

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Д.ГИРГИДОВ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по строительным направлениям и специальностям

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1999

Рецензенты:

кафедра гидравлики Московского государственного университета природообустройства (заведующий кафедрой, д-р техн. наук, профессор *Д.В. Штеренлихт*),

д-р техн. наук, профессор *А.А. Шейпак*.

Гиргидов А.Д. *Техническая механика жидкости и газа*: Учеб. для вузов. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 395 с.

ISBN 5-7422-0075-7

Содержание соответствует программе курса для строительных специальностей и направлений. Учебник дополнен факультативными материалами для хорошо успевающих студентов и аспирантов.

Для студентов вузов строительных специальностей.

© Гиргидов А.Д., 1999

© Санкт-Петербургский государственный
технический университет, 1999

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Предисловие	11
	<i>Глава 1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ</i>	13
◆ ▲ ▼ ● ■	1.1. Модель сплошной среды	13
◆ ▲ ▼ ● ■	1.2. Силы, действующие на жидкость	16
◆ ▲ ▼ ● ■	1.3. Напряженное состояние в точке сплошной среды. Тензор напряжений	17
◆ ▲ ▼ ● ■	1.4. Свойство текучести. Твердые и текучие вещества	21
◆ ▲ ▼ ● ■	1.5. Сжимаемость жидкостей и газов	22
◆ ▲ ▼ ● ■	1.6. Фазовые переходы в жидкости. Кипение и кавитация ...	23
◆ ▲ ▼ ● ■	1.7. Отличительные особенности жидкостей и газов	24
◆ ▲ ▼ ● ■	1.8. Вязкость жидкостей и газов. Реологические свойства жидкостей	25
	<i>Глава 2. ГИДРОСТАТИКА</i>	28
◆ ▲ ▼ ● ■	2.1. Гидростатическое давление в точке	28
◆ ▲ ▼ ● ■	2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)	30
◆ ▲ ▼ ● ■	2.3. Интегрирование уравнений Эйлера	32
◆ ▲ ▼ ● ■	2.4. Сила гидростатического давления на произвольную плоскую фигуру	34
◆ ▲ ▼ ● ■	2.5. Сила избыточного гидростатического давления на цилиндрические поверхности	37
◆ ▲ ▼ ● ■	2.6. Способы измерения гидростатического давления	39
◇ ○ □	2.7. Распределение давления в атмосфере Земли	42

◆ ▲ ▼ ● ■	2.8. Нормальные напряжения в стенках круглоцилиндрической трубы (котельная формула)	43
▼ ● ■	2.9. Закон Архимеда. Плавание тел	44
<i>Глава 3. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ</i>		48
◆ ▲ ▼ ● ■	3.1. Методы описания движения сплошной среды	48
◆ ▲ ▼ ● ■	3.2. Линия тока и траектория	50
◆ ▲ ▼ ● ■	3.3. Метод контрольного объема	53
◆ ▲ ▼ ● ■	3.4. Гидромеханическая интерпретация теоремы Остроградского—Гаусса	55
○ □	3.5. Векторная форма теоремы Остроградского—Гаусса ...	58
□	3.6. Разложение движения элементарного объема сплошной среды на поступательное, вращательное и деформационное (теорема Гельмгольца)	60
◆ ▲ ▼ ● ■	3.7. Субстанциальная производная	68
◆ ▼ ● ■	3.8. Потенциал скорости и функция тока при плоском безвихревом движении	73
<i>Глава 4. ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ</i>		76
◆ ▲ ▼ ● ■	4.1. Предварительные сведения	76
◆ ▲ ▼ ● ■	4.2. Закон сохранения массы	77
◆ ▲ ▼ ● ■	4.3. Закон изменения количества движения	78
◇ ▼ ● ■	4.4. Закон изменения момента количества движения	79
◆ ▲ ▼ ● ■	4.5. Закон изменения кинетической энергии	80
△ ○ ■	4.6. Общий закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды	81
<i>Глава 5. ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ (В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ)</i>		82
◆ ▲ ▼ ● ■	5.1. Основные понятия и терминология	82
◆ ▲ ▼ ● ■	5.2. Гидравлические характеристики поперечного сечения потока	84
◆ ▲ ▼ ● ■	5.3. Уравнение неразрывности	86
◆ ▲ ▼ ● ■	5.4. Уравнение Бернулли для установившегося потока вязкой жидкости	89

◇ ○ ■	5.5. Уравнение Бернулли для неустановившегося напорного движения вязкой несжимаемой жидкости	91
◇ ○ □	5.6. Уравнение Бернулли для установившегося безнапорного движения вязкой жидкости	93
◆ ▲ ▼ ● ■	5.7. Геометрическая и энергетическая интерпретации слагаемых, входящих в уравнение Бернулли	94
◆ ▲ ▼ ● ■	5.8. Потенциальный и полный (гидродинамический) напоры. Пьезометрическая и напорная линии	96
◆ ▲ ● ■	5.9. Основное уравнение равномерного движения жидкости в поле силы тяжести	98
◆ ▲ ▼ ● ■	5.10. Два режима движения жидкости	101
◆ ▲ ▼ ● ■	5.11. Потери напора при установившемся равномерном движении жидкости (потери по длине)	106
◆ ● ■	5.12. Формула Шези	112
□	5.13. Потери энергии по длине в потоке сжимаемой жидкости (газа)	114
◆ ▲ ▼ ● ■	5.14. Местные потери напора	116
◆ ▲ ▼ ● ■	5.15. Справочные материалы для расчета местных потерь напора	122

Глава 6. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДАХ 125

◆ ▲ ▼ ● ■	6.1. Классификация трубопроводов. Основные задачи расчета трубопроводов	125
◆ ▲ ▼ ● ■	6.2. Расчет коротких трубопроводов	126
◆ ● ■	6.3. Расчет длинных трубопроводов	130
◆ ▲ ▼ ● ■	6.4. Измерение расхода в трубопроводах	134
◇ △ ▽ □	6.5. Слияние и разделение потоков в трубопроводах	136
◆ ● ■	6.6. Справочные материалы для расчета длинных трубопроводов	142

Глава 7. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ (ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР) 145

◇ △ ▽ ● ■	7.1. Общее описание гидравлического удара	145
◇ ▽ ● ■	7.2. Основные уравнения гидравлического удара	148
○ ■	7.3. Скалярное волновое уравнение	152
○ ■	7.4. Векторные волновые уравнения	154

◇ △ ▽ ○ ■	7.5. Волновая скорость	156
◇ ▽ ○ ■	7.6. Постепенное закрытие задвижки	157
<i>Глава 8. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ</i>		160
◆ ▲ ▼ ● ■	8.1. Основные понятия	160
◆ ▲ ▼ ● ■	8.2. Формулы для скорости и расхода при истечении из отверстий и насадков	161
◆ ▲ ▼ ● ■	8.3. Истечение через нецилиндрические насадки	164
◆ ▲ ▼ ● ■	8.4. Истечение через отверстия и насадки “под уровень”	165
◇ ▲ ▼ ● ■	8.5. Примеры использования нецилиндрических насадков	166
<i>Глава 9. РАВНОМЕРНОЕ И ПЛАВНОИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ</i>		168
◆ ● ■	9.1. Основные понятия и терминология	168
◆ ● ■	9.2. Трапцеидальные каналы	172
◆ ● ■	9.3. Ограничение скорости воды в каналах	175
◆ ● ■	9.4. Предотвращение заиливания каналов	175
◆ ● ■	9.5. Предотвращение размыва грунтовых каналов (метод влекущей силы)	177
◇ ○ ■	9.6. Очертание равномерно устойчивого откоса	180
◆ ● ■	9.7. Неравномерное установившееся движение воды в каналах	183
<i>Глава 10. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ (МОДЕЛЬ МЕЛКОЙ ВОДЫ)</i>		188
◇ ○ ■	10.1. Предварительные замечания	188
◇ ○ ■	10.2. Основные уравнения неустановившегося движения в открытых руслах	188
◇ ○ ■	10.3. Упрощения и анализ уравнений мелкой воды	192
◇ ○ ■	10.4. Классификация длинных волн в каналах	198
<i>Глава 11. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК</i>		200
◆ ● ■	11.1. Общее описание гидравлического прыжка	200
◆ ● ■	11.2. Основное уравнение гидравлического прыжка в цилиндрическом русле	202
◆ ● ■	11.3. Основное уравнение гидравлического прыжка и его длина в прямоугольном русле	204

◆	● ■	11.4. Местоположение гидравлического прыжка в канале ..	205
		<i>Глава 12. ВОДОСЛИВЫ</i>	206
◆	● ■	12.1. Основная терминология и классификации водосливов .	206
◆	● ■	12.2. Формулы для расхода через водосливы	209
◆	● ■	12.3. Водослив Кригера—Офицерова	210
◆	● ■	12.4. Критерии подтопления и расчет подтопленных водо- сливов	212
◆	● ■	12.5. Измерение расхода воды с помощью водосливов	213
◆	● ■	12.6. Справочные материалы для расчета водосливов прак- тического профиля	214
◆	● ■	12.7. Справочные материалы для расчета водосливов с широким порогом	216
		<i>Глава 13. ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД</i>	219
◆	● ■	13.1. Физико-механические предпосылки к описанию грун- товых вод	219
◆	● ■	13.2. Скорость фильтрации. Основной закон ламинарной фильтрации (закон Дарси)	221
◆	● ■	13.3. Способы определения коэффициента фильтрации ..	223
	● ■	13.4. Плавноизменяющееся безнапорное движение грун- товых вод. Дифференциальное уравнение Дюпюи ...	224
◇	○ ■	13.5. Интегрирование дифференциального уравнения без- напорного плавноизменяющегося движения грунто- вых вод	226
◆	● ■	13.6. Фильтрация через прямоугольный однородный грун- товый массив	227
◇	○ ■	13.7. Два виртуальных способа расчета фильтрации через неоднородный (слоистый) грунт	228
◇	○ ■	13.8. Движение грунтовых вод в прямоугольном массиве при инфильтрации с поверхности земли	229
◆	● ■	13.9. Приток воды к водосборной галерее	232
◆	● ■	13.10. Приток воды к круглому колодезю	234
◇	○ ■	13.11. Фильтрация воды из земляных каналов	236
◇	○ ■	13.12. Фильтрация воды через однородную грунтовую пло- тину на водонепроницаемом основании	237
◇	○ ■	13.13. Фильтрация воды через однородную грунтовую пло- тину на водопроницаемом основании	240

◇	○■	13.14. Фильтрация через грунтовые плотины, имеющие устройства, предотвращающие высачивание воды на низовой откос	242
◇	○■	13.15. Фильтрация через неоднородные земляные плотины на водонепроницаемом основании	243
◇	○■	13.16. Дифференциальные уравнения резкоизменяющегося движения грунтовых вод	244
◇	○■	13.17. Плоская задача о фильтрации воды в однородном грунте. Функция тока, гидродинамическая сетка....	246
◇	○■	13.18. Граничные условия для решения уравнения Лапласа и построения гидродинамической сетки	248
◇	○■	13.19. Метод решения фильтрационных задач, основанный на электрогидродинамической аналогии (ЭГДА)....	250
◇	○■	13.20. Задачи расчета подземного контура плотины, решаемые с помощью гидродинамической сетки.....	251
◇	○■	13.21. Метод расчета подземного контура, основанный на использовании коэффициентов потерь напора (метод коэффициентов сопротивления)	253

Глава 14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

◇△▼○■	14.1. Предварительные замечания	256
◇△▼○■	14.2. Дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы.....	256
◇△▼○■	14.3. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения количества движения (уравнения движения в напряжениях)	258
□	14.4. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения момента количества движения	259
◇△▼○■	14.5. Обобщенный закон Ньютона для вязких напряжений .	260
◇△▼○■	14.6. Уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости (уравнения Навье—Стокса).....	263
■	14.7. Модель невязкой несжимаемой жидкости (гидродинамические уравнения Эйлера).....	265
	14.8. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения кинетической энергии	267

Глава 15. ОДНОМЕРНЫЕ ПОТОКИ ГАЗА

◇△	○■	15.1. Скорость распространения возмущений в сжимаемой среде	271
----	----	---	-----

◇ △ ○ ■	15.2. Уравнение Бернулли для установившегося потока газа	273
◇ △ □	15.3. Краткие сведения из термодинамики	275
◇ △ □	15.4. Зависимость скорости звука от термодинамических условий. Термодинамические формы уравнения Бернулли	276
◇ △ □	15.5. Параметры торможения. Критическая скорость. Число Маха	278
◇ △ □	15.6. Течение газа в конфузорах и диффузорах (в одномерном приближении)	280
◇ △ □	15.7. Истечение газа из резервуара через насадок (сопло Лаваля)	282

Глава 16. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ... 285

◇ △ ▽ ○ ■	16.1. Общие положения	285
◇ △ ▽ ○ ■	16.2. Силы, действующие на обтекаемое жидкостью тело	285
◇ △ ▽ ○ ■	16.3. Обтекание плоской пластины	287
◇ △ ○ □	16.4. Безотрывное обтекание цилиндра однородным потоком невязкой жидкости	290
○ □	16.5. Присоединенный вихрь и подъемная сила	293
◇ △ ○ ■	16.6. Пограничный слой	296
◇ △ ○ ■	16.7. Отрыв пограничного слоя. Кризис обтекания	298
◇ △ ▽ ○ □	16.8. Способы улучшения гидроаэродинамических характеристик движущихся объектов	303
□	16.9. Обтекание крыловых профилей	306
◇ ○ □	16.10. Обтекание шара	308
◇ ○ ■	16.11. Ветряной двигатель	311
▲ ○ ■	16.12. Основы расчета ветровой нагрузки на конструкции и сооружения	317

Глава 17. ОСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ... 320

■	17.1. Простейшее решение уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнений Навье—Стокса)	320
◇ ○ □	17.2. Уравнения Рейнольдса	323
□	17.3. Проблема замыкания уравнений Рейнольдса. Цепочка уравнений Келлера—Фридмана. Уравнение баланса энергии	326

◇	○ □	17.4. Турбулентные касательные напряжения в пристеночном плоском продольно-однородном потоке	329
		Глава 18. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	332
◇	○ □	18.1. Пристеночный турбулентный поток	332
◇	○ ■	18.2. Структура турбулентного потока в гладкой трубе	336
	□	18.3. Потери напора по длине в круглой трубе	341
◇	□	18.4. Полуэмпирические методы решения задач о свободной турбулентности	345
		Глава 19. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ	352
	□	19.1. Основные понятия статистической гидромеханики	352
	□	19.2. Частотные характеристики турбулентности	358
		Глава 20. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ	363
◆ △	● ■	20.1. Задачи экспериментального изучения движения жидкостей	363
◇	○ ■	20.2. Предпосылки использования анализа размерностей ...	365
◇ △	○ ■	20.3. Основные положения анализа размерности. П-теорема	367
◆ △	● ■	20.4. Подобие гидромеханических явлений	373
◆ △	● ■	20.5. Особенности и основные приемы моделирования гидромеханических явлений	381
		Список литературы	388
		Предметный указатель	389

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник основан на опыте многолетнего преподавания дисциплин гидравлического профиля в Санкт-Петербургском государственном техническом университете (СПбГТУ). К таким дисциплинам относятся трехсеместровые курсы «Гидравлика» и «Техническая механика жидкости» на гидротехническом факультете, одно- и двухсеместровые курсы с такими же названиями на гидротехническом и механико-машиностроительном факультетах. Большую роль в формировании принципов, положенных в основу учебника, сыграло преподавание таких дисциплин, как «Методика преподавания гидравлики», «Анализ размерностей», «Турбулентное течение жидкостей» на факультете повышения квалификации преподавателей (ФПКП), действующем при кафедре гидравлики СПбГТУ с 1973 года.

Учебник предназначен для подготовки в области технической механики жидкости и газа инженеров и магистров с учетом двухуровневой системы обучения, реализуемой в настоящее время в технических университетах (на первом уровне подготавливается бакалавр по направлению, на втором уровне — инженер по специальности или магистр).

Принципы, положенные в основу учебника.

1. *Фундаментальность изложения.* Все основные уравнения и зависимости, составляющие аппарат технической механики жидкости и газа, представлены как частные формы фундаментальных законов физики и механики. Единообразная методика вывода этих уравнений позволяет в каждом конкретном случае установить их связь с исходными фундаментальными законами.

2. *Соответствие используемого аппарата решаемым задачам.* Для решения профессиональных задач, возникающих в процессе производственной деятельности, инженерам (строителям, машиностроителям, металлургам и др.), как правило, вполне достаточны интегральные оценки тех или иных гидравлических явлений, основанные на одномерных моделях потоков жидкостей и газов. Поэтому основным методом, с помощью которого в учебнике решаются прикладные задачи, является метод контрольного объема.

3. *Рациональное сочетание профессионального и образовательного компонентов подготовки специалистов.* Наряду с разделами, предназначенными непосредственно для привития студентам умений и навыков, необходимых для профессиональной деятельности, в учебник включены материалы, способствующие:

развитию у студентов представлений о механике жидкости и газа в окружающей их повседневной жизни (на транспорте, в спорте, в быту и т.п.);

расширению их мировоззрения, ознакомлению их с научными проблемами механики жидкости и газа.

Эти разделы могут рассматриваться как факультативные или рекомендуемые для самостоятельного изучения при подготовке бакалавров. Вместе с тем на втором образовательном уровне, а также при обучении в аспирантуре эти разделы можно рассматривать как обязательные.

4. *Использование математического аппарата.* Предполагается знание студентами высшей математики в объеме программы для инженерных специальностей технических университетов (математический анализ, векторное исчисление, элементы матричного исчисления).

5. *Возможно большая независимость изложения разделов учебника.* Разделы учебника, посвященные прикладным и факультативным вопросам, изложены с таким расчетом, чтобы они могли по мере необходимости включаться в программу курса или исключаться из нее. Это позволяет преподавателю формировать «маршрут» изучения курса для потока студентов или составлять индивидуальный план для учащегося, рационально сочетая (в рамках лимита времени, предусмотренного учебным планом) профессиональный и образовательный компоненты.

6. *Учебная направленность.* Справочные материалы и примеры расчета, приведенные в учебнике, ориентированы главным образом на помощь студентам при выполнении ими учебных заданий. Учебник не может заменить руководство по проектированию.

Автор рассматривает свой учебник по стилю изложения и отбору материала, а также его практической направленности как продолжающий традиции научных и учебных изданий создателей гидравлической школы СПбГТУ — проф. Б.А. Бахметева, акад. Н.Н. Павловского, проф. М.Д. Чертоусова и проф. Р.Р. Чугаева. Основное место в формировании научного и педагогического мировоззрения автора, которое позволило составить настоящий учебник, занимает многолетняя работа на кафедре гидравлики СПбГТУ под руководством проф. Р.Р. Чугаева, чьим учеником автор себя считает. Особую роль в осмыслении места и методологии гидравлики как технической механики жидкости сыграла совместная работа на ФПКП с проф. Л.Г. Лойцянским, предоставившая возможность регулярного обсуждения научных и методических вопросов.

Опыт преподавания технической механики жидкости и газа (ТМЖГ) на различных факультетах СПбГТУ показал, что учебник может быть использован при подготовке бакалавров не только по направлению 550100 «Строительство», но и в качестве учебного пособия по ряду других направлений. В оглавлении учебника указаны разделы, предназначенные как для различных строительных специальностей, так и для некоторых направлений:

■ — строительные специальности с объемом ТМЖГ от 150 до 200 часов;

● — то же с объемом от 90 до 150 часов;

▼ — 551800 «Технологические машины и оборудование»,

552900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных процессов»;

▲ — 550500 «Металлургия»,

551600 «Материаловедение и технология новых материалов»;

◆ — 553500 «Защита окружающей среды».

Знаки □ ○ ▼ △ ◇ означают, что соответствующий раздел рекомендуется для самостоятельного (факультативного) изучения.

Автор выражает глубокую благодарность сотрудникам кафедры гидравлики: М.Р. Петриченко, Б.А. Дергачеву, О.И. Зайцеву, Е.Н. Кожевниковой, Ю.В. Кокорину, А.И. Лаксбергу, Е.А. Локтионовой, В.П. Троицкому и А.С. Чернышеву; многолетнее сотрудничество и общение с ними оказало неоценимую помощь при формировании стиля и структуры учебника.

Особую благодарность автор приписывает проф. В.Т. Орлову за неоднократное критическое прочтение рукописи, позволившее внести в нее серьезные улучшения, И.В. Сорокиной, вложившей много высококвалифицированного труда в подготовку рукописи, и М.Л. Миндлину, благодаря высоким профессиональным и человеческим качествам которого рукопись приобрела вид представляемой книги.

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1.1. Модель сплошной среды

Известно, что все физические тела состоят из молекул и атомов, которые, в свою очередь, имеют сложную структуру. В механике жидкости используют модель *сплошной среды*, т.е. считают, что материал, масса не сосредоточены в молекулах и атомах, а распределены («размазаны»), непрерывно рассредоточены в пространстве, занятом физическим телом. Это позволяет, с одной стороны, не принимать во внимание особенности молекулярного строения тех или иных жидкостей, а считать их одинаковыми или различными в зависимости от таких интегральных (не учитывающих непосредственно детали молекулярной структуры тела) характеристик, как плотность, вязкость, теплопроводность, скорость среды и т.п. С другой стороны, исключив дискретность строения вещества, можно использовать предельные переходы для определения указанных интегральных характеристик. Например, *плотность вещества* (субстанции) в точке пространства с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ определяется зависимостью

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_0} \frac{M}{\mathcal{V}}, \quad (1.1)$$

где \mathcal{V} — объем, занятый веществом; M — масса этого объема; \mathcal{V}_0 — наименьший объем, окружающий точку с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$, содержащий достаточно большое (представительное) количество молекул. Чтобы объяснить физический смысл \mathcal{V}_0 , представим на рис. 1.1 изменение средней плотности твердого или жидкого вещества в объеме \mathcal{V} , т.е. величины $\rho_{\text{ср}} = M / \mathcal{V}$ в зависимости от размеров объема \mathcal{V} . Для простоты полагаем, что объем \mathcal{V} в процессе изменения имеет форму куба, и его линейный размер равен $\sqrt[3]{\mathcal{V}}$. При $\sqrt[3]{\mathcal{V}} > \sqrt[3]{\mathcal{V}_0}$ плотность вещества мало изменяется в зависимости от $\sqrt[3]{\mathcal{V}}$, и это изменение связано с неоднородностью вещества (если вещество однородно, то $\rho_{\text{ср}}$ от размеров \mathcal{V} не зависит). При $\sqrt[3]{\mathcal{V}} < \sqrt[3]{\mathcal{V}_0}$ изменение массы молекул, содержащихся

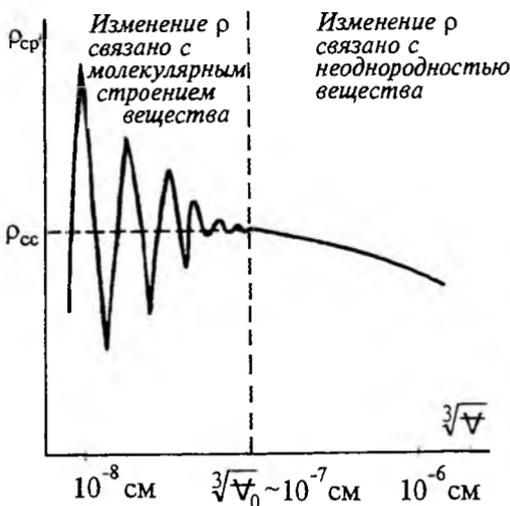


Рис. 1.1. Характер зависимости плотности материи от линейных размеров объема, когда они соизмеримы с межмолекулярным расстоянием

среды. Рассмотрим этот вопрос на примере движения воздуха в атмосфере. При обычных условиях скорость хаотического теплового движения молекул газа измеряется сотнями метров в секунду,

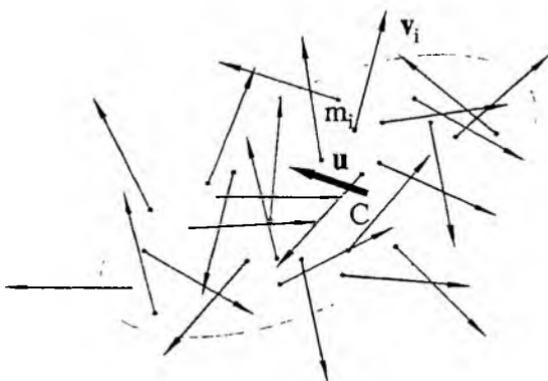


Рис. 1.2. Пояснение понятия скорости сплошной среды

молекулы, мало изменилось, если при его стягивании в точку несколько молекул останутся вне объема. Скорость сплошной среды u в точке C определим в виде

$$u = \frac{\sum m_i \cdot v_i}{\sum m_i} \quad (1.3)$$

(в числителе (1.3) сумма векторная).

