{K^2} = i - \frac{K_0^2}{K^2} i, \quad (7-73)$$

где расход Q выражен по формуле равномерного движения, написанной применительно к некоторому фиктивному потоку в заданном русле,

$$Q = K_0 \sqrt{i}.$$

Из (7-73) окончательно получаем

$$\chi = \left(1 - \frac{K_0^2}{K^2}\right) i. \quad (7-74)$$

2. Знаменатель правой части уравнения (7-30) с учетом (7-54)

$$z = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3} = 1 - \frac{\omega_k^3}{B_k} \frac{B}{\omega^3}. \quad (7-75)$$

Вводим обозначение

$$\Lambda_k = \frac{\omega_k^3}{B_k}. \quad (7-76)$$

Величина Λ согласно (7-72) зависит только от h ; Λ_k является частным значением Λ , когда $h = h_k$.

Пользуясь обозначениями Λ и Λ_k , выражение (7-75) окончательно переписываем в виде:

$$z = 1 - \frac{\Lambda_k}{\Lambda}. \quad (7-77)$$

Подставляя теперь найденные выражения для χ и z в уравнение (7-30), получаем:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\left(1 - \frac{K_0^2}{K^2}\right) i}{1 - \frac{\Lambda_k}{\Lambda}} = \frac{\chi}{z}. \quad (7-78)$$

(III)_{цилиндр, $i > 0$}

Зависимость (III)_{цилиндр, $i > 0$} является третьим видом дифференциального уравнения, удобным для исследования.

Рассматривая неравномерное движение в русле с прямым уклоном ($i > 0$), различаем три случая:

1-й, характеризуемый условиями

$$h_0 > h_k \text{ и } i < i_k; \quad (7-79)$$

здесь получим (см. ниже) три возможные формы свободной поверхности;

2-й, характеризуемый условиями

$$h_0 < h_k \text{ и } i > i_k; \quad (7-80)$$

здесь получим также три возможные формы свободной поверхности;

3-й, характеризуемый условиями

$$h_0 = h_k \text{ и } i = i_k; \quad (7-81)$$

здесь получим только две возможные формы свободной поверхности.

Как видно, при $i > 0$ всего получаем восемь различных свободных поверхностей (относящихся к случаю неравномерного движения).

а) шесть из них являются кривыми подпора;

б) две — кривыми спада.

Заметим, что кривой подпора называется такая кривая свободной поверхности, вдоль которой (по течению) глубины потока возрастают; кривой спада — кривая свободной поверхности, вдоль которой глубины потока уменьшаются.

Рассмотрим отдельно каждый из трех намеченных случаев:

1-й случай, характеризуемый условиями (7-79). Три кривые свободной поверхности, получающиеся при данных условиях, представлены на рис. 7-26 (на этом чертеже совмещены три различных потока, ограниченных сверху соответственно кривыми свободной поверхности a_1 , b_1 и c_1).

Как видно, каждой намеченной на рис. 7-25 зоне (а, б, с) отвечает своя кривая свободной поверхности, обозначаемая соответственно a_1 , b_1 и c_1 . Ни одна из них не пересекает линий $N-N$ и $K-K$. Направление выпуклостей кривых a_1 и b_1 — различно. Кривые a_1 и c_1 являются кривыми подпора; кривая же b_1 — кривой спада.

Рассмотрим каждую из показанных на рис. 7-26 кривых и докажем, что вид их должен быть таким, какой изображен на чертеже

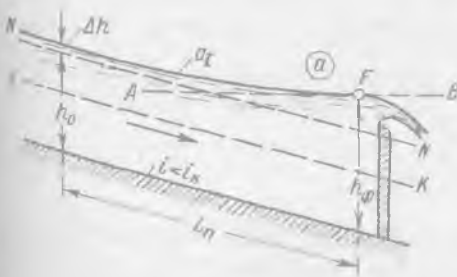


Рис. 7-27. Кривая свободной поверхности типа a_1

Кривая a_1 . Эта кривая называется кривой подпора типа a_1 . Она появляется в русле, когда искусственно фиксируемая глубина h_ϕ дает точку F свободной поверхности, лежащую в зоне а, т. е. когда (рис. 7-27)

$$h_\phi > h_0 > h_k. \quad (7-82)$$

Как видно, все глубины h потока, ограниченного сверху кривой a_1 , удовлетворяют условию

$$h > h_0 > h_k. \quad (7-83)$$

Используя уравнение (III), докажем теперь, что кривая a_1 имеет форму, показанную на рис. 7-26 и 7-27.

1. Так как для данной кривой имеется условие (7-83), то эта кривая характеризуется неравенствами

$$K^2 > K_0^2; \quad \Lambda > \Lambda_k; \quad (7-84)$$

следовательно, в рассматриваемом случае

$$c > 0 \text{ и } z > 0, \quad (7-85)$$



Рис. 7-28. К доказательству соотношения (7-87)

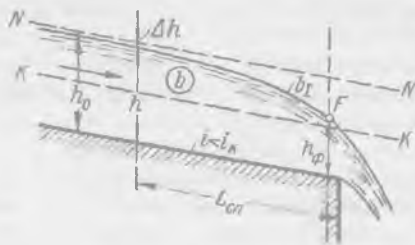


Рис. 7-29. Кривая свободной поверхности типа b_1

а потому [см. (7-78)]

$$\frac{dh}{ds} = \frac{+c}{+z} > 0; \quad (7-86)$$

отсюда заключаем, что глубины потока h по течению увеличиваются, т. е. здесь действительно получаем кривую подпора. Дополнительно обратим внимание, что у этой кривой подпора отметки свободной поверхности вниз по течению уменьшаются: $V_2 < V_1$.

2. При стремлении h к бесконечности K^2 и Λ также стремятся к бесконечности; в то же время величины K_0^2 и Λ_k сохраняют свои значения: $K_0^2 = \text{const}$ и $\Lambda_k = \text{const}$.

Следовательно, при стремлении h к бесконечности [см. (7-78)]

$$\left(\frac{dh}{ds}\right)_{h \rightarrow \infty} = \left(\frac{c}{z}\right)_{h \rightarrow \infty} \rightarrow i; \quad (7-87)$$

отсюда заключаем, что в низовой своей части кривая a имеет горизонтальную «асимптоту» AB . Действительно, горизонтальная прямая AB характеризуется условием (см. обозначения dh и ds , показанные на рис. 7-28)

$$\frac{dh}{ds} = i. \quad (7-88)$$

Таким образом, вниз по течению кривая a_1 будет все более и более приближаться к горизонтальной прямой.

3. При стремлении h к h_0 (см. левый конец кривой a_1) величина K^2 стремится к K_0^2 , а потому [см. (7-78)]

$$\left(\frac{dh}{ds}\right)_{h \rightarrow h_0} = \left(\frac{q}{3}\right)_{h \rightarrow h_0} \rightarrow 0; \quad (7-89)$$

следовательно, в верховой части кривая a_1 будет иметь асимптоту в виде линии $N-N$, характеризуемой условием $\frac{dh}{ds} = 0$.

4. Учитывая, что кривая a_1 имеет, как доказано выше, две асимптоты в виде линий $A-B$ и $N-N$, можем утверждать, что выпуклость рассматриваемой кривой обращена вниз.

5. Так как кривая a_1 асимптотически приближается к прямой $N-N$, то ясно, что подпор, вызванный плотиной (рис. 7-27), распространяется вверх по течению теоретически на бесконечно большую длину. Однако практически пренебрегают некоторой незначительной величиной Δh , равной, например $(0,01 \div 0,02) h_0$, и считают длину кривой подпора L_n конечной.

6. Удельная энергия сечения \mathcal{E} вниз по течению в случае кривой a_1 должна увеличиваться. Это ясно из того, что кривая a_1 вниз по течению удаляется от линии $K-K$, которой отвечает минимум \mathcal{E} .¹

Кривая b_1 . Эта кривая называется кривой спада гипа b_1 . Она появляется в русле, когда искусственно фиксируемая глубина h_ϕ дает точку F свободной поверхности, лежащую в зоне b , т. е. когда (рис. 7-29)

$$h_0 > h_\phi > h_k. \quad (7-90)$$

Как видно, все глубины h потока, ограниченного сверху кривой b_1 , удовлетворяют условию

$$h_0 > h > h_k. \quad (7-91)$$

Анализируя уравнение (7-78), имеем следующее:

1. Так как данная кривая характеризуется соотношением (7-91), то для этой кривой

$$K_0 > K \text{ и } \Lambda > \Lambda_k, \quad (7-92)$$

а следовательно,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{-q}{+3} < 0. \quad (7-93)$$

Отсюда заключаем, что глубины потока вниз по течению уменьшаются, т. е. здесь мы действительно получаем кривую спада.

2. При стремлении h к h_0 величина K^2 стремится к K_0^2 , а следовательно,

$$\left(\frac{dh}{ds}\right)_{h \rightarrow h_0} = \left(\frac{q}{3}\right)_{h \rightarrow h_0} \rightarrow 0, \quad (7-94)$$

т. е. кривая b_1 в левой (верховой) своей части имеет асимптоту в виде линии $N-N$.

3. При $h = h_k$ кривая b_1 имеет вертикальную касательную (см. § 7-6).

4. Учитывая, что кривая b_1 имеет асимптоту $N-N$ и вертикальную касательную $W-W$ (рис. 7-26), можем утверждать, что выпуклость этой кривой обращена вверх.

¹ Надо заметить, что более подробный формальный анализ уравнения (7-78) показывает, что кривая a_1 в некоторых случаях (в практическом отношении не имеющих существенного значения) в низовой своей части получает вид иной, чем то показано на рис. 7-26 и 7-27 (характеризуемый наличием точек перегиба и максимума).

5. Длина кривой b_1 , поскольку она асимптотически приближается к линии $N-N$, теоретически равна бесконечности. Однако, пренебрегая незначительной величиной Δh (рис. 7-29), практически длину этой кривой $L_{сн}$ считаем конечной.

6. Удельная энергия сечения \mathcal{E} вниз по течению в случае кривой b_1 уменьшается, поскольку данная кривая по течению приближается к линии $K-K$, которой отвечает $\mathcal{E}_{мин}$.

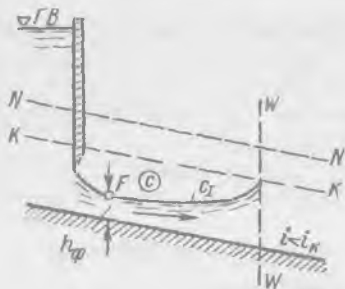


Рис. 7-30. Кривая свободной поверхности типа c_1

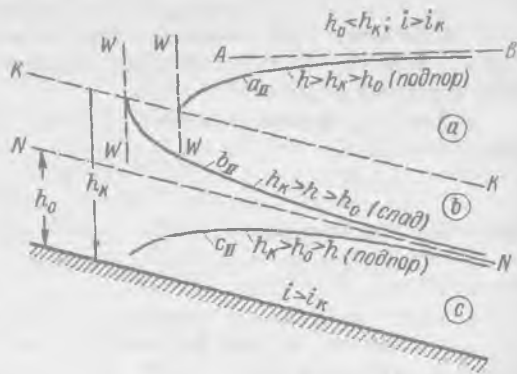


Рис. 7-31. Формы (виды) отдельных кривых свободной поверхности при $i > i_k$

Кривая c_1 . Кривая подпора типа c_1 появляется в русле, когда искусственно фиксируемая глубина h_ϕ дает точку F свободной поверхности, лежащую в зоне c , т. е. когда (рис. 7-30)

$$h_\phi < h_k < h_0. \quad (7-95)$$

Все глубины h потока, ограниченного сверху кривой c_1 , удовлетворяют условию

$$h_0 > h_k > h. \quad (7-96)$$

Рассуждая, как и выше, можем показать, что кривая c_1 обладает следующими свойствами:

- 1) она является кривой подпора;
- 2) на правом своем конце имеет вертикальную касательную $W-W$;

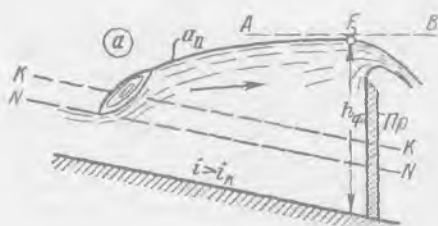


Рис. 7-32. Кривая свободной поверхности типа a_{II}

- 3) асимптот не имеет;
- 4) выпуклость ее обращена вниз;
- 5) удельная энергия сечения \mathcal{E} вдоль данной кривой (по течению) уменьшается;

6) длина ее является конечной.

2-й случай, характеризуемый условиями (7-80). Путем исследования уравнения (III), проводимого точно так же, как и в 1-м случае, легко доказать, что в канале при условиях (7-80) может иметь место одна из трех поверхностей, изображенных на рис. 7-31 (a_{II} , b_{II} или c_{II}).

Из чертежа видно: 1) какая из этих кривых является кривой подпора и какая — кривой спада; 2) какие имеются у данных кривых (по их концам) асимптоты или касательные; 3) в какую сторону обращены выпуклости кривых; 4) как изменяется величина \mathcal{E} вдоль течения для различных кривых.

Та или другая из рассматриваемых кривых появляется в русле в зависимости от того, в какой зоне (*a*, *b* или *c*) мы фиксируем точку свободной поверхности *F*. Например, на рис. 7-32 показана кривая *a*_{II}, появившаяся в русле после того, как в нем была создана преграда *Пр*, при помощи которой искусственно зафиксировали в русле глубину *h_Ф* и получили точку *F*, лежащую в зоне *a*.¹

3-й случай, характеризуемый условиями (7-81). Здесь линии *N-N* и *K-K* совпадают (рис. 7-33), а потому зона *b* исчезает; остаются только две зоны: *a* и *c*. Соответственно этому получаем две кривые свободной поверхности: типа *a*_{III} и типа *c*_{III}.

Кривая *a*_{III} характеризуется соотношением

$$h > h_k = h_0; \quad (7-97)$$

кривая *c*_{III} — соотношением

$$h < h_k = h_0. \quad (7-98)$$

Путем исследования уравнения (7-78) можно доказать, что эти кривые являются кривыми подпора и имеют форму, показанную на рис. 7-33. Можно также убедиться, что в случае широкого прямоугольного русла, если будем считать, что коэффициент Шези *C* не изменяется с глубиной (*C* = const), данные кривые обращаются в прямые горизонтальные линии.

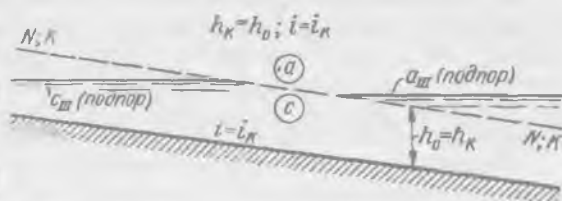


Рис. 7-33. Формы (виды) отдельных кривых свободной поверхности при $i = i_k$.



Рис. 7-34. Формы (виды) отдельных кривых свободной поверхности при $i = 0$.

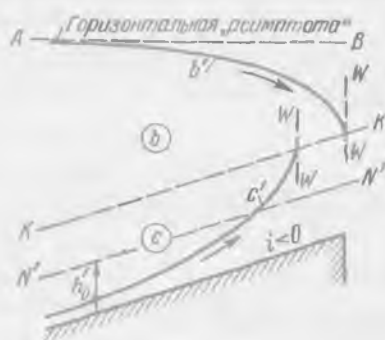


Рис. 7-35. Формы (виды) отдельных кривых свободной поверхности при $i < 0$.

2. Русло с горизонтальным дном ($i = 0$). После соответствующего преобразования уравнения (II)_{цилиндр; i=0} [приведения его к виду (III)_{i=0}, удобному для исследования] и после анализа данного уравнения легко показать, что в случае $i = 0$ может иметь место одна из двух свободных поверхностей, показанных на рис. 7-34 (кривая *b*₀ или *c*₀).

В данном случае $h_0 = \infty$, поэтому зона *a* исчезает (линия *N-N* располагается на бесконечно большом расстоянии от линии дна); остаются только две зоны: *b* и *c*. Кривая спада *b*₀, лежащая в зоне *b*, на левом своем конце имеет

¹ Более подробный формальный анализ уравнения (7-78) показывает, что кривая *a*_{II} должна иметь в верхней (правой) своей части несущественный с практической точки зрения максимум.

горизонтальную «асимптоту», удаленную на бесконечно большое расстояние от линии дна русла. На правом своем конце кривая b_0 , так же как и кривая c_0 , лежащая в зоне c и являющаяся кривой подпора, имеет вертикальную касательную $W-W$.

3°. Русло с обратным уклоном дна ($i < 0$). Здесь, как и в случае $i = 0$, получаем только две свободные поверхности: типа b' (кривая спада) и типа c' (кривая подпора) — рис. 7-35. Подчеркнем, что b' имеет такую же горизонтальную «асимптоту», как и b_0 .

4°. Заключительные замечания. Как видно, для случая неравномерного движения воды в цилиндрическом русле мы получили всего двенадцать форм кривых свободной поверхности. Следует запомнить, что кривые свободной поверхности всегда подходят к линии $N-N$ асимптотически, к линии же $K-K$ — имея вертикальную касательную, причем кривая свободной поверхности данной формы никогда не пересекает линий $K-K$ и $N-N$.

Величина удельной энергии сечения \mathcal{E} увеличивается по течению для тех кривых, которые удаляются от линии $K-K$, и уменьшается по течению для тех кривых, которые приближаются к линии $K-K$.

§ 7-8. ПРИВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ПРЯМОГО УКЛОНА РУСЛА ($i > 0$)

Преобразуем знаменатель правой части уравнения (7-30):

$$z = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3} = 1 - \frac{\alpha (K_0^2 i)}{g} \frac{B}{\omega \omega^2} \frac{C^2 R}{C^2 R}. \quad (7-99)$$

Так как

$$\omega^2 C^2 R = K^2 \text{ и } \frac{\omega}{R} = \chi, \quad (7-100)$$

то (7-99) можно представить в виде

$$z = 1 - \frac{\alpha K_0^2 i}{g} \frac{B C^2}{\chi K^2} = 1 - \frac{\alpha i C^2}{g} \frac{B}{\chi} \frac{K_0^2}{K^2}. \quad (7-101)$$

Вводим обозначение:

$$\frac{\alpha i C^2}{g} \frac{B}{\chi} = j; \quad (7-102)$$

при этом (7-101) получает вид

$$z = 1 - j \frac{K_0^2}{K^2}. \quad (7-103)$$

В случае широкого русла $B \approx \chi$, причем

$$j = \frac{\alpha i C^2}{g}. \quad (7-104)$$

Подставляя (7-74) и (7-103) в (7-30), получаем

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - j \frac{K_0^2}{K^2}} i. \quad (7-105)$$

Вводим дополнительное обозначение:

$$\frac{K}{K_0} = \kappa, \quad (7-106)$$

где κ называется относительным модулем расхода.

Применяя это обозначение, окончательно вместо (7-105) получаем

$$(IV)_{i>0} \quad \frac{dh}{ds} = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 - j} i. \quad (7-107)$$

Уравнение $(IV)_{i>0}$ является четвертым видом дифференциального уравнения, удобным для интегрирования (при $i > 0$).

Приведем несколько замечаний в отношении величины j :

1) из (7-102) видно, что величина j для заданного цилиндрического русла зависит только от глубины h :

$$j = f(h); \quad (7-108)$$

2) можно показать, что для широкого прямоугольного русла

$$j = \frac{h_k^3 C^2}{h_0^3 C_0^2}; \quad (7-109)$$

если для этого русла пренебречь изменением коэффициента Шези C с изменением глубины, то можно считать, что $C = C_0$; при этом

$$j = \left(\frac{h_k}{h_0} \right)^3; \quad (7-110)$$

3) из формулы (7-110) видно, что при малых уклонах (когда $h_0 > h_k$) $j < 1,0$; при больших же уклонах (когда $h_k > h_0$) $j > 1,0$, причем j в этом случае может достигать большой величины.

§ 7.9. ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ, УДОБНЫЙ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РУСЛА ($i = 0$)

Преобразовав уравнение $(II)_{\text{цилиндр}; i=0}$ [см. (7-34)] так же, как и уравнение, относящееся к прямому уклону дна, окончательно получаем

$$(IV)_{i=0} \quad \frac{dh}{ds} = - \frac{1}{\kappa_k^2 - j_k} i_k, \quad (7-111)$$

где i_k — критический уклон; κ_k — новое обозначение:

$$\kappa_k = \frac{K}{K_k}; \quad (7-112)$$

здесь K_k — модуль расхода, отвечающий критической глубине.

Величина j_k будет

$$j_k = \frac{\alpha i_k C^2 B}{g \chi}, \quad (7-113)$$

где C , B и χ отвечают действительной глубине h (а не критической глубине h_k).

Для случая широкого русла, когда $B \approx \chi$,

$$j_k = \frac{\alpha i_k C^2}{g}; \quad (7-114)$$

если в эту формулу подставить (7-65), то получаем

$$j_k = \left(\frac{C}{C_k} \right)^2; \quad (7-115)$$

отсюда видно, что, пренебрегая изменением C с изменением h , величину j_k для широкого русла получаем

$$j_k = 1.$$

§ 7-10. ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ, УДОБНЫЙ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ РУСЛА С ОБРАТНЫМ УКЛОНОМ ДНА ($i < 0$)

В результате преобразования уравнения (II)_{цилиндр: $i < 0$} [см. (7-36)] окончательно получаем

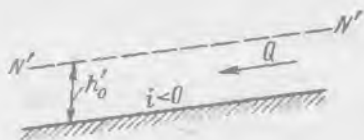


Рис. 7-36. Определение фиктивной нормальной глубины h'_0

$$\frac{dh}{ds} = - \frac{\kappa'^2 + 1}{\kappa'^2 - j'} i', \quad (7-116)$$

$$\kappa' = \frac{K}{K'_0}, \quad (7-117)$$

$$j' = \frac{\alpha i C^2}{g} \frac{B}{\chi}; \quad (7-118)$$

здесь i' — абсолютная величина уклона дна русла: $i' = |i|$; K'_0 — модуль расхода, отвечающий некоторой воображаемой нормальной глубине h'_0 , которая получается, если представим себе, что при заданном расходе Q вода движется по уклону, т. е. в обратную сторону относительно действительного течения, причем в русле имеется равномерный режим (рис. 7-36). Заметим, что свободная поверхность $N-N'$ такого фиктивного потока, в отличие от свободной поверхности $N-N'$ фактивного потока, с которым мы сталкивались ранее, может пересекать действительную свободную поверхность b' или c' (рис. 7-35).

§ 7-11. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ

Уравнение (IV) _{$i > 0$} [см. (7-107)] можно записать в виде:

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{i} \frac{\kappa^2 - j}{\kappa^2 - 1} \quad (7-119)$$

Поскольку правая часть этого уравнения является функцией только h :

$$\frac{1}{i} \frac{\kappa^2 - j}{\kappa^2 - 1} = f(h),$$

то (7-119) можно представить в виде:

$$ds = f(h) dh. \quad (7-120)$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$s = \int_{h_1}^{h_2} f(h) dh. \quad (7-121)$$

Как видно, для того чтобы получить расчетное уравнение, связывающее h и s , необходимо отыскать неопределенный интеграл:

$$f_0(h) = \int f(h) dh. \quad (7-122)$$

В общем случае эта задача может быть решена только приближенно. Существует много различных приближенных способов отыскания указанного неопределенного интеграла (Бресса, Толькмитта, Дюпюи — Рюльмана, Б. А. Бахметева, Р. Р. Чугаева, А. Н. Рахманова и др.).¹

Ниже остановимся на пояснении только способа Б. А. Бахметева, который и следует в настоящее время рекомендовать для большинства русел «правильного» поперечного сечения, встречающихся в практике. Предварительно осветим особую показательную зависимость для отношения модулей расхода, поскольку эта зависимость полагается в основу способа Б. А. Бахметева.

§ 7-12. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДЛЯ ОТНОШЕНИЯ МОДУЛЕЙ РАСХОДА. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ РУСЛА

Будем вначале рассматривать случай $i > 0$. В уравнение неравномерного движения [см., например (7-119)] входит отношение $K^2:K_0^2 = \kappa^2$. Это отношение представляет собой достаточно сложную функцию от h , поскольку

$$K = \omega C \sqrt{R}, \quad (7-123)$$

где ω , C и R иногда сложно выражаются через h . В связи с этим отыскание интеграла, приведенного в § 7-11, представляет значительные трудности.

Для облегчения решения указанной задачи вместо формулы Шези, в соответствии с которой мы устанавливаем связь между K и h , Б. А. Бахметев предложил для интегрирования уравнения (7-119) использовать особую показательную² зависимость, дающую более простую связь между K и h ; эта зависимость имеет вид:

$$\left(\frac{K''}{K'} \right)^2 = \left(\frac{h''}{h'} \right)^x, \quad (7-124)$$

где h'' и h' — две произвольные глубины, взятые для рассматриваемого поперечного сечения русла; K'' и K' — модули расхода, отвечающие этим глубинам (см. далее рис. 7-38, а); что касается показателя степени x , то он принимается постоянным для данного русла: величина x считается не зависящей от величины глубины h' и h'' ($x = \text{const}$). Этот показатель в формуле (7-124) называется гидравлическим показателем русла.

Зависимость (7-124) можно представить в виде (полагая $K'' = K$):

$$K = A \sqrt[h']{\kappa}, \quad (7-124')$$

где

$$A = \frac{K'}{\sqrt[h']{\kappa}} = \text{const} \text{ (для данного сечения)}. \quad (7-124'')$$

Логарифмируя (7-124), получаем

¹ Первые три названных способа являются устаревшими; об остальных способах см. петит на стр. 308—309.

² Строго говоря, данная зависимость (при постановке вопроса по Бахметеву) является не «показательной», а «степенной» (для данного русла принимается $x = \text{const}$).

$$x = \frac{2 \lg K'' - 2 \lg K'}{\lg h'' - \lg h'} \quad (7-125)$$

Легко показать, что зависимость (7-124') для некоторых русел является теоретически «точной», т. е. она в точности совпадает с зависимостью (7-123), для других же русел — только приближенной, т. е. она только приближенно описывает зависимость (7-123); наконец, имеется группа русел, к которым зависимость (7-124') вообще не применима: для этих русел она дает результаты, значительно отличающиеся от получаемых по зависимости (7-123).

Рассмотрим более подробно различные русла, встречающиеся в практике.

1. Русла, для которых зависимость (7-124'), а следовательно и зависимость (7-124), является теоретически «точной» (для этих русел x вовсе не зависит от глубины: $x = \text{const}$). Сюда относятся русла:

- а) весьма узкие прямоугольные ($x = 2,0$);
- б) широкие прямоугольные ($x = 3,4$);
- в) узкие параболические ($x = 3,7$);
- г) широкие параболические ($x = 4,4$);
- д) треугольные ($x = 5,4$).

2. Русла, для которых зависимость (7-124) может быть применима с некоторым приближением. Сюда относятся русла:

- а) прямоугольные и параболические (исключая широкие и узкие);
- б) трапециевидные;
- в) по своему очертанию приближающиеся к названным.

Для таких русел при $i > 0$ величину x следует определять:

- а) или по формуле

$$x = \frac{2 \lg K_{\text{ср}} - 2 \lg K_0}{\lg h_{\text{ср}} - \lg h_0} \quad (7-126)$$

где $h_{\text{ср}}$ — средняя глубина на данном участке потока, $K_{\text{ср}}$ — модуль расхода, отвечающий этой глубине;

- б) или по формулам Р. Р. Чугаева: для прямоугольного русла

$$x = 3,4 - \frac{2,8}{\frac{b}{h_{\text{ср}}} + 2} \quad (7-127)$$

для трапециевидного русла

$$x = 3,4 \left(1 + \frac{m}{\frac{b}{h_{\text{ср}}} + m} \right) - 1,4 \frac{m'}{\frac{b}{h_{\text{ср}}} + m'} \quad (7-128)$$

где b — ширина русла по дну, m — коэффициент откоса; $m' = 2\sqrt{1 + m^2}$.

При использовании формул (7-126)–(7-128) величину $h_{\text{ср}}$ можно устанавливать весьма приближенно (погрешность в величине $h_{\text{ср}}$ мало сказывается на окончательных результатах расчетов).

3. Русла, к которым зависимость (7-124) явно неприменима.¹ К этой категории русел относятся:

¹ Поскольку в этой зависимости x считается величиной постоянной; для полного же совпадения (7-124) с (7-123) в данном случае необходимо иметь переменную величину x (как то указано на рис. 7-37).

- а) имеющие замкнутый профиль поперечного сечения;
- б) составные;
- в) некоторые правильные русла типа, представленного на рис. 7-37.

4. Остальные русла, в отношении которых заранее неизвестно, применима ли к ним зависимость (7-124). С тем, чтобы выяснить вопрос о применимости к этим руслам зависимости (7-124), необходимо прежде всего вычертить особый график, называемый логарифмической анаморфозой. Этот график, строящийся для данного поперечного сечения русла (рис. 7-38, а), имеет вид, показанный на рис. 7-38, б.

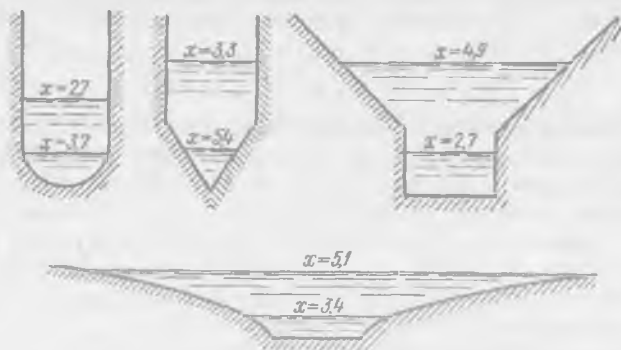


Рис. 7-37. Русла, для которых $x \neq \text{const}$ (величина x изменяется с глубиной наполнения)

По вертикальной оси этого графика откладываются величины $\lg h$, по горизонтальной оси — величины $2 \lg K$. На данном графике нанесено две линии: I и II, причем каждая из этих линий выражает зависимость

$$2 \lg K = f(\lg h). \quad (7-129)$$

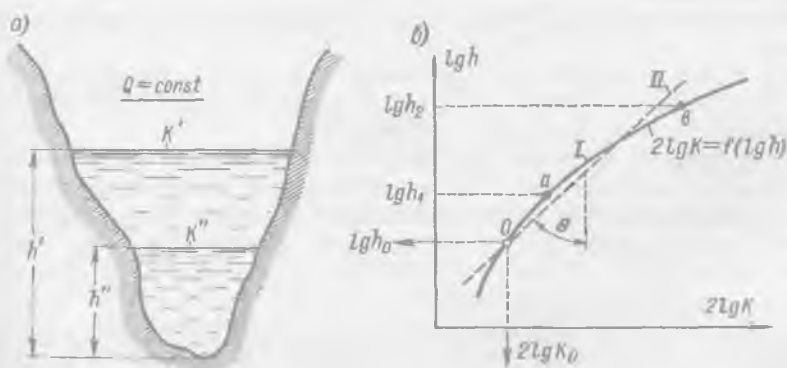


Рис. 7-38. Логарифмическая анаморфоза $2 \lg K = f(\lg h)$; $\text{tg } \theta = x$

Линия I построена по уравнению (7-123). При построении этой линии задаются различными величинами h и затем вычисляют $\lg h$ и $2 \lg K$, причем для определения K пользуются формулой (7-123). Эту линию можно назвать линией Шези.

Линия II является прямой; для построения ее пользуемся показательной

зависимостью (7-124) или что то же зависимостью (7-124'). При этом рассуждаем следующим образом.

Для интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения (см. ниже) показательную зависимость (7-124) в случае $i > 0$ переписывают, согласно Б. А. Бахметеву, в виде:

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_0}\right)^x, \quad (7-130)$$

где h — любая действительная глубина, h_0 — нормальная глубина, определенная по формуле Шези, и K_0 — отвечающий ей модуль расхода. Логарифмируя уравнение (7-130), получаем:

$$2 \lg K = (2 \lg K_0 - x \lg h_0) + x \lg h. \quad (7-131)$$

Пользуясь этим уравнением, и строим линию II . Как видно, данная линия (ее можно назвать линией Бахметева) является действительно прямой, поскольку коэффициент x и выражение, заключенное в скобках, являются постоянными величинами (для заданных русла и расхода). Рассматривая (7-131), дополнительно можно показать, что прямая Бахметева II должна обязательно проходить через точку O линии I , определяемую координатами $\lg h_0$ и $2 \lg K_0$.

Имея в виду все сказанное, можем утверждать, что если на графике логарифмической анаморфозы удастся провести через точку O прямую II (с тем или другим угловым коэффициентом) так, чтобы она достаточно близко располагалась к кривой I , то в этом случае для расчета рассматриваемого русла показательную зависимость (7-124) следует считать приемлемой. Очевидно, что указанное условие всегда будет выдержано, если сама линия Шези I является близкой к прямой. В случае же, когда линия Шези I обладает значительной кривизной, показательную зависимость (7-124) следует считать неприемлемой.

В том случае, если показательная зависимость (7-124) оказывается приемлемой для данного русла, гидравлический показатель x для этого русла находим, пользуясь уже построенной логарифмической анаморфозой. При этом поступаем следующим образом:

а) намечаем на кривой Шези I точку O , определяемую координатами $\lg h_0$ и $2 \lg K_0$;

б) на этой же кривой намечаем точки a и b , отвечающие $\lg h_1$ и $\lg h_2$, где h_1 и h_2 — крайние глубины для участка русла, в пределах которого надлежит построить кривую свободной поверхности;

в) через точку O проводим осредняющую прямую II , так чтобы соответствующий ее участок возможно ближе располагался к участку ab кривой I ;

г) x определяем как угловой коэффициент проведенной прямой II :

$$x = \operatorname{tg} \theta, \quad (7-132)$$

где θ — угол, указанный на рис. 7-38.

Разумеется, пользуясь формулой (7-132), величину $\operatorname{tg} \theta$ надо вычислять, как отношение двух катетов, взятых в соответствующих масштабах, а не по углу θ , измеренному в градусах.

Заметим, что для русел, перечисленных выше в п. 1, линия Шези I является строго прямой.

Выше мы имели в виду случай $i > 0$. Что касается горизонтальных русел и русел с обратным уклоном, то, как будет видно из дальнейшего, в этих случаях величину x следует определять, как указано выше, заменяя только нормальную глубину h_0 глубиной h_x (когда $i = 0$) или глубиной h'_0 (когда $i' < 0$); об этой глубине см. § 7-10).

§ 7-13. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В СЛУЧАЕ РУСЕЛ С ПРЯМЫМ
УКЛОНОМ ДНА ($i > 0$) ПО СПОСОБУ БАХМЕТЕВА

Этот способ, предложенный Б. А. Бахметевым в 1911–1914 гг., применим только к руслам, для которых приемлема показательная зависимость (7-124); как известно из § 7-12, такие русла характеризуются тем, что линия Шези, описываемая уравнением $2 \lg K = f(\lg h)$, является или прямой линией, или кривой, близкой к прямой.¹

Выше мы получили дифференциальное уравнение (7-107):

$$(IV)_{i>0} \quad \frac{dh}{ds} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - j} i. \quad (7-133)$$

Для интегрирования этого уравнения переписываем зависимость Бахметева для модуля расхода в виде (7-130) или в виде

$$\alpha^2 = \eta^x, \quad (7-134)$$

где

$$\alpha = \frac{K}{K_0} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{h}{h_0}, \quad (7-135)$$

причем здесь величина η называется относительной глубиной.

Подставляя (7-134) в (7-133), имеем

$$h_0 \frac{d\eta}{ds} = \frac{\eta^x - 1}{\eta^x - j} i, \quad (7-136)$$

где

$$h_0 d\eta = dh.$$

Уравнение (7-136) можно переписать

$$\frac{i}{h_0} ds = \frac{\eta^x - j}{\eta^x - 1} d\eta = \left(1 - 1 + \frac{\eta^x - j}{\eta^x - 1} \right) d\eta, \quad (7-137)$$

откуда получаем

$$\frac{i}{h_0} ds = d\eta - \frac{1-j}{1-\eta^x} d\eta. \quad (7-138)$$

Представим теперь на рис. 7-39 продольный разрез потока; AB — искомая кривая свободной поверхности. Дифференциальное уравнение было составлено для произвольной элементарной части потока длиной ds . Наметим сечения 1–1 и 2–2, расположенные на конечном расстоянии друг от друга, равном l . Подчеркнем, что сечение 1–1 расположено выше по течению² сечения 2–2. Условимся отмечать гидравлические элементы, относящиеся к сечению 1–1, индексом 1; гидравлические же элементы, относящиеся к сечению 2–2, — индексом 2.

После этого интегрируем уравнение (7-138) от сечения 1–1 до сечения 2–2.

¹ К руслам, для которых линия Шези (кривая 1 на рис. 7-38.б) значительно отличается от прямой, способ Бахметева неприменим. В случае таких русел приходится пользоваться другим способом, предложенным Р. Р. Чугаевым и А. Н. Рахмановым (см. стр. 308–309).

² Отсчет сечений всегда ведут по течению.

В результате получаем

$$\frac{i}{h_0} (s_2 - s_1) = \eta_2 - \eta_1 - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1-j}{1-\eta^x} d\eta, \quad (7-139)$$

где

$$\eta_1 = \frac{h_1}{h_0} \text{ и } \eta_2 = \frac{h_2}{h_0} \quad (7-140)$$

Как показывают специальные подсчеты, j обычно мало изменяется с изменением глубины потока. Имея это в виду, $(1-j)$ можно вынести за знак интеграла, приписав величине j некоторое среднее ее значение, которое далее будем обозначать через \bar{j} . Учитывая дополнительно, что

$$s_2 - s_1 = l, \quad (7-141)$$

вместо (7-139) получаем

$$\frac{i l}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1-\bar{j}) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{1-\eta^x}. \quad (7-142)$$

Рис. 7-39. К интегрированию уравнения (7-138)

Считая, что для данного русла $x = \text{const}$, подынтегральную функцию в уравнении (7-142) следует рассматривать как функцию только η . Поэтому можем написать

$$\int \frac{d\eta}{1-\eta^x} = \varphi(\eta) + C_0, \quad (7-143)$$

где C_0 — произвольная постоянная величина.

Пользуясь обозначением (7-143), уравнение (7-142) окончательно можно представить в виде¹

$$\frac{i l}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1-\bar{j}) [\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)]. \quad (7-144)$$

Это и есть уравнение кривой свободной поверхности потока AB . Оно называется уравнением неравномерного движения или иначе — уравнением Бахметева (для случая $i > 0$).

Приведем в заключение некоторые дополнительные пояснения, относящиеся к уравнению (7-144).

1. В (7-144) входит среднее для рассматриваемого участка потока значение j , т.е. \bar{j} . Величину \bar{j} практически определяют:

а) или по формуле

$$\bar{j} = \frac{1}{2} (j_1 + j_2), \quad (7-145)$$

где j_1 и j_2 вычисляются по зависимости (7-102) соответственно для глубин h_1 и h_2 ;

¹ В некоторых литературных источниках вместо обозначения $\varphi(\eta)$ применяется обозначение $B(\eta)$.

б) или по формуле

$$\bar{j} = \frac{\alpha i C^2}{g} \frac{\bar{B}}{\bar{\chi}}, \quad (7-146)$$

где \bar{C} , \bar{B} , $\bar{\chi}$ вычисляются для глубины

$$\bar{h} = \frac{h_1 + h_2}{2}. \quad (7-147)$$

2. Величины $\varphi(\eta)$, входящие в уравнение (7-144) [см. также зависимость (7-143)], были вычислены путем разложения подынтегральной функции в ряд для разных значений η и x . Результаты этих вычислений были сведены в таблицу (см. табл. П-4 приложения, стр. 639).

Установив для данного русла величину x (см. § 7-12), при помощи указанной таблицы можем легко найти по вычисленным предварительно η_1 и η_2 соответствующие им функции $\varphi(\eta_1)$ и $\varphi(\eta_2)$. Разумеется, по этой таблице можно решать и обратную задачу: зная, например, $\varphi(\eta_1)$, можно найти соответствующие значения η_1 .

Численное значение x нам практически необходимо лишь для того, чтобы выбрать по таблице соответствующее $\varphi(\eta)$ [по η] или η [по $\varphi(\eta)$]. В том случае, если найденное значение x не совпадает с табличным его значением, приходится иногда интерполировать по x между соответствующими значениями $\varphi(\eta)$, взятыми из соседних вертикальных граф таблицы¹. Впрочем, в большинстве случаев практически можно округлять найденное значение x до ближайшего его табличного значения, чтобы избавиться от указанной интерполяции. Надо заметить, что в некоторых книгах табл. П-4 приложения дается в несколько иной форме, чем у нас: она разбивается на ряд отдельных таблиц, каждая из которых отвечает определенному x .

3. Пользуясь уравнением (7-144), можно решить следующие практические задачи:

а) дана глубина h_1 (или h_2). Требуется определить глубину h_2 (или h_1) в сечении потока, расположенном на расстоянии l от сечения, где задана глубина h_1 (или h_2);

б) заданы две глубины: h_1 и h_2 . Требуется найти расстояние l между сечениями, для которых глубины h_1 и h_2 заданы;

в) в определенном сечении потока задана глубина h_1 или h_2 . Требуется построить кривую свободной поверхности AB .²

§ 7-14. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В СЛУЧАЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РУСЛА ($i = 0$) ПО СПОСОБУ БАХМЕТЕВА

В этом случае показательную зависимость для модуля расхода переписывают в виде

$$\left(\frac{K}{K_*}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_*}\right)^3 \quad (7-148)$$

или в виде

$$\boxed{\chi_x^2 = \xi_x^3} \quad (7-149)$$

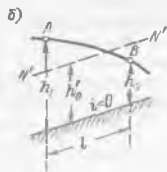
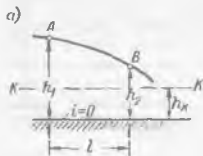
¹ Разумеется, к интерполяции приходится прибегать и в случае, когда известные η [или $\varphi(\eta)$] не совпадают с табличными значениями.

² Порядок расчета, которого следует придерживаться при решении упомянутых задач, освещен в материалах практических занятий (см. стр. 305–307).

где ξ — относительная глубина и κ — относительный модуль расхода:

$$\xi = \frac{h}{h_x}; \quad \kappa = \frac{K}{K_x} \quad (7-150)$$

Как видно, в случае $i = 0$ действительные элементы потока (h и K) относим к критическим элементам потока (h_x и K_x). Пользуясь соотношением (7-149), уравнение $(IV)_{i=0}$ (см. § 7-9) можно решить так же, как мы решали



в § 7-13 уравнение $(IV)_{i>0}$. В результате для случая $i = 0$ получаем соответствующее уравнение неравномерного движения. Этому уравнению обычно придают один из следующих видов:

а) первый вид уравнения:

$$\frac{i_x l}{h_x} = \bar{j}_x (\xi_2 - \xi_1) - \frac{1}{x+1} [\xi_2^{x+1} - \xi_1^{x+1}] \quad (7-151)$$

Рис. 7-40. Кривые свободной поверхности при $i = 0$ и $i < 0$: а — к уравнениям (7-151) и (7-152); б — к уравнению (7-157)

б) в второй вид уравнения:

$$\frac{i_x l}{h_x} = (\bar{j}_x - 1)(\xi_2 - \xi_1) - [\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)], \quad (7-152)$$

где \bar{j}_x — среднее значение j_x на рассматриваемом участке потока (\bar{j}_x вычисляется аналогично величине j , см. § 7-13); величины ξ_1 и ξ_2 равны (рис. 7-40, а):

$$\xi_1 = \frac{h_1}{h_x} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{h_2}{h_x}, \quad (7-153)$$

что касается функций $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$, то они определяются по таблицам, приводимым в литературе, в зависимости от величин ξ_1 и ξ_2 , а также в зависимости от предварительно найденной величины x (см. табл. П-5 приложения, стр. 642—646).

§ 7-15. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В СЛУЧАЕ РУСЛА С ОБРАТНЫМ УКЛОНОМ ДНА ($i < 0$) ПО СПОСОБУ БАХМЕТЕВА

В этом случае показательную зависимость для модуля расхода переписывают в виде:

$$\left(\frac{K}{K_0} \right)^2 = \left(\frac{h}{h_0} \right)^x \quad (7-154)$$

или в виде

$$\kappa'^2 = \zeta^x, \quad (7-155)$$

где ζ — относительная глубина и κ' — относительный модуль расхода:

$$\zeta = \frac{h}{h_0}; \quad \kappa' = \frac{K}{K_0} \quad (7-156)$$

Как видно, в случае $i < 0$ действительные элементы h и K мы относим к элементам фиктивного равномерного потока h'_0 и K'_0 (K'_0 есть модуль расхода, отвечающий глубине h'_0 , поясненной в § 7-10; см. рис. 7-36).

Пользуясь соотношением (7-155), уравнение (IV) _{$h < 0$} (см. § 7-10) можно решить так же, как (IV) _{$h > 0$} . В результате получаем следующее уравнение неравномерного движения для случая $i < 0$:

$$\frac{i l}{h'_0} = -(\zeta_2 - \zeta_1) + (1 + \bar{j}) [\varphi(\zeta_2) - \varphi(\zeta_1)]; \quad (7-157)$$

где \bar{j} — среднее значение j на рассматриваемом участке потока, вычисляемое так же, как и j (см. § 7-13); величины ζ_1 и ζ_2 равны (рис. 7-40, б):

$$\zeta_1 = \frac{h_1}{h'_0}; \quad \zeta_2 = \frac{h_2}{h'_0}; \quad (7-158)$$

что касается функций $\varphi(\zeta_1)$ и $\varphi(\zeta_2)$, то эти функции определяются по таблицам, приводимым в литературе, в зависимости от величины ζ_1 и ζ_2 , а также от предварительно найденной величины x (см., например, [7-4]).

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ПОСТРОЕНИЮ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РУСЛЕ

Будем предполагать, что нам, как это обычно и бывает, заданы: расход Q , уклон дна¹ русла i , форма и размеры поперечного сечения русла (например, канал трапециевидального сечения, ширина по дну b , коэффициент откоса m), а также даны указания относительно шероховатости русла, позволяющие выбрать его коэффициент шероховатости n . Кроме того, будем полагать, что нам задано условие, определяющее глубину h_0 потока в начале или в конце того участка русла, на котором предполагается построить кривую свободной поверхности потока (см. § 7-1; рис. 7-2).

При решении задачи о построении кривой свободной поверхности весь расчет удобно разбить на отдельные пункты, которые мы ниже и поясним.

1. **Определение нормальной глубины наполнения h_n .** Этот вопрос решаем так, как было пояснено в гл. 6 (см. § 6-4 задачу № 3).

2. **Определение критической глубины h_k .** Критическая глубина находится, как указано в § 7-5, п. 2°. В общем случае, когда приходится строить график, представленный на рис. 7-17, вычисления, связанные с его построением, следует выполнять в табличной форме 1.

Форма 1

h	nh	$b + mh$	ω	ω^3	B	$\frac{\omega^3}{B}$

3°. **Установление формы свободной поверхности потока.** Вопрос о форме свободной поверхности потока решается путем сопоставления заданной глубины h_0 с глубинами h_n и h_k [см. неравенства (7-79)–(7-80), а также рис. 7-26, 7-31, 7-33 и относящиеся к ним пояснения].

4. **Определение гидравлического показателя русла x .** Гидравлический показатель русла определяется, как указано в § 7-12. В случае построения логарифмической анаморфозы все необходимые вычисления выполняем в табличной форме 2.

¹ Считаем, что в рассматриваемом случае имеется канал с прямым уклоном дна ($i > 0$); горизонтального русла и русла с обратным уклоном здесь касаться не будем.

h	K	$\lg h$	$\lg K$	$2\lg K$	Примечание
					Численные значения K взяты из таблицы, составленной при определении h_0 (см. п. 1 ²)

Как было отмечено выше, в большинстве случаев найденное значение x можно округлить (для упрощения расчета) до ближайшего табличного значения (см. табл. П-4 приложения, стр. 639–641).

5. Определение величины \bar{j} . Величину \bar{j} определяем по формуле (7-146) или (7-145). При этом можно различать два разных способа учета величины j при построении свободной поверхности потока.

Первый способ (менее точный). Здесь предполагаем, что величина \bar{j} постоянна по всей длине потока. При этом под глубинами h_1 и h_2 , входящими в указанные формулы, понимаем глубины в начале и в конце нашего русла.

Второй способ (более точный). Согласно этому способу, рассматриваемое русло разбиваем на ряд участков, причем принимаем, что j постоянно только в упомянутые выше формулы, понимаем глубины в начале и в конце каждого выделенного участка русла.

Следуя второму способу, удобно предварительно, пользуясь формулой (7-102), построить по нескольким точкам кривую

$$j = f(h)$$

с тем, чтобы, вычислив по формуле (7-147) величину h , далее по этой кривой находить j .

В случае построения кривых типа a_6 , когда j имеет малые значения, всегда можно применить более простой (первый) способ определения j .

6. Построение кривой свободной поверхности потока по уравнению Бахметева. Это построение можно выполнять двумя способами.

Первый способ (когда j считается постоянным по всей длине потока; см. п. 5²). Предположим, что нам задана глубина¹ $h_2 = h_\Phi$. В этом случае переписываем уравнение неравномерного движения (7-144) в виде:

$$l = A - D [\eta_1 - E\Phi(\eta_1)], \quad (A)$$

где

$$A = \frac{h_0}{i} [\eta_2 - (1 - \bar{j}) \Phi(\eta_2)] = \text{const};$$

$$D = \frac{h_0}{i} = \text{const}; \quad E = (1 - \bar{j}) = \text{const}. \quad (B)$$

Зная глубину $h_2 = h_\Phi$ (глубину в конце русла), определяем относительную глубину

$$\eta_2 = h_2/h_0,$$

а затем и величину $\Phi(\eta_2)$, которую находим по табл. П-4 приложения в зависимости от установленных величин η_2 и x .

После этого в соответствии с установленной выше формой кривой свободной поверхности (см. п. 3²) выясняем, в каких пределах должна лежать глубина h_1 потока. Например, для кривой типа a_1 глубина h_1 должна лежать в пределах

$$h_0 < h_1 < h_2.$$

¹ Как отмечалось ранее, глубина h_2 намечается всегда ниже по течению глубины h_1 (отсчет сечений всегда ведется по течению).

Установив таким образом возможные пределы изменения глубин h_1 , составляем таблицу по форме 3, в которой задасмся рядом значений h_1 (в указанных пределах) и вычисляем соответствующие этим глубинам l , т. е. расстояния от сечений $l-1$, где мы задались глубинами h_1 , до заданного нам сечения 2-2, где глубина h_0 зафиксирована.

По данным вертикальных граф 1 и 7 формы 3 и строим кривую свободной поверхности на чертеже продольного профиля русла.¹

В тех случаях, когда задана не глубина h_2 , а глубина h_1 , при построении свободной поверхности приходится идти вниз по течению; весь ход расчета остается таким же, как пояснено выше, меняются лишь знаки в уравнении (А) перед коэффициентами A и D , причем в уравнениях (А) и (Б) величину η_1 заменяем величиной η_2 , а величину η_2 — величиной η_1 .

Форма 3

h_1	η_1	$\varphi(\eta_1)$ по табл. П-4 приложения, стр. 639-641	$E\varphi(\eta_1)$	$\eta_1 - E\varphi(\eta_1)$	$D[\eta_1 - E\varphi(\eta_1)]$	l
1	2	3	4	5	6	7

Форма 4

Номера участков	h	\bar{h}	j	η	$\varphi(\eta)$ по табл. П-4 приложения, стр. 639-641	$\eta - (1-j)\varphi(\eta)$	l
I	h_1	\bar{h}	\bar{j}	η_1	$\varphi(\eta_1)$	$\eta_1 - (1-j)\varphi(\eta_1)$	l_1
	h_2			η_2	$\varphi(\eta_2)$	$\eta_2 - (1-j)\varphi(\eta_2)$	
II	h_1	h	j	η_1	$\varphi(\eta_1)$	$\eta_1 - (1-j)\varphi(\eta_1)$	l_2
	h_2			η_2	$\varphi(\eta_2)$	$\eta_2 - (1-j)\varphi(\eta_2)$	
							Σl

¹ Обычно подобные профили строятся в искаженном масштабе (вертикальный масштаб более крупный, чем горизонтальный). При построении подобного профиля русла в таком масштабе линию дна русла следует намечать, разумеется, не по заданному углу наклона ее к горизонту, а по катетам, откладываемым в разных масштабах (в вертикальном и горизонтальном). Однако, откладывая от сечения 2-2 вверх по течению найденные длины l (для получения местоположения сечений, в которых мы задались глубинами h_1), размеры l при малых действительных уклонах i можно измерять по горизонтали (в горизонтальном масштабе).

Второй способ (когда при определении j русло разбивается на участки; см выше п. 5¹). В этом случае уравнение неравномерного движения (7-144) удобнее представить в виде:

$$l = D_0 \{ [\eta_2 - (1-j)\varphi(\eta_2)] - [\eta_1 - (1-j)\varphi(\eta_1)] \}, \quad (B)$$

где

$$D_0 = \frac{h_0}{i} = \text{const.} \quad (Г)$$

Далее поступаем следующим образом. Разбиваем заданное русло на ряд участков, выясняем, в каких пределах должны лежать искомые глубины. Задаемся, сообразуясь с этими пределами, глубинами в начале и в конце каждого выделенного участка русла (одна глубина в конце или в начале нашего русла нам задана для расчета).

После этого, зная глубины в начале и в конце каждого участка, вычисляем по уравнению (B) длины l всех участков. Все вычисления сводим в таблицу, составленную по форме 4.

По данным такой таблицы и строим на чертеже кривую свободной поверхности.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ КРАТКИЕ УКАЗАНИЯ О СУЩЕСТВУЮЩИХ СПОСОБАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ (7-133) (СЛУЧАЙ $i > 0$)¹

Выше был изложен только один из этих способов — способ Б. А. Бахметева, причем было отмечено, что суть способа Б. А. Бахметева заключается в замене «формулы Шези» [записанной в виде (7-123)] формулой (7-131) показательного вида, получаемой из соотношения (7-130).

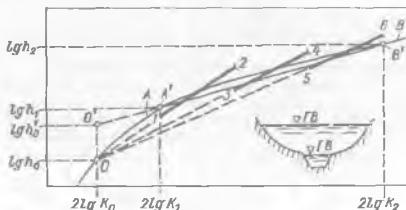


Рис. 7-41. Аппроксимирование логарифмической анаморфозы по способу Бахметева (см. отрезки 1-2, 3-4, 5-6) и по способу Чугаева-Рахманова (см. прямую A'-B')

через точку O , отвечающую нормальной глубине h_0 . Как видно, в общем случае (см., например, русла на рис. 7-37), когда действительная логарифмическая анаморфоза OAB (построенная по формуле Шези) значительно отличается от прямой, проходящей через точку O , способ Б. А. Бахметева оказывается мало удовлетворительным.

Как было отмечено выше, для указанного общего случая русла следует применять способ Чугаева-Рахманова, который основан на аппроксимации «действительной линии» AB не секущими отрезками 1-2, 3-4, 5-6, как у Б. А. Бахметева, а прямой $A'B'$ (рис. 7-41). При этом расчетное уравнение неравномерного движения получает вид:

¹ Подробнее см. Р. Р. Чугаев. О неравномерном установившемся медленно изменяющемся движении жидкости в открытых призматических руслах. Изв. ВНИИГ имени Б. Е. Веденеева, т. 61, 1958, с. 86-107; а также т. 1, 1971, с. 157-227.

$$\frac{j}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1 - \bar{j}) [\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)],$$

где h_0 — условная нормальная глубина; смысл этой глубины ясен из рис. 7-41; под величинами η_1 и η_2 следует понимать здесь отношения: $\eta_1 = h_1 : h_0$, $\eta_2 = h_2 : h_0$; величина же x определяется по формуле

$$x = \frac{2 \lg K_2 - 2 \lg K_1}{\lg h_2 - \lg h_1},$$

а не по зависимости (7-126); в остальном указанное уравнение ничем не отличается от уравнения Бахметева.

Можно считать, что в области рассматриваемого вопроса существует только два общих метода решения задачи:

а) метод Б. А. Бахметева, согласно которому уравнение Шези (7-123) для интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения предлагается заменить одночленной показательной зависимостью $K^{2jx} = Ah$, где $A = \text{const}$ и $x = \text{const}$;

б) метод А. Н. Рахманова согласно которому уравнение Шези (7-123) предлагается заменять двучленной зависимостью вида $K^{2jx} = Ah + B$, где x , A и B являются постоянными величинами.

Внутри этих двух общих методов следует различать целый ряд различных способов (предложенных разными авторами), служащих для определения постоянных параметров (x , A , B), входящих в показательную зависимость Б. А. Бахметева или А. Н. Рахманова.

Анализируя отраженный в литературе материал, легко видеть следующее:

1) Отмечаемые иногда в литературе способы М. Д. Чертоусова и И. И. Агроскина не являются оригинальными; эти авторы повторяют работы А. Н. Рахманова 1930–1931 гг.

2) Окончательное уравнение неравномерного движения, предложенное тем или другим автором (в частности уравнение Б. А. Бахметева) всегда можно записать в двух различных формах, выразив его: а) или через η , б) или через $x = \eta^{2j}$. Легко показать, что форма записи уравнения с использованием η всегда более удобна, чем форма записи с использованием x .

3) Приводимое иногда в литературе уравнение Н. Н. Павловского — неудовлетворительно: а) оно выражается через x , б) данное уравнение для расчета хотя и требует только одной таблицы (для $x = 2,0$), но эта таблица должна быть во много раз больше, чем одна из таблиц Бахметева. Главным недостатком вывода уравнения Н. Н. Павловского является неприемлемое допущение, согласно которому зависимость $K = f(h)$ может быть графически представлена прямой линией (в обычных не логарифмических координатах, при $x = 2,0$).

В заключение отметим, что выше мы считали величину j постоянной ($j = \text{const}$), причем выносили ее за интеграл. Однако еще в 1925 г. В. Д. Журин указал на возможность использования соответствующей показательной зависимости для величины j . В это же время с учетом такой зависимости для j И. И. Леви получил уравнение неравномерного движения, не прибегая к допущению, согласно которому $j = \text{const}$ (к сожалению, в этом уравнении названного автора были допущены некоторые опечатки; правильный вид данного уравнения приводится в нашей статье, отмеченной в списке на стр. 308).

Б. НЕРАВНОМЕРНОЕ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИСКУССТВЕННЫХ РУСЛАХ (КАНАЛАХ)

§ 7-16. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА ПО УРАВНЕНИЮ БЕРНУЛЛИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ (СПОСОБ ЧАРНОМСКОГО)¹

Рассмотрим нецилиндрический (сужающийся или расширяющийся по длине) канал. В этом случае дифференциальное уравнение неравномерного движения оказывается относительно сложным [см. уравнение (7-24)]. Такое уравнение в общем случае не интегрируется даже приближенно.

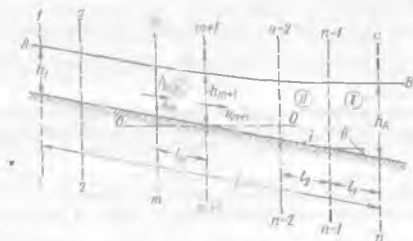


Рис. 7-42. К способу Чарномского

Вопрос о построении свободной поверхности потока в непризматическом канале осложняется еще и тем, что мы не имеем достаточно полных сведений о том, какие именно формы свободной поверхности могут иметь потоки, образующиеся в тех или других условиях в рассматриваемом канале.²

Имея в виду такое положение, для построения свободной поверхности в данном случае приходится непосредственно применять уравнение Бернулли, предварительно разбив канал на отдельные расчетные участки.

Положим, что нам заданы: русло канала, расход Q и глубина воды h_m , например, в конце канала (в сечении $n-n$; рис. 7-42).

Чтобы построить кривую AB свободной поверхности потока, разбиваем данный канал, имеющий длину L , на отдельные участки относительно малой длины, равной l . При этом каждый выделенный участок канала длиной l рассматриваем в отдельности, идя вверх по течению: сперва рассчитываем I участок, затем II и т. д. Расчет каждого выделенного участка (например, участка M) состоит в определении глубины h_m потока в начале данного участка (по известным величинам l_m и h_{m+1}). Идя по такому пути, можно последовательно определить глубины в граничных сечениях $(n-1)$, $(n-2)$, ..., (2) , (1) , а затем по точкам, определяемым этими глубинами, провести на чертеже искомую кривую AB свободной поверхности.³

¹ Этот способ был опубликован В. И. Чарномским в 1914 г. Иногда данный способ называют способом Хестела (опубликовавшим его в 1924 г.), что не является правильным.

² В литературе на эту тему опубликованы работы В. Б. Дильнева (относящиеся только к случаю плавно изменяющегося движения в руслах с прямолинейными в плане боковыми стенками), а также работы В. М. Овсепяна и Б. Т. Емцева.

³ При построении на чертеже свободной поверхности необходимо учитывать указания, приведенные выше в смысле на стр. 307.

Рассмотрим для примера упомянутый участок M , ограниченный сечениями m и $(m+1)$. Намечаем плоскость сравнения OO на уровне нижней точки дна сечения $(m+1)$ и, соединив уравнением Бернулли сечения m и $(m+1)$, получаем:

$$i_{\bar{m}} + h_m + \frac{\alpha v_m^2}{2g} = h_{m+1} + \frac{\alpha v_{m+1}^2}{2g} + \Delta h_l, \quad (7-159)$$

где $i_{\bar{m}}$ — падение дна канала от сечения m до сечения $(m+1)$; v_m и v_{m+1} — средние скорости в сечениях m и $(m+1)$; Δh_l — потеря напора по длине от сечения m до сечения $(m+1)$.

Ранее было введено понятие уклона трения (см. § 7-2):

$$i_f = \frac{v^2}{C^2 R}, \quad (7-160)$$

Пользуясь этой величиной, потерю напора Δh_l можно представить в виде

$$\Delta h_l = i_f l_m, \quad (7-161)$$

где \bar{i}_f — среднее значение уклона трения на длине l_m .

Используя зависимость (7-161), уравнение Бернулли (7-159) представляем в виде

$$\boxed{i_{\bar{m}} = \frac{\mathcal{E}_{m+1} - \mathcal{E}_m}{l - i_f l_m}}, \quad (7-162)$$

где \mathcal{E}_m и \mathcal{E}_{m+1} — удельные энергии сечения соответственно в сечениях m и $(m+1)$:

$$\mathcal{E}_m = h_m + \frac{\alpha v_m^2}{2g}; \quad \mathcal{E}_{m+1} = h_{m+1} + \frac{\alpha v_{m+1}^2}{2g}. \quad (7-163)$$

Величину \bar{i}_f , входящую в (7-162), можно находить по одной из следующих двух формул:

$$\bar{i}_f = \frac{1}{2} (i_{f_m} + i_{f_{m+1}}), \quad (7-164)$$

где i_{f_m} и $i_{f_{m+1}}$ — уклоны трения, найденные для сечений m и $(m+1)$, в которых имеют место глубины h_m и h_{m+1} ;

$$\bar{i}_f = \frac{\bar{v}^2}{C^2 R}, \quad (7-165)$$

где \bar{v} , \bar{C} , \bar{R} — известные гидравлические элементы, найденные для некоторого «среднего» сечения, расположенного между сечениями m и $(m+1)$, и для некоторой средней глубины, равной, например,

$$\bar{h} = \frac{1}{2} (h_m + h_{m+1}). \quad (7-166)$$

Уравнение (7-162) и является здесь основным расчетным уравнением.

В случае горизонтального русла в уравнение (7-162) следует подставить $\bar{i} = 0$; в случае же русла с обратным уклоном $\bar{i} = -\bar{i}'$, где \bar{i}' — абсолютная величина уклона.

Если бы нам была задана глубина h_1 в начале нецилиндрического русла (а не глубина h_2 в конце его, что мы имели в виду выше), то расчет пришлось

h , м	\mathcal{E} (по графику), м	$\mathcal{E}_{m+1} - \mathcal{E}_m$, м	\bar{h} , м	$-\bar{i}_f$ (по графику)	l , м
h_n					
h_{n-1}					
\dots					
h_1					

бы вести по тому же уравнению (7-162), идя вниз по течению. При этом мы должны были бы из этого уравнения найти глубину h_{m+1} , зная глубину h_m и длину рассматриваемого участка l_m .

При построении свободной поверхности потока в нецилиндрическом русле уравнение (7-162) применительно к тому или другому участку рассматриваемого русла приходится решать подбором. При этом поступаем следующим образом. Задаемся в намеченном сечении m рядом глубин: h_{m1} ; h_{m2} ; h_{m3} ; ...; h_m ; ... и для каждой такой глубины вычисляем величины \mathcal{E}_m и \bar{i}_f . В результате отыскиваем такую глубину h_m , при которой будет иметь место равенство (7-162).

Поскольку цилиндрическое русло можно рассматривать как частный случай нецилиндрического, то описанный выше способ расчета может быть использован и для построения свободной поверхности потока в любом цилиндрическом русле. В этом случае уравнение (7-162) решается без подбора, а расчет по построению свободной поверхности выполняют по форме 5.

В такой таблице (форма 5) задаемся рядом значений h (принимая, например, $\Delta h = h_{m+1} - h_m = 0,1$ или $0,2$ м и т. п.) и находим соответствующие расстояния l . Для облегчения вычислений, приводимых в таблице предварительно следует построить два вспомогательных графика:

а) $\mathcal{E} = f(h)$, по которому для разных глубин находим при расчете величины \mathcal{E} ;

б) $(\bar{i} - \bar{i}_f) = f(\bar{h})$, при помощи которого по установленной глубине \bar{h} можно находить величины $(\bar{i} - \bar{i}_f)$.

В. ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 7-17. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Рассматривая движение воды в естественных водотоках, всегда сталкиваемся с неравномерным ее движением. Такое движение обуславливается тем, что уклоны дна и поперечные сечения русла в значительной мере изменяются вдоль потока.

При проектировании плотин на реках, а также при проектировании расчисток естественных русел приходится строить кривые свободной поверхности потока. Полученное выше дифференциальное уравнение неравномерного движения воды в случае естественных русел интегрированию не поддается. В этом случае приходится обращаться к различным специальным способам расчета, которые являются в значительной мере приближенными.

Относительно точное решение для естественных русел может быть получено только при наличии достаточных данных, освещающих:

- формы поперечных и продольного профилей русла;
- коэффициенты шероховатости русла;
- величины ожидаемых расходов;

Далее для намеченного фиктивного цилиндрического русла по уравнению неравномерного движения, полученному в разделе *A* данной главы (см. выше), находим искомую отметку горизонта воды в начале расчетного участка;

2-й метод заключается в непосредственном применении к выделенному расчетному участку основного дифференциального уравнения неравномерного движения (1) — см. зависимость (7-12). Для случаев естественных водотоков имеется ряд способов решения уравнения (1), по которым отыскиваем отметку горизонта воды в начале расчетного участка.

2-й метод является более точным, однако он требует большей вычислительной работы.

1-й метод используется главным образом для ориентировочных подсчетов при эскизном проектировании и т. п.

Рассмотрим каждый из двух названных методов в отдельности.

1-Й МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 7-18. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В ЕСТЕСТВЕННОМ РУСЛЕ ПУТЕМ ЗАМЕНЫ ЕГО ФИКТИВНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ РУСЛОМ

Используя первый метод, приходится решать два разных вопроса:

а) как именно данный расчетный участок естественного русла следует заменять фиктивным цилиндрическим руслом;

б) каким образом следует рассчитывать намеченное фиктивное русло, т. е. как надо определять отметку горизонта воды в начале этого русла, зная отметку горизонта воды в конце его.

Рассмотрим отдельно два этих вопроса.

1°. Замена расчетного участка действительного русла фиктивным цилиндрическим. Вообще говоря, данное естественное русло можно заменить любым цилиндрическим руслом: трапецидальным, прямоугольным и т. п. Однако, поскольку рассматриваемый метод является весьма приближенным, для упрощения расчета (см. ниже) идут на замену естественного русла или фиктивным широким прямоугольным, или фиктивным широким параболическим. Другие формы фиктивного русла, как правило, следует исключать из рассмотрения.

Имея в виду сказанное, при решении поставленной задачи приходится выяснить следующие вопросы:

1) какое поперечное сечение фиктивного русла следует выбрать: прямоугольное или параболическое. Очевидно, здесь следует останавливаться на том, которое по своей форме ближе к естественным поперечным сечениям данного русла;

2) каким должен быть уклон дна фиктивного русла. Обычно уклон дна фиктивного русла назначают равным:

$$i = J_0 = \frac{\Delta_0}{l}, \quad (7-167)$$

где l — длина рассматриваемого расчетного участка; Δ_0 — падение свободной поверхности на длине l в естественном состоянии при том расходе Q_0 , для которого нам необходимо построить кривую свободной поверхности; J_0 — уклон свободной поверхности в естественном состоянии. Как видно, принимая i по формуле (7-167), линию дна $D-D$ фиктивного русла (рис. 7-44) назначаем параллельной свободной поверхности E_0-E_0 в естественном состоянии;

3) вопрос о высотном положении линии дна $D-D$ фиктивного русла.

Последний вопрос решается следующим образом: от линии E_0-E_0 , отвечающей заданному расходу Q , откладываем вниз отрезок, равный нормальной глубине h_0 фиктивного русла, в результате и получаем высотное положение линии дна $D-D$ (рис. 7-44). Следовательно, нам необходимо знать величину глубины h_0 (она необходима также

и для выполнения самого расчета; см. ниже). Для определения глубины h_0 , относящейся к фиктивному руслу, используется прием, предложенный Тольманом.

Определение глубины h_0 в случае широкого прямоугольного фиктивного русла. Представим на рис. 7-45 некоторое среднее поперечное сечение естественного русла. Через $E_0 - E_0$ на чертеже обозначен уровень воды в естественном состоянии (при заданном расходе); через $П - П$ — уровень воды после постройки плотины (подпертый уровень). Величина B_{cp} — средняя ширина потока поверху в подпертом состоянии — заранее нам неизвестна, так как в начале расчета неизвестно положение уровня $П - П$. Однако согласно Тольману B_{cp} мы все же предварительно можем установить — грубо приближению, на глаз.

Имея B_{cp} , далее поступаем так:

1. Ширину фиктивного прямоугольного русла принимаем

$$B_{\phi} = B_{cp} \quad (7-168)$$

2. Глубину h_0 , определяющую высотное положение линии $D - D$ (рис. 7-44), находим из условия, что живое сечение фиктивного русла $abcd$ (рис. 7-45) пропускает при равномерном режиме и при уклоне i [см. формулу (7-167)] такой же расход, как и живое сечение $a_1 b_1 c_1 d_1$ действительного русла.

Исходя из этого условия, можем написать

$$Q = \omega_{\phi} C_{\phi} \sqrt{R_{\phi} i}. \quad (7-169)$$

где индексом « ϕ » обозначены элементы, относящиеся к фиктивному руслу¹

В зависимости (7-169)

$$\omega_{\phi} = B_{cp} h_0; \quad R_{\phi} = h_0; \quad i = J_0. \quad (7-170)$$



Рис. 7-45. Определение глубины h_0 для фиктивного прямоугольного русла

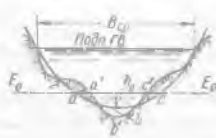


Рис. 7-46. Определение глубины h_0 для фиктивного параболического русла

Подставляя (7-170) в (7-169), имеем

$$Q = h_0 B_{cp} C_{\phi} \sqrt{h_0 J_0}. \quad (7-171)$$

откуда

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B_{cp}^2 C_{\phi}^2 J_0}} \quad (7-172)$$

По этой формуле и определяем h_0 , установив предварительно величину C для какой-либо глубины $h (\approx R)$ фиктивного русла, взятой на глаз.

Определение глубины h_0 в случае широкого параболического русла. На рис. 7-46 показана замена действительного русла фиктивным параболическим. Глубину h_0 находим из того же условия, что и в случае прямоугольного русла:

$$Q_{abc} = Q_{a' b' c'} \quad (7-173)$$

¹ Русло рассматривается как достаточно широкое, для которого $\chi \approx B$.

где Q_{abc} и $Q_{a'b'c'}$ — расходы для живых сечений abc и $a'b'c'$ (см. чертеж).

Используя (7-173), можем получить соответствующую формулу для h_0 . Эту формулу приводить здесь не будем (она получается более сложной, чем для прямоугольного русла, причем ее приходится решать в отношении h_0 подбором).

2. Расчет фиктивного цилиндрического русла. Имея в виду приближенность 1-го метода, при расчете вводят следующие дополнительные допущения:

1) величину j считают равной нулю:

$$j = 0. \quad (7-174)$$

В случае спокойного движения, которое условились рассматривать, значение j достаточно мало (см. § 7-8);

2) коэффициент Шези C считают не изменяющимся с изменением глубины наполнения русла,

$$C = \text{const}; \quad (7-175)$$

3) гидравлический показатель x округляют до ближайшего целого его значения и принимают: для прямоугольного фиктивного русла $x = 3$; для параболического фиктивного русла $x = 4$.

Пользуясь этими допущениями, уравнение неравномерного движения Бахметева можно привести к более простым уравнениям:

а) в случае прямоугольного фиктивного русла — к так называемому уравнению Дюпюна — Рюльмана (предложенному еще в 1880 г.):

$$\frac{H}{h_0} = D \left(\frac{a_k}{h_0} \right) - D \left(\frac{a_n}{h_0} \right), \quad (7-176)$$

где a_k и a_n — превышения кривой свободной поверхности над линией нормальных глубин $N-N$ (соответственно в конце и в начале расчетного участка);

б) в случае параболического фиктивного русла — к так называемому уравнению Тольмитта (предложенному в 1907 г.):

$$\frac{H}{h_0} = T(\eta_k) - T(\eta_n), \quad (7-177)$$

где η_k и η_n — известные относительные глубины в конце и начале участка фиктивного русла.

Функции $D \left(\frac{a}{h_0} \right)$ и $T(\eta)$, входящие в (7-176) и (7-177), при определении отметки горизонта воды в начале рассматриваемого участка фиктивного русла берутся из особых таблиц, приводимых в литературе, например [7-3].

2-Й МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 7-19. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Представим на рис. 7-47 продольный разрез расчетного участка естественного русла, ограниченного сечениями m и $(m+1)$; отсчет сечений ведем по течению.

Выше, в связи с выводом уравнения (I) — см. формулу (7-12), имели зависимость (7-6). Учитывая возможность возникновения в естественном русле местных потерь напора, эту зависимость в данном случае следует переписать в виде¹

¹ В естественных водотоках можем получить неравномерное резко изменяющееся движение. При этом оценка потерь напора по длине с помощью формул равномерного движения (см. § 7-2) может давать здесь уже значительную погрешность. Имея это в виду, под dh_f следует понимать не только местные потери напора, но и разность между действительными потерями напора по длине (получающимися при резко изменяющемся движении) и вычисленными по формулам равномерного движения.

$$-dz = dh_v + dh_l + dh_j, \quad (7-178)$$

$$dh_v = d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right); \quad (7-179)$$

$$dh_l = \frac{v^2}{C^2 R} ds = \frac{Q^2}{K^2} ds. \quad (7-180)$$

Что касается местных потерь dh_j , то их принято представлять здесь в виде

$$dh_j = \zeta d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) = \zeta dh_v, \quad (7-181)$$

где dh_v в случае расширяющегося потока является отрицательной величиной.

В отношении коэффициента сопротивления ζ в литературе имеются следующие данные:

а) если средняя скорость уменьшается вдоль течения (поток расширяется), то:¹

$$\zeta = (-0,2) \div (-1,0); \quad (7-182)$$

б) если средняя скорость увеличивается вдоль течения (поток сужается), то

$$\zeta = 0. \quad (7-183)$$

Подставляя (7-179), (7-180) и (7-181) в (7-178), имеем

$$-dz = (1 + \zeta) d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) + \frac{Q^2}{K^2} ds. \quad (7-184)$$

Интегрируя (7-184) от сечения m до сечения $(m+1)$, получаем (рис. 7-47)

$$z_m - z_{m+1} = (1 + \zeta) \left[\frac{\alpha v_{m+1}^2}{2g} - \frac{\alpha v_m^2}{2g} \right] + Q^2 \int_m^{m+1} \frac{ds}{K^2}, \quad (7-185)$$

где z_m и z_{m+1} — отметки горизонтов воды в сечениях m и $(m+1)$; v_m и v_{m+1} — скорости в этих сечениях.

С некоторым приближением можно считать, что

$$Q^2 \int_m^{m+1} \frac{ds}{K^2} = \left(\frac{1}{K^2}\right) Q^2 (s_{m+1} - s_m) = Q^2 \left(\frac{1}{K^2}\right) L, \quad (7-186)$$

где K^2 — среднее значение K^2 на рассматриваемом участке.²

Подставляя (7-186) в (7-185), получаем

1) полную форму уравнения, учитывающую как изменение скоростного напора по длине потока, так и «местные потери» напора:

$$(A) \quad z_m - z_{m+1} = Q^2 \left[(1 + \zeta) \frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{\omega_{m+1}^2} - \frac{1}{\omega_m^2} \right) + \frac{l}{K^2} \right]; \quad (7-187)$$

2) промежуточную форму, учитывающую изменение скоростного напора, но не учитывающую «местных потерь» напора:

$$(B) \quad z_m - z_{m+1} = Q^2 \left[\frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{\omega_{m+1}^2} - \frac{1}{\omega_m^2} \right) + \frac{l}{K^2} \right]; \quad (7-188)$$

3) упрощенную форму, не учитывающую изменений скоростного напора и «местных потерь» напора и учитывающую только потери напора по длине потока h_l :

¹ В формуле (7-182) ζ отрицательно, при этом величина dh_j по формуле (7-181) получается положительной.

² В выражении (7-186) вместо $\frac{1}{K^2}$ следовало, собственно, иметь $\left(\frac{\bar{v}}{K^2}\right)$.

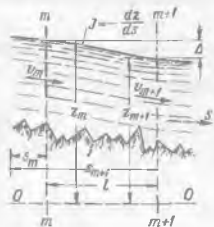


Рис. 7-47. Построение свободной поверхности по уравнениям (7-187) — (7-189)

$$z_m - z_{m+1} = Q^2 \frac{l}{K^2} \quad (7-189)$$

Последним упрощенным уравнением главным образом и пользуются в практике. При помощи одного из приведенных уравнений (7-187) – (7-189) можно найти отметку z_m , зная отметку горизонта воды z_{m+1} в сечении $(m+1)$

§ 7-20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ $\frac{l}{K^2}$ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ГРАФИКИ

Как видно, для определения отметки z_m по одному из уравнений (7-187) (7-188) или (7-189) необходимо знать величину $\frac{l}{K^2}$

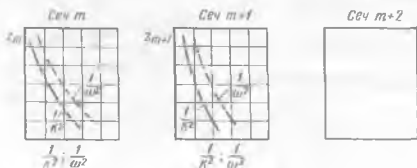


Рис. 7-48. Вспомогательные графики для расчета свободной поверхности

Для установления этой величины можно предложить много различных приближенных приемов. В частности, ее можно определять:

а) или по формуле

$$\frac{l}{K^2} = \frac{\frac{1}{K_m^2} + \frac{1}{K_{m+1}^2}}{2} l \quad (7-190)$$

б) или по формуле

$$\frac{l}{K^2} = \frac{\frac{1}{K_m^2} + \frac{1}{K_{m+1}^2} + \frac{1}{K_{m+2}^2} + \dots + \frac{1}{K_{m+n}^2}}{n+2} l \quad (7-191)$$

где

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{\omega^2 C^2 R} \quad (7-192)$$

здесь K_m и K_{m+1} — модули расхода, относящиеся соответственно к сечениям m и $(m+1)$; K' , K'' , K''' , ... — модули расхода, подсчитанные для вспомогательных промежуточных сечений, намеченных между сечениями m и $(m+1)$; n — количество промежуточных сечений

Очевидно, величины K_m , K' , K'' ... можно установить только зная заранее предварительно положением свободной поверхности на рассматриваемом расчетном участке.¹

При определении величины (7-192) приходится устанавливать значения ω , C , R .

Величины ω находят или при помощи планиметра, или путем разбивки рассматриваемого «неправильного» живого сечения на элементарные геометрические фигуры. Величину C обычно принимают приблизительно равной B . Наконец, часто можно считать $R = h$ или $R = \frac{2}{3} h$, где h — наибольшая глубина в рассматриваемом сечении.

Что касается размера l , то в плане его измеряют или по средней линии водной поверхности, или по линии наибольших глубин потока. На продольном профиле l измеряют по горизонтали.

При массовых расчетах всегда предварительно следует строить вспомогательные графики для каждого намеченного сечения потока.² Эти графики имеют вид, представленный на рис. 7-48.

¹ Напомним, что кривая свободной поверхности в пределах расчетного участка всегда принимается в виде прямой линии. Следовательно, для определения K_m , K' , K'' ... нам достаточно задаться отметкой z_m (отметка z_{m+1} считается известной).

² Если предполагают пользоваться формулой (7-191), то соответствующие графики следует строить и для промежуточных дополнительных сечений потока.

§ 7-22. ПОСТУЛАТ ИНВАРИАНТНОСТИ МОДУЛЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ.
ПОСТРОЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО СПОСОБУ РАХМАНОВА

По предложению Н. Н. Павловского величину

$$\frac{1}{K^2} = F \text{ (обозначение)} \quad (7-195)$$

называют модулем сопротивления расчетного участка русла.

Представим на рис 7-50 продольный разрез расчетного участка русла. Далее покажем на чертеже ряд прямолинейных свободных поверхностей, проходящих через одну и ту же точку N' , принадлежащую среднему сечению $M-M$ (расположенному посередине рассматриваемого расчетного участка); см. на чертеже свободные поверхности 1-1, 2-2, 3-3. Отметку точки N' обозначим через z , ясно, что

$$\bar{z} = \frac{z_m + z_{m+1}}{2} \quad (7-196)$$

Постулат инвариантности (неизменности) модуля сопротивления, сформулированный Н. Н. Павловским, можно прочесть так: *модуль сопротивления F является одинаковым по величине для всех практически возможных свободных поверхностей, проходящих через одну и ту же точку N наметченную в любом месте на среднем сечении $M-M$ (см. точки N' , N'' , N''' и т. д.).*

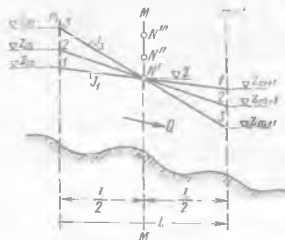


Рис 7-50. К постулату инвариантности модуля сопротивления

Как можно показать соответствующими подсчетами, постулат инвариантности оказывается приемлемым для многих естественных русел. Рассматривая свободные поверхности 1-1, 2-2, 3-3, показанные на рис 7-50, можем видеть, что, вообще говоря, для этих свободных поверхностей F является функцией z и J .

$$F = \frac{1}{K^2} = \theta(z, J), \quad (7-197)$$

где J — уклон данной свободной поверхности.

Принимая для данного русла постулат инвариантности, получаем, что

$$\frac{\partial F}{\partial J} = 0, \quad (7-198)$$

т. е. полагаем, что F не зависит от уклона J , и, следовательно, F является функцией только отметки z :

$$F = \frac{1}{K^2} = \theta(z). \quad (7-199)$$

Таким образом, в случае приемлемости постулата инвариантности (рис. 7-50) величина F целиком определяется двумя отметками: z_m и z_{m+1} любой величины [поскольку \bar{z} согласно (7-196), выражается через z_m и z_{m+1}].

Зависимость (7-199) для рассматриваемого участка русла можно представить кривой, изображенной на графике 7-51. Такой график может быть построен следующим образом.

Намечаем на продольном профиле расчетного участка русла (рис. 7-51) ряд произвольных прямолинейных свободных поверхностей. Каждая из этих свободных поверхностей имеет свою отметку z (z' , z'' и т. д.). Далее для каждой наметченной свободной поверхности вычисляем модуль сопротивления F , как было указано в § 7-20. В результате устанавливаем связь между величинами F и z .

Важно подчеркнуть, что кривая $F = \theta(z)$ может быть построена не только так, как указано в § 7-20, т. е. путем вычисления величин K по формуле $K = \omega\sqrt{R}$, но и на основании непосредственных гидрометрических наблюдений, причем нам вовсе не приходится интересоваться величиной коэффициента шероховатости n , а также формой естественного русла.

Гидрометрический способ построения кривой $F = \theta(z)$, предложенный А. Н. Рахмановым, заключается в следующем.

Упрощенное уравнение неравномерного движения [см. (7-189)] можно переписать в виде

$$\Delta = Q^2 \frac{1}{K^3}, \quad (7-200)$$

где Δ — падение свободной поверхности на рассматриваемом расчетном участке,

$$\Delta = z_m - z_{m+1}. \quad (7-201)$$

Зависимость (7-201) можно представить также в виде

$$\frac{1}{K^2} = \frac{\Delta}{Q^2}. \quad (7-202)$$

Следовательно, модуль сопротивления русла, отвечающий определенной прямолинейной свободной поверхности,

$$F = \frac{\Delta}{Q^2} \quad (7-203)$$

Измеряя в натуре величины Δ и Q для разных наблюдаемых свободных поверхностей и устанавливая для этих поверхностей отметки z , можно, вычислив по формуле (7-203) величину F , построить искомую кривую $F = \theta(z)$. Разумеется, такую кривую мы сможем построить только в пределах наблюдаемых отметок \bar{z} .

Способ построения свободных поверхностей А. Н. Рахманова и заключается в использовании при расчете, поясненном в § 7-21, кривой $F = \theta(z)$, найденной на основании гидрометрических данных. Как видно, в основу этого способа кладется упрощенное уравнение неравномерного движения (7-189).

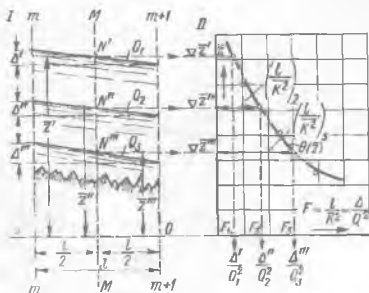


Рис. 7-51. Построение кривой $\theta(z)$

§ 7-23. ПОСТРОЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО СПОСОБУ ПАВЛОВСКОГО

Н. Н. Павловский предложил два способа решения упрощенного уравнения (7-189), графический и графоаналитический.¹ Ниже осветим только графический способ, основанный на использовании уравнения (7-189), при условии, что постулат инвариантности для рассматриваемого русла оказывается приемлемым. Особенностью этого способа является то обстоятельство, что отметку z_m по заданной отметке z_{m+1} и заданному расходу Q можно найти без подбора.

Представим на рис. 7-52,а продольный профиль расчетного участка и на рис. 7-52,б кривую $F = \theta(z)$, построенную или по формуле Шези (см. § 7-20), или при помощи гидрометрического способа (см. кривую АВ). Будем считать, что кривая $F = \theta(z)$ соответствующим образом увязана в высотном отношении с продольным профилем русла (как показано на чертеже).

Рассмотрим два уравнения

Первое уравнение. Упрощенное уравнение неравномерного движения:

$$z_m - z_{m+1} = Q^2 \frac{1}{K^3} \quad (7-204)$$

или

$$\Delta = Q^2 F \quad (7-205)$$

¹ Н. Н. Павловским был разработан также особый способ решения уравнений (А) и (Б) [7-3].

Последнюю зависимость можно переписать в виде

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{Q^2}{2} F \quad (7-206)$$

или окончательно в виде:

$$\Delta' = \frac{Q^2}{2} F \quad (7-207)$$

где

$$\Delta = \frac{\Delta'}{2} \quad (7-208)$$

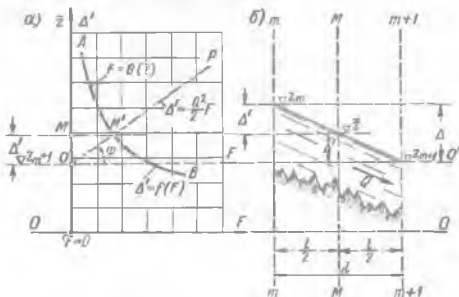


Рис. 7-52. К способу Павловского для построения кривой свободной поверхности

Если примем начало оси \bar{z} (для отсчета отметок свободной поверхности) на уровне отметки z_{m+1} (в точке O'), то получим:

$$z_{m+1} = 0, \quad z_m = \Delta; \quad (7-209)$$

$$\bar{z} = \frac{\Delta}{2} = \Delta, \quad (7-210)$$

причем точку O' можно рассматривать и как начало координат для величин Δ .

Ясно, что на графике рис. 7-52 уравнение (7-207), в котором при принятом начале координат величина $\Delta' = z$, будет выражаться прямой линией $O'P$ с угловым коэффициентом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q^2}{2} \quad (7-211)$$

При $F=0$ уравнение (7-207) дает $\Delta' = \bar{z} = 0$, поэтому прямая $O'P$ должна начинаться в точке O' , расположенной на отметке z_{m+1} .

Второе уравнение. Так как $F = \theta(\bar{z})$, то, следовательно, и \bar{z} будет некоторой функцией F .

$$\bar{z} = f(F), \quad (7-212)$$

причем зависимость (7-212) выражается той же кривой, что и зависимость $F = \theta(\bar{z})$, т. е. кривой AB .

Принимая начало оси \bar{z} , как и выше, на уровне отметки z_{m+1} (в точке O') и учитывая, что при таком положении начала координат $\bar{z} = \Delta'$, уравнение (7-212) можно переписать в виде

$$\Delta' = f(F)$$

(7-213)

Зависимость (7-213) и является вторым необходимым уравнением.

Уравнения (7-207) и (7-213) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными Δ' и F . Решая графически эту систему уравнений, получаем точку M пересечения прямой $O'P$ и кривой AB . Очевидно, точке M' и будет отвечать искомое Δ' (равное отрезку OM').

Зная, таким образом, Δ' , величину z_m находим по формуле

$$z_m = z_{m+1} + 2\Delta' \quad (7-214)$$

Общий ход расчета свободной поверхности, по Н. Н. Павловскому, может быть намечен в следующем виде:

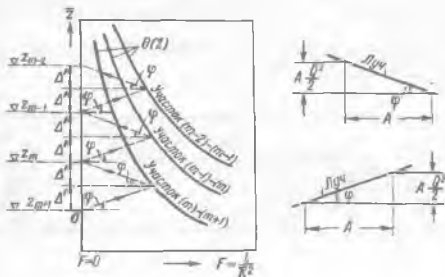


Рис. 7-53. Построение кривой свободной поверхности в естественном водотоке по способу Павловского

1) строим график, на котором совмещаем кривые $F = \theta(z)$ для разных расчетных участков (рис. 7-53);

2) строим у графика направление лучей, идущих под углом φ к горизонту (см. чертеж);

3) параллельно этим лучам, начиная от точки O , определяемой известной отметкой z_{m+1} , проводим прямые линии, как показано на графике. В результате и получаем отметки z_m, z_{m-1}, z_{m-2} и т. д.

Чтобы построить кривую свободной поверхности для другого расхода Q , достаточно изменить только угол φ , т. е. наклон намеченных на чертеже лучей. Эти лучи в соответствии с формулой (7-211) должны строиться по катетам так, чтобы отношение вертикального катета к горизонтальному было равно $\frac{Q^2}{2A}$, где Q — заданный расход (см. чертеж, где через A обозначен отрезок произвольной величины, взятый в масштабе $\frac{1}{K^2}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 7-1 Павловский Н. Н. Собрание сочинений, т. 1, — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1955.
 7-2 Чергоусов М. Д. Гидравлика. Специальный курс. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962.
 7-3 Чуяев Р. Р. Гидравлика — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963.