

которая также, строго говоря, не является устойчивой (центр тяжести выше центра водоизмещения), при небольших кренах не опрокидывается. Как видно на рис. 2.20, б, при небольшом крене возникает момент сил  $F_a$  и  $F_g$ , который возвращает систему в исходное положение. При очень сильном крене (рис. 2.20, в) возникает момент, опрокидывающий систему; таким образом, ее нельзя назвать устойчивой в полном смысле. Такие тела, которые плавают в условиях неустойчивого равновесия, но при небольшом крене возвращаются в исходное положение, называются *остойчивыми*. Современные корабли, как правило, проектируются исходя не из условий устойчивого равновесия (они при этом были бы очень низкими), а из условия обеспечения остойчивости при крене до 35—45° (рис. 2.21).

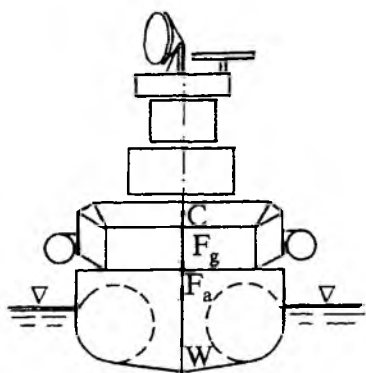


Рис. 2.21. Остойчивость современных кораблей

Современные корабли, как правило, проектируются исходя не из условий устойчивого равновесия (они при этом были бы очень низкими), а из условия обеспечения остойчивости при крене до 35—45° (рис. 2.21).

### ГЛАВА 3

## КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

### 3.1. Методы описания движения сплошной среды

Когда в теоретической механике рассматривается движение материальной точки, то для полного описания движения необходимо знать уравнение движения точки, т.е.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , где  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  — вектор-радиус точки. Чтобы найти скорость точки, надо взять производную от правой части уравнения движения (рис. 3.1, а)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Ускорение материальной точки определяется зависимостью (рис. 3.1, б)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Ускорение материальной точки  $\mathbf{a}$  входит во второй закон Ньютона, согласно которому сила  $\mathbf{F}$ , приложенная к материальной точке с массой  $m$ , придает ей ускорение  $\mathbf{a}$  в соответствии с равенством

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (3.3)$$

При изучении движения сплошной среды можно также выделить бесконечно малые объемы, положение которых в пространстве характе-

ризуется тремя координатами или величиной одного вектор-радиуса  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , и рассматривать движение сплошной среды как движение совокупности взаимно связанных и взаимодействующих бесконечно малых (точечных) объемов.

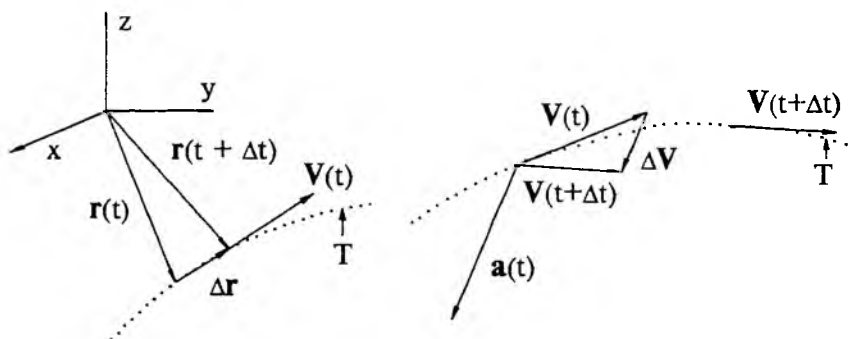


Рис. 3.1. Скорость  $\mathbf{V}$  и ускорение  $\mathbf{a}$  материальной точки

Обозначим координаты начального (т.е. в момент времени  $t_0$ ) положения каждой частицы сплошной среды через  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Для полного описания движения сплошной среды необходимо знать траектории всех частиц, т.е. положения каждой частицы в любой момент времени  $t > t_0$ . Это означает, что для каждой частицы надо знать уравнение движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . При этом одну частицу от другой отличает начальное положение частицы и, следовательно, величина  $\mathbf{r}_0$  войдет в уравнение движения жидкой частицы как параметр