Допустимость предельных переходов, хотя и с указанными выше ограничениями, позволяет при использовании модели сплошной среды

в V , оказывается чувствительным к исключению из объема отдельных молекул, и при этом модель сплошной среды становится неэффективной. Вместе с тем малые размеры объема V_0 ($\sqrt[3]{V_0} \sim 10^{-7}$ см) позволяют практически не учитывать указанное выше ограничение, считать $\sqrt[3]{V_0} \approx 0$, записать

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M}{V} \quad (1.2)$$

и рассматривать V как бесконечно малую величину, полагая вместе с тем, что $\rho = \rho_{сс}$ (см. рис. 1.1), где $\rho_{сс}$ — плотность, определяемая в рамках модели сплошной среды.

Сходные ограничения следует ввести при определении скорости движения вещества с использованием модели сплошной

что намного превосходит скорость ветра. Поэтому когда говорят о скорости воздуха u в данной точке C пространства, то имеют в виду движение достаточно большого объема V (рис.1.2), выделенного вокруг точки C . Внутри этого объема должно содержаться столько молекул, чтобы его количество движения $u \sum m_i$, где m_i — масса i -й молекулы, равно сумме количеств движения молекул $\sum m_i v_i$; v_i — скорость i -й молекулы,

эффективно применять аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

В дальнейшем изложении части объемов и поверхностей, выделенных в сплошной среде, в пределах которых можно пренебречь изменением какой-либо физической величины (плотности, скорости, температуры и т.п.), называются *элементарными* объемами и площадками (по отношению к той или иной физической величине).

Для оценки каких-либо количественных (скалярных, векторных) характеристик движущейся сплошной среды (например, массы, количества движения, энергии, распределенных сил и т.п.) будем использовать понятие *плотности распределения* той или иной гидродинамической характеристики (в пространстве или на поверхности) или количество этой характеристики, приходящееся на единицу объема или площади поверхности. Другими словами, плотность распределения какой-либо гидродинамической характеристики в пространстве (или на поверхности) — это такая функция координат и времени $\beta(\mathbf{r}, t)$, которая, будучи умножена на элементарный объем ΔV (или элементарную площадку ΔA), выразит количество рассматриваемой гидродинамической характеристики для этого объема ΔV (или площадки ΔA). Например, кинетическая энергия элементарного объема ΔV , имеющего массу $\Delta m = \rho \Delta V$ и скорость \mathbf{u} , равна

$$\Delta KЭ = \frac{\Delta m \cdot u^2}{2} = \frac{\rho \Delta V \cdot u^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2} \Delta V. \quad (1.4)$$

Сомножитель $\frac{\rho u^2}{2}$, стоящий перед ΔV в последнем выражении, и есть *плотность распределения кинетической энергии*.

Эта функция может быть и векторной. Например, количество движения этого же элементарного объема ΔV равно

$$\Delta KД = \Delta m \cdot \mathbf{u} = \rho \Delta V \cdot \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} \cdot \Delta V; \quad (1.5)$$

здесь $\rho \mathbf{u}$ — *плотность распределения количества движения*.

Пусть B — общее количество какой-либо гидродинамической характеристики (например, кинетической энергии) объема V (рис. 1.2), а $\beta(\mathbf{r}, t)$ — плотность распределения этой характеристики, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — пространственные координаты, t — время. Разделим объем V на элементарные части (объемы) ΔV_i , где i — номер элементарного объема. Количество рассматриваемой гидродинамической характеристики в пределах i -го элементарного объема равно $\beta(\mathbf{r}_i, t) \Delta V_i$, где $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — координаты любой внутренней точки объема ΔV_i . Очевидно, общее количество характеристики, относящееся к объему V , равно

$$B(t) = \sum_i \beta(\mathbf{r}_i, t) \Delta V_i. \quad (1.6)$$

Рассматривая элементарный объем как бесконечно малую величину, можно записать

$$B(t) = \int_V \beta(\mathbf{r}, t) dV. \quad (1.7)$$

Например, в соответствии с вышеизложенным плотность жидкости $\rho(\mathbf{r}, t)$ можно назвать *плотностью распределения массы* (в пространстве), при этом массу M объема \mathcal{V} можно представить в виде

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}. \quad (1.8)$$

Подобный подход будем использовать и для характеристик сплошной среды, связанных с поверхностями (граничными или построенными внутри потока).

Функция плотности распределения $\beta(\mathbf{r}, t)$ может быть скалярной или векторной в зависимости от того, к какой (скалярной или векторной) гидродинамической характеристике она относится.

1.2. Силы, действующие на жидкость

Как и в теоретической механике, для данного объема жидкости (как механической системы) будем различать:

внешние силы, т.е. силы, действующие между элементами этой системы (частями данного объема жидкости) и элементами, не относящимися к этой системе (объему жидкости). Такие силы вызывают или могут вызвать изменение количества движения объема; типичным примером внешней силы для объектов, находящихся вблизи поверхности Земли, является сила тяжести;

внутренние силы, действующие между элементами рассматриваемой механической системы (частями данного объема жидкости). Они не могут изменить количество движения этого объема, так как внутри него каждая внутренняя сила уравнивается равной ей по модулю внутренней силой, имеющей противоположное направление. Вместе с тем работа внутренних сил может изменить кинетическую и (или) потенциальную энергию рассматриваемого объема жидкости. Примерами внутренних сил являются сила давления, действующая на поверхность, выделенную внутри объема жидкости; сила трения между слоями движущейся жидкости и т.п.

Применяя при изучении механики жидкости модель сплошной среды, различают объемные и поверхностные силы.

Объемные (массовые) силы: величина этих сил пропорциональна объему (массе) жидкости, на который они действуют. Характеристикой объемной (массовой) силы является *плотность распределения этой силы* в пространстве, это векторная величина $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$, которая равна силе, действующей на единицу объема (массы). Примером объемной силы является сила тяжести; в этом случае плотность распределения представляет собой силу, приходящуюся на единицу *массы* сплошной среды. Если принять оси x и y горизонтальными, а z направить вертикально вверх, то плотность распределения силы тяжести $\mathbf{f}_g = (0, 0, -g)$, где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. При этом вес \mathbf{F}_g объема \mathcal{V} равен

$$\mathbf{F}_g = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_g \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} (0, 0, -g) \rho d\mathcal{V} = (0, 0, -\int_{\mathcal{V}} \rho g d\mathcal{V}) = (0, 0, -\rho g \mathcal{V}). \quad (1.9)$$

Поверхностные силы: величина этих сил пропорциональна площади поверхности, на которую они действуют. Примером такой силы является сила взаимодействия между двумя соприкасающимися слоями жидкости, которые движутся друг относительно друга. Характеристикой поверхностной силы на заданной поверхности является плотность ее распределения, которую при использовании модели сплошной среды называют *напряжением*; это векторная величина. Напряжение в данной точке фиксированной поверхности обычно проектируют на нормаль к ней и на касательную плоскость, при этом различают нормальные и касательные напряжения.

Физически поверхностные силы обусловлены силами ближнего взаимодействия молекул, расположенных по разные стороны от рассматриваемой поверхности, и переносом молекул сквозь эту поверхность в процессе их теплового движения.

1.3. Напряженное состояние в точке сплошной среды. Тензор напряжений

Разделим произвольную часть сплошной среды поверхностью АВ на две части (рис. 1.3), при этом часть 1 будет действовать на часть 2 с силой F_{AB} . Обозначив площадь поверхности АВ через A_{AB} , среднее на-

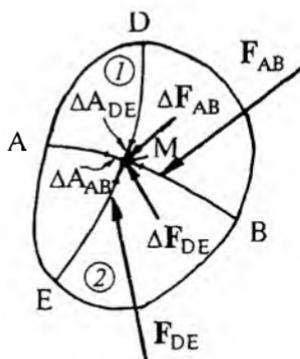


Рис. 1.3. Напряжение в точке сплошной среды

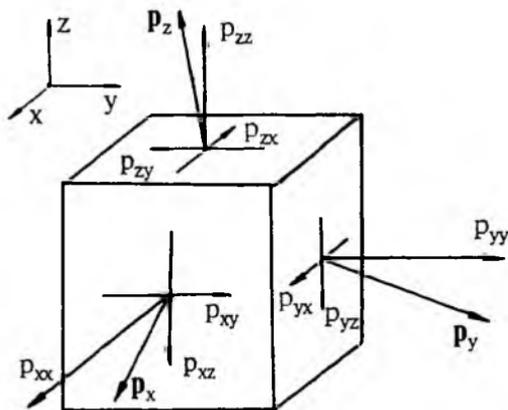


Рис. 1.4. Обозначения напряжений в сплошной среде и их проекций на оси координат

пряжение по АВ выразим вектором, имеющим то же направление, что и F_{AB} :

$$p_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}}. \quad (1.10)$$

Обозначим произвольную малую часть поверхности АВ, содержащую точку М, через ΔA_{AB} ; на нее будет действовать сила ΔF_{AB} . Стягивая ΔA_{AB} в точку М, получаем вектор напряжения в этой точке

$$p_{AB}(M) = \lim_{\Delta A_{AB} \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{AB}}{\Delta A_{AB}}. \quad (1.11)$$

Очевидно, что, проведя через точку М другую поверхность, например DE, можно с помощью таких же рассуждений получить другой вектор напряжения $\mathbf{p}_{DE}(M)$. Таким образом, вектор напряжения (плотности распределения поверхностной силы) на поверхности, проходящей через данную точку, зависит от ориентации этой поверхности.

Выделим в пространстве элементарный куб, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 1.4), и обозначим векторы напряжений на этих гранях $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$, где индекс соответствует координатной оси, к которой грань куба перпендикулярна.

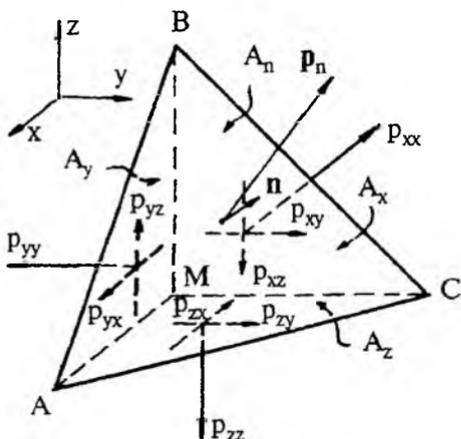


Рис. 1.5. Определение напряжения на произвольно-ориентированной площадке

Для обозначения проекций векторов напряжений на координатные оси введем соответствующий индекс второй подстрочный индекс. Например, p_{yx} — это проекция вектора напряжения \mathbf{p}_y на ось x , p_{zz} — проекция \mathbf{p}_z на ось z . Легко видеть, что p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — *нормальные* напряжения; $p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}$ — *касательные* напряжения.

Выделим в сплошной среде элементарную (в отношении напряжений) пирамиду с вершиной в точке М (рис. 1.5), три грани которой перпендикулярны осям координат x, y, z , а ориентация четвертой грани ABC определяется единичным вектором нормали \mathbf{n} , имеющим следующие проекции на координатные оси:

$$n_x = \cos(\mathbf{n}, x), \quad n_y = \cos(\mathbf{n}, y), \quad n_z = \cos(\mathbf{n}, z). \quad (1.12)$$

Обозначим площади граней пирамиды, ортогональных осям x, y, z , соответственно A_x, A_y, A_z , площадь грани ABC обозначим A_n , а напряжение на ней \mathbf{p}_n . Отметим, что p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} не являются ни нормальными, ни касательными напряжениями. Из геометрических соображений легко получить

$$A_x = A_n n_x, \quad A_y = A_n n_y, \quad A_z = A_n n_z. \quad (1.13)$$

Считаем линейные размеры пирамиды бесконечно малыми; при этом объемные силы, действующие на пирамиду, бесконечно малые величины третьего порядка, и ими можно пренебречь по сравнению с поверхностными силами, которые являются бесконечно малыми второго порядка. Имея это в виду, приравняем нулю сумму проекций на ось x всех поверхностных сил, действующих на пирамиду ABCM

$$A_x p_{xx} + A_y p_{yx} + A_z p_{zx} - A_n p_{nx} = 0. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.13) в (1.14) и сокращая на A_n , получаем проекцию вектора \mathbf{p}_n на ось x

$$p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}. \quad (1.15)$$

Исходя из равенства нулю сумм проекций сил на координатные оси y и z , найдем две другие проекции \mathbf{p}_n :

$$P_{ny} = p_x P_{xy} + p_y P_{yy} + p_z P_{zy}; \quad (1.16)$$

$$P_{nz} = p_x P_{xz} + p_y P_{yz} + p_z P_{zz}. \quad (1.17)$$

Тем самым определим вектор напряжений на грани ABC:

$$\mathbf{p}_n = (P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}).$$

Таким образом, зная три вектора напряжений на взаимно ортогональных площадках и используя уравнения статики, можно найти напряжение на произвольно ориентированной площадке.

Следовательно, три вектора напряжений \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y , \mathbf{p}_z полностью характеризуют напряженное состояние в данной точке пространства.

Совокупность девяти проекций на координатные оси трех векторов, определяющих напряжения в точке сплошной среды, представленную в виде квадратной матрицы, обозначим буквой Π :

$$\Pi = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Используя матричную форму записи, представим равенства (1.15), (1.16) и (1.17) в виде

$$\mathbf{n}\Pi = (n_x, n_y, n_z) \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$= (n_x P_{xx} + n_y P_{yx} + n_z P_{zx}, n_x P_{xy} + n_y P_{yy} + n_z P_{zy}, n_x P_{xz} + n_y P_{yz} + n_z P_{zz}) = (P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}) = \mathbf{p}_n. \quad (1.19)$$

Если задать другую систему координатных осей (x', y', z') , то соответствующие этим осям три вектора напряжений $\mathbf{p}_{x'}$, $\mathbf{p}_{y'}$, $\mathbf{p}_{z'}$ также характеризовали бы напряженное состояние в этой же точке M . Очевидно, что каждый из векторов $\mathbf{p}_{x'}$, $\mathbf{p}_{y'}$ или $\mathbf{p}_{z'}$ можно найти, если известны \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y , \mathbf{p}_z , с помощью зависимости, аналогичной (1.19), если вместо \mathbf{n} подставить единичный вектор, определяющий в системе координат x, y, z направление координатной оси x', y' или z' . Совокупность девяти составляющих векторов $\mathbf{p}_{x'}$, $\mathbf{p}_{y'}$, $\mathbf{p}_{z'}$ также можно представить в виде матрицы, которая, как и матрица (1.18), определяет напряженное состояние в точке M . Матрицы, которые определяют какую-либо физическую величину, т.е. величину, не зависящую от выбора системы координат (в данном случае напряжение в точке сплошной среды, а в общем это могут быть и другие величины), называют *тензорами*. Эти матрицы характеризуются тем, что при введении новой системы координат они преобразуются следующим образом.

1. Составляющие матрицы, образующие строки, считаются компонентами векторов, относящихся к площадкам, перпендикулярным соответствующим координатным осям (например, в нашем случае составляющие строки P_{yx} , P_{yy} , P_{yz} являются компонентами вектора напряжения \mathbf{p}_y , действующего на площадке, перпендикулярной оси y).

2. Проекции на координатные оси x, y, z векторов, действующих на площадки, перпендикулярные новым координатным осям x', y', z' , находим, считая, что векторы представляют собой плотности распределения поверхностных сил (напряжений) и что выполняются уравнения статики, т.е. по уравнениям (1.15)—(1.17). Как уже отмечалось, в общем случае матрица не обязательно характеризует напряженное состояние, она может определять и другие физические величины, например, изменчивость в пространстве поля скорости, а поэтому векторы, компоненты которых являются составляющими строки матрицы, могут и не являться силовыми характеристиками.

3. Определив проекции векторов $\mathbf{p}_{x'}, \mathbf{p}_{y'}, \mathbf{p}_{z'}$ на старые координатные оси x, y, z , из геометрических соображений находим их проекции на новые координатные оси и из этих проекций образуем матрицу тензора в новой системе координат.

В тензорных обозначениях равенство (1.18) можно представить в виде

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\Pi. \quad (1.20)$$

Как доказывается в тензорном исчислении, сумма диагональных элементов матрицы не зависит от системы координат, в которой она записана. Эта величина называется линейным инвариантом тензора. В случае тензора напряжений Π имеем

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_{x'x'} + p_{y'y'} + p_{z'z'}.$$

Другими словами, сумма нормальных напряжений по трем взаимно ортогональным площадкам не зависит от их ориентации в пространстве. Благодаря этому обстоятельству важную роль в механике вязкой жидкости играет гидродинамическое давление p , которое определяется равенством

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \quad (1.21)$$

Рассматривая равновесие элементарного (в отношении напряжений) кубика, представленного на рис. 1.4, из равенства нулю суммы моментов поверхностных сил относительно трех его взаимно ортогональных ребер (пренебрегая моментом от массовых сил как величиной более высокого порядка малости) получим

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}. \quad (1.22)$$

Это известное свойство равенства касательных напряжений свидетельствует о симметричности матрицы тензора напряжений. Строгое доказательство равенств (1.22) приведено в п. 14.4.

В соответствии с определением (1.11) единицей напряжений является

$$[p_{ik}] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{H}{M^2} = \frac{кг}{M \cdot c^2}.$$

Размерность напряжения ньютон на метр квадратный называется паскаль и обозначается Па,

$$Па \equiv \frac{H}{M^2} = \frac{кг}{M \cdot c^2}.$$

На практике часто пользуются гектопаскалями ($гПа = 100 Па$) и килопаскалями ($кПа = 1000 Па$). В этих же единицах измеряется и гидродинамическое давление p .

1.4. Свойство текучести. Твердые и текучие вещества

Жидкие и газообразные тела отличаются от твердых свойством текучести. Твердое тело обычно определяют так: если на него действуют малые (неразрушающие) силы, то они незначительно изменяют его форму, т.е. относительное положение частей. *Текучесть* — свойство, благодаря которому тело под действием сколь угодно малых внешних сил деформируется (неограниченно), пока внутренние касательные напряжения в нем не станут равными нулю.

Многие тела обладают двойственными свойствами. Например, стекло, которое обычно рассматривается как хрупкое твердое тело, при длительном действии нагрузки может вести себя как жидкость. Известно, что оконные стекла, простоявшие 100—150 лет, в нижней части толще, чем в верхней, так как под действием силы тяжести этот материал стекает вниз. А такая типичная жидкость, как вода, при быстром нагружении (ударе) ведет себя как твердое тело.

Чтобы эта двойственность стала понятной, обратимся к молекулярному строению вещества. Как известно, благодаря действию межмолекулярных сил притяжения и отталкивания расположение молекул в пространстве более или менее упорядочено друг относительно друга; среднее (характерное) расстояние между молекулами и в жидкости и в твердом теле примерно одинаково и имеет порядок $d = (3-4)10^{-8}$ см. Тепловое движение молекул имеет вид хаотических случайных колебаний вокруг положения равновесия, средняя амплитуда которых a увеличивается с температурой. В твердых телах $a \ll d$, в жидкостях a и d — величины одного порядка. Совершая колебания со сравнительно небольшой амплитудой, соизмеримой с расстоянием, на котором расположены места (ячейки) их устойчивого положения, молекулы могут перескакивать из одного такого места (ячейки) в другое. В одних жидкостях это может случаться часто, в других редко. Характерное время t_r нахождения молекулы в каждой ячейке между моментом, когда она туда попала, и моментом, когда она из этой ячейки перескочила в другую, определяет текучесть тела. Если $t_r \ll t_c$ — времени действия силы, то при этом за время t_c много молекул успеют многократно изменить свое положение в пространстве, обеспечивая возможность силе необратимо деформировать тело, и, следовательно, тело ведет себя как текучая среда, и его считают жидкостью. Если же $t_r \gg t_c$, то тело ведет себя как твердое. Естественно, что с увеличением температуры амплитуда теплового колебательного движения растет, t_r уменьшается, и тело становится более текучим.

В случае газообразного состояния вещества молекулы хаотически движутся в пространстве и взаимодействуют только посредством взаимных столкновений. Отсутствие сколько-нибудь длительных межмолекулярных связей обуславливает не только текучесть газа, но и его сжимаемость (отметим, что постоянно действующие межмолекулярные силы обеспечивают не только упорядоченность расположения молекул в пространстве (в виде кристаллических или квазикристаллических структур), но и малую (сравнительно с газами) сжимаемость твердых и жидких тел, так как, например, при сжатии тела должно уменьшаться межмолеку-

лярное расстояние, чему сопротивляются силы отталкивания между молекулами). Модель хаотического беспорядочного теплового движения молекул газа достаточно полно отражает основные особенности таких свойств реальных газов, как текучесть, сжимаемость, вязкость, теплопроводность и т.п. Столь эффективной молекулярно-кинетической теории жидкости пока не разработано.

1.5. Сжимаемость жидкостей и газов

Приложив силу ΔF , увеличим давление в объеме V на величину Δp (рис. 1.6), при этом сплошная среда сожмется, ее объем уменьшится на ΔV . Как показывает опыт, зависимость между Δp и ΔV линейная и для газов и для жидкостей при условиях, далеких от возможных фазовых переходов (кипения), т.е. для каждого газа и каждой жидкости можно ввести постоянную — коэффициент объемного сжатия (при постоянной температуре T):

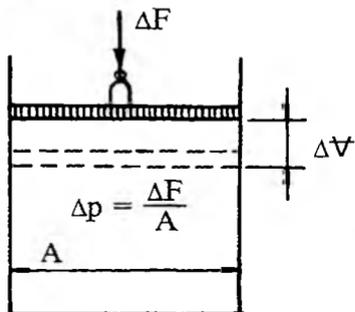


Рис. 1.6. К определению коэффициента объемного сжатия

$$\beta_V = - \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}{\Delta p} = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}. \quad (1.23)$$

β_V имеет размерность $(\text{Па})^{-1}$. Знак минус вводится, так как при сжатии ($\Delta p > 0$) объем уменьшается ($\Delta V < 0$), а удобно, чтобы коэффициент β_V был положительным.

Модулем объемной упругости E_V называется величина, обратная β_V :

$$E_V = \frac{1}{\beta_V}. \quad (1.24)$$

Величины β_V и E_V зависят от рода жидкости и от температуры. Например, для воды при $T = 293 \text{ K}$

$$E_V = 2 \cdot 10^9 \text{ Па} \cong 20\,000 \text{ кгс/см}^2$$

Если на воду, находящуюся при атмосферном давлении ($101\,325 \text{ Па}$ или $1,033 \text{ кгс/см}^2$), приложить дополнительно (сверх атмосферного) такое же давление p_a , то объем воды уменьшится приблизительно на $1/20\,000$, т.е. практически незаметно. Следовательно, воду и другие жидкости можно считать несжимаемыми и принимать их плотность ρ постоянной ($\rho = \text{const}$), не зависящей от давления.

В случае газов обычно достаточно эффективно можно использовать модель идеального газа, для которой справедливо уравнение Клапейрона — Менделеева

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\rho T} = R, \quad (1.25)$$

где R — удельная газовая постоянная, не зависящая от ρ и T , но различная для различных газов (для воздуха $R = 287 \text{ Дж/кг K}$). С помощью этого уравнения легко найти плотность воздуха при атмосферном давлении и температуре, равной 20°C :

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{101325}{287 \cdot 293} = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Из этого уравнения следует закон Бойля—Мариотта (*изотермическая* связь давления и плотности)

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (1.26)$$

для заданного объема газа при постоянной температуре.

Для *адиабатического* процесса (когда отсутствует теплообмен между выделенным объемом газа и окружающей средой) известна из курса общей физики другая зависимость:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}, \quad (1.27)$$

где $\kappa = c_p/c_v$ — адиабатическая постоянная газа; c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме; c_p — то же при постоянном давлении (см. гл. 15).

1.6. Фазовые переходы в жидкости.

Кипение и кавитация

Одна из особенностей, отличающая жидкость и газ, — это возможность *фазовых переходов*. Например, при повышении температуры T (при постоянном давлении на свободной поверхности покоящейся жидкости) жидкость при $T = T_{\text{кип}}$ начинает кипеть, т.е. во всем объеме жидкости и в особенности на стенках сосуда образуются пузырьки пара, которые всплывают на свободную поверхность жидкости и соединяются с газом, находящимся над этой поверхностью. В частности, при нормальном атмосферном давлении p_a вода начинает кипеть при $T_{\text{кип}} = 373$ К. При такой температуре, как известно из курса физики, давление насыщающих паров воды $p_{\text{нп}} = p_{\text{нп}}(T)$, которое зависит от T , становится равным атмосферному давлению

$$p_{\text{нп}}(T_{\text{кип}}) = p_a. \quad (1.28)$$

Такой же *процесс кипения* может происходить и при более низкой температуре $T < T_{\text{кип}}$, но при понижении давления на свободной поверхности p_0 , когда это давление становится равным

$$p_0 = p_{\text{нп}}(T). \quad (1.29)$$

Фазовые переходы при понижении давления в движущейся жидкости иногда порождают процесс, не похожий на кипение. Рассмотрим (изотермическое с температурой T) течение в трубе, имеющей конфузорно-диффузорный участок (рис. 1.7). В области II скорость жидкости увеличивается, давление при этом уменьшается, и если оказывается, что $p_2 < p_{\text{нп}}(T)$, то в области II начинают во всем объеме жидкости образовываться паровоздушные пузырьки (в них содержится воздух, растворенный в воде, и пары воды).

Эти пузырьки не успевают всплыть и уносятся жидкостью в область III, где $p_3 > p_{нп}$, и здесь начинается обратный фазовый переход: паровоздушные пузырьки под давлением начинают сжиматься и “захлопываются” внутри жидкости или на поверхности трубы. Это явление носит название *кавитации*. Подобное же явление имеет место иногда не только в трубе, но и при движении с большой скоростью тел в жидкости (колеса гидравлических турбин, подводные лодки, торпеды, гребные винты судов и т.п.).

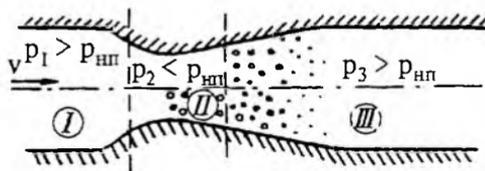


Рис. 1.7. Схема возникновения кавитации в потоке жидкости

“Захлопывание” пузырьков сопровождается образованием в точке захлопывания зон повышенного давления, которое распространяется в жидкости со скоростью звука. При наличии большого числа захлопывающихся пузырьков в результате интерференции образуются высокочастотные интенсивные (ударные) колебания давления в жидкости, которые порождают акустические эффекты (шум, удары и т.п.).

Порожденное кавитацией воздействие интенсивной высокочастотной знакопеременной нагрузки на твердые граничные поверхности иногда оказывается настолько эффективным, что даже очень прочные материалы могут разрушаться. Происходит так называемая *кавитационная эрозия*. В результате, например, колесо гидромашины, запроектированное без учета возможности такого эффекта, может разрушиться за счет кавитационной эрозии за один-два года. Кроме того, кавитация может существенно снизить коэффициент полезного действия гидромашин, гребных винтов и других механизмов или их деталей.

1.7. Отличительные особенности жидкостей и газов

Если считать, что свойство текучести является основным, определяющим главные особенности объекта изучения в механике жидкости и газа, то часто, понимая под термином “жидкость” текучую среду, механику жидкости и газа называют просто механикой жидкости, или гидромеханикой. Поступая так же в дальнейшем, отметим, при изучении каких явлений следует отличать жидкости от газов.

Первое основное отличие заключается в том, что газ — это тело, которое легко сжимается и в котором скорость распространения звука (а следовательно, и всех механических возмущений) значительно меньше, чем в жидкости. Эта особенность газа должна учитываться, когда скорость его движения (или скорость движения в нем твердого тела) становится соизмеримой со скоростью звука или превышает ее. Область механики жидкости и газа, в которой возникает необходимость учитывать сжимаемость среды, выделяется в отдельный раздел, называемый газовой динамикой. В рамках этого раздела изучается движение сверхзвуковых самолетов, космических объектов, высокоскоростных паровых и газовых турбин.

Второе отличие жидкости от газа заключается в ее способности иметь граничную поверхность между нею и окружающим ее газом, которая

обычно называется *свободной поверхностью*. В поле силы тяжести покоящаяся жидкость имеет свободную поверхность в виде горизонтальной плоскости. В условиях невесомости свободная поверхность покоящейся жидкости в результате действия силы поверхностного натяжения является сферической. Это свойство жидкости, как и ее малая сжимаемость, обусловлено постоянным взаимодействием соседних молекул. В газе молекулы взаимодействуют только в моменты столкновений друг с другом, большую часть времени они свободно движутся в пространстве, поэтому вследствие хаотического характера теплового движения молекул газа он стремится равномерно распределиться по всей замкнутой части пространства, в которой он находится (эта часть пространства ограничивается поверхностями твердых и жидких тел). Если часть пространства не замкнута, то объем газа может неограниченно возрастать.

Третье отличие жидкости от газа заключается в том, что в газе можно неограниченно уменьшать давление или повышать температуру, и при этом свойства газа изменяются непрерывно. В жидкости давление может уменьшаться до некоторого определенного значения, ниже которого начинается образование внутри нее паровоздушных пузырьков — возникают фазовые переходы (см. п. 1.6), что качественно изменяет как текучесть среды, так и общую картину течения (аналогичное явление имеет место и при повышении температуры жидкости).

Излагая вопросы механики жидкости, будем иметь в виду, что все результаты можно отнести как собственно к жидкостям, так и к газам, но с учетом трех отмеченных выше особенностей (сжимаемость газа, наличие свободных поверхностей и фазовых переходов у жидкостей). Как правило, ограничения, накладываемые этими отличиями, сравнительно легко устанавливаются.

1.8. Вязкость жидкостей и газов. Реологические свойства жидкостей

Вязкостью называется свойство текучей среды, заключающееся в возникновении в ней внутренних сил, препятствующих ее деформации, т.е. изменению относительного положения ее частей. Поясним возникновение вязкости газа

с помощью молекулярно-кинетической теории на примере частного случая деформации — *простого сдвига* (рис. 1.8). Элемент поверхности $\delta x \delta y$ движется вместе с жидкостью, а слой жидкости 1 скользит по слою 2 с относительной скоростью du_x . Молекулы газа участвуют в двух видах движения: а) упорядоченном (продольном) со скоростью u_x или $u_x + du_x$ в зависимости от того, в каком они слое находятся; б) хаотическом, неупорядоченном (в том числе поперечном) тепловом движении, скорость кото-

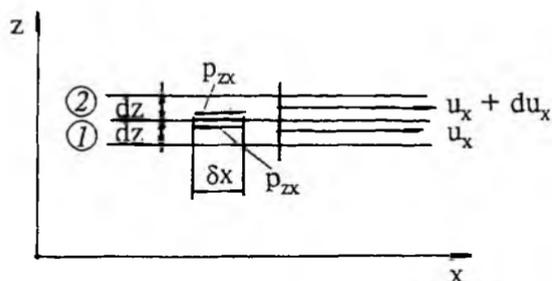


Рис. 1.8. Вязкие напряжения
в жидкостях и газах

рого обычно на два порядка выше скорости упорядоченного движения.

Вязкость газа обусловлена переносом молекулами при их тепловом движении через элемент поверхности $\delta x \delta y$ (который разделяет два слоя, имеющие различные продольные скорости u_x и $u_x + du_x$) количества движения, обусловленного скоростями этих слоев. Молекулы движутся хаотически беспорядочно, при этом они переходят из одного слоя в другой, пересекая площадку $\delta x \delta y$. Молекулы, имеющие упорядоченную скорость u_x , переходят в слой 2 и замедляют его, а молекулы, попавшие в слой 1 из слоя 2, ускоряют слой 1.

Переходя к сплошной среде (отбрасывая молекулярное строение вещества), считают, что на площадке $\delta x \delta y$ действует касательное напряжение, компенсирующее перенос количества движения, отброшенный нами вместе с молекулами. Согласно молекулярно-кинетической теории касательное напряжение

$$p_{zx} = \eta \frac{du_x}{dz}, \quad (1.30)$$

где η — динамический коэффициент вязкости, или просто динамическая вязкость. Знак напряжения таков, как будто оно “пытается” уменьшить разность скоростей слоев. С увеличением температуры скорость хаотического движения молекул возрастает, что приводит к увеличению количества молекул, пересекающих в единицу времени площадку $\delta x \delta y$; следовательно, растет и перенос количества движения из одного слоя в другой и, соответственно, касательное напряжение p_{zx} . Согласно (1.30) это означает, что с увеличением температуры динамический коэффициент вязкости возрастает.

Отметим дополнительно, что перенос молекул в газах (диффузия) также осуществляется вследствие теплового движения молекул и, следовательно, коэффициент молекулярной диффузии и коэффициент вязкости газа имеют один порядок.

В жидкости основной причиной воздействия одного слоя на другой (т.е. переноса количества движения) является взаимодействие молекул по границе слоев, а не перенос молекул через эту границу. Как уже отмечалось, молекулярно-кинетическая теория жидкости еще недостаточно развита, поэтому механизм вязкости в жидкости изучен значительно хуже, чем в газах. Обычно считают, что в жидкости непрерывно образуются и разрушаются при относительном скольжении слоев квазикристаллические структуры, а силы, необходимые для их разрушения, и обуславливают вязкость. Естественно, с увеличением температуры молекулы жидкости становятся более подвижными и разрушение структур происходит с меньшими затратами энергии. Таким образом, вязкость жидкости с увеличением температуры уменьшается (в отличие от газов — см. выше). То, что вязкость жидкости имеет иную природу, чем у газов, подтверждается также тем, что коэффициент диффузии в жидкости, характеризующий массоперенос, связанный с перемещением молекул при их тепловом движении, на три порядка меньше, чем соответствующий коэффициент вязкости (у газов, как отмечалось, они имеют один порядок).

Несмотря на различный молекулярный механизм возникновения напряжений в жидкостях и в газах, в обеих этих средах касательные на-

пряжения связываются с изменчивостью поля скорости одной и той же зависимостью (1.30), которая называется *законом Ньютона для вязких напряжений*. В отличие от закона для сухого трения в жидкостях и газах касательное напряжение не зависит от нормального напряжения.

Согласно определению (1.30) динамический коэффициент вязкости η имеет следующую единицу измерения:

$$[\eta] = \frac{[p_{zx}]}{\left[\frac{du}{dz}\right]} = \frac{[p][z]}{[u]} = \frac{\frac{H}{M^2} \cdot M}{\frac{M}{c}} = \frac{кг}{м \cdot с}.$$

Размерность г/(см·с) называется пуаз (в честь французского врача А. Пуазейля, выполнившего фундаментальные исследования движения вязкой жидкости) и обозначается П. Часто вместо пуаза для измерения динамического коэффициента вязкости используют Па·с = кг/(м·с).

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости η в механике жидкости вязкость характеризуют также отношением η к плотности жидкости ρ , которое обозначают через ν :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (1.31)$$

Эта величина имеет размерность:

$$[\nu] = \frac{[\eta]}{[\rho]} = \frac{кг \cdot м^3}{мс \cdot кг} = \frac{м^2}{с}.$$

Ввиду того, что в размерность ν входят только метры и секунды (и не входит размерность массы), эту величину называют *кинематическим коэффициентом вязкости* (или кинематической вязкостью). Размерность см²/с называют стокс (в честь английского гидромеханика Дж. Стокса, который сформулировал дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости) и обозначают Ст:

$$1 \text{ Ст} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

В табл. 1.1 приведены значения η , ρ и ν для некоторых жидкостей и газов.

Таблица 1.1

Жидкость,	t, °С	η , Па·с	ρ , кг/м ³	ν , Ст
Вода	0	0,00179	1,0 · 10 ³	0,0179
	20	0,0010	1,0 · 10 ³	0,010
	100	0,000273	1,0 · 10 ³	0,00273
Глицерин	20	0,510	1,25 · 10 ³	4,10
Бензин	15	0,0006	0,70 · 10 ³	0,0085
Ртуть	20	0,0015	13,6 · 10 ³	0,00111
Спирт этиловый	20	0,00120	0,8 · 10 ³	0,0151
Воздух (атмосферное давление)	20	1,84 · 10 ⁻⁵	1,38	0,133
Воздух (атмосферное давление)	50	2,18 · 10 ⁻⁵	1,22	0,178

Из приведенных значений коэффициентов вязкости следует, что вязкость воды уменьшается с увеличением температуры от 0 до 100°C почти в семь раз, а вязкость воздуха возрастает с увеличением температуры от 20 до 50°C на 25%. Для расчетов в инженерно-строительной практике пользуются значением кинематического коэффициента вязкости воды $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с} = 0,01 \text{ Ст}$.

Жидкости, для которых справедлива зависимость (1.30), называются ньютоновскими. Однако существует много жидкостей, для которых закон Ньютона не выполняется. Наука о характере зависимости

$p_{zx} = f\left(\frac{du_x}{dz}\right)$ называется реологией (рео — течь, лоγος — учение).

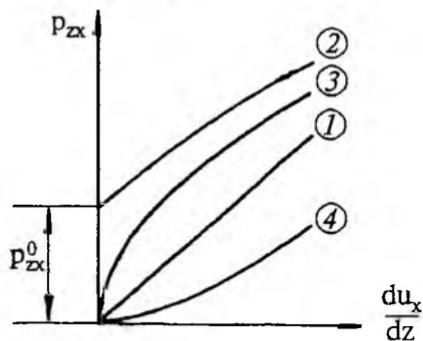


Рис. 1.9. Реологические законы в жидкостях:

1 — ньютоновская; 2 — жидкость Бингама—Шведова; 3 — псевдопластическая; 4 — дилатантная

они подчиняются зависимостям 3, то они называются псевдопластическими, а если следуют зависимости 4 — дилатантными. Механика движения таких жидкостей (это смолы, нефтепродукты, растворы полимеров и т.п.) очень сложна.

Если представить зависимость (1.30) в виде графика (рис. 1.9), то она будет иметь вид прямой линии 1. При экспериментальном исследовании некоторых жидкостей зависимость

$p_{zx} = f\left(\frac{du_x}{dz}\right)$ может иметь вид 2. Такие жидкости, которые сопротивляются небольшим ($p_{zx} < p_{zx}^0$) сдвигающим напряжениям как твердое тело, а при $p_{zx} > p_{zx}^0$ ведут себя как жидкие тела, называются жидкостями Бингама—Шведова.

Жидкости, поведение которых описывается кривыми 3, 4, называются жидкостями Оствальда—Вейля. Если

ГЛАВА 2

ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика — раздел гидромеханики, в котором изучают жидкости, находящиеся в условиях равновесия (покоя).

2.1. Гидростатическое давление в точке

Из определения текучести среды следует, что в состоянии покоя в жидкости касательные напряжения равны нулю, и в каждой точке произвольно ориентированной в пространстве площадки действуют только нормальные напряжения. Возьмем произвольную площадку (рис. 2.1),