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0). \quad (3.4)$$

Изложенный выше подход называется методом *Лагранжа* описания движения сплошной среды, а характеристики сплошной среды (скорость, плотность, давление и т.п.), связанные с движущимися элементарными объемами сплошной среды, как и координаты этого объема, называют *лагранжевыми* переменными.

Если принять такой подход к описанию движения сплошной среды, то, используя равенства

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}(t, \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{V}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t^2},$$

можно вычислить скорость и ускорение каждой частицы, а затем, определив величину внешних (поверхностных и объемных) сил, действующих на каждую частицу, записать уравнения движения для сплошной среды.

Несмотря на кажущуюся простоту метода Лагранжа, уравнения движения, получаемые на основе этого метода, очень сложны, и он используется сравнительно редко.

Более удобен (и потому значительно шире применяется) другой подход, называемый методом *Эйлера* описания движения сплошной среды. Согласно этому подходу фиксируют не частицы жидкости, а точки пространства, через которые проходят в разные моменты различные части-

цы жидкости. В этих точках пространства определяют значения скорости движения сплошной среды; таким образом, средством описания движения сплошной среды является поле скорости движения жидких частиц в фиксированных точках пространства:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t). \quad (3.5)$$

Характеристики сплошной среды (поле скорости, поле давлений, поле напряжений и т.п.), отнесенные к фиксированным неподвижным элементам геометрического пространства (точкам, линиям, поверхностям, объемам), и сами эти элементы называют *эйлеровыми* переменными.

Этот метод удобен по следующим причинам. Во-первых, наблюдать за характеристиками движения в фиксированных точках пространства проще, чем за движущимися (например, в трубе) фиксированными (мечеными) частицами. Для этого можно установить в какой-либо точке датчик скорости или давления и, снимая показания, изучать движение сплошной среды. Во-вторых, соответствующие этому методу уравнения движения оказываются проще для анализа. Подчеркнем, что если в методе Лагранжа  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$  — это искомые функции времени, то в методе Эйлера пространственные координаты  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — не функции времени, а независимые переменные, декартовы координаты пространства, в котором перемещается сплошная среда. Учитывая, что в методе Эйлера описание движения отличается от принятого в теоретической механике, следует ожидать и некоторого отличия в определении ускорения, входящего в уравнение (3.3), выражающего второй закон Ньютона. Дело в том, что в это уравнение входит ускорение материальной точки, которое в случае сплошной среды определяется, как и в теоретической механике, второй производной пути по времени только при использовании метода Лагранжа. При использовании метода Эйлера ускорение, которое входит в уравнение (3.3), а также другие гидромеханические величины изменяются вместе с движением объема жидкости, выражаются через специальный вид производной, которая определенным образом должна быть связана с полем скорости (3.5); вместе с тем эта производная должна быть связана с движением частиц жидкости, газа, т.е. с движением субстанции. Такую производную называют субстанциальной (см п. 3.7).

### 3.2. Линия тока и траектория

*Линией тока* в поле скорости сплошной среды называется такая кривая, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к ней (в фиксированный момент времени). Линия тока является эйлеровой характеристикой потока; ее не следует отождествлять с *траекторией*, т.е. геометрическим местом последовательных положений материальной точки (элементарной жидкой частицы) при ее движении в пространстве, которая является лагранжевой характеристикой потока (рис. 3.2). Эти линии совпадают только при *установившемся* движении, когда поле скорости не изменяется во времени, т.е.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Если же движение *неустановившееся*,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , то эти линии не совпадают (рис. 3.3).

Важной особенностью совокупности линий тока в фиксированный момент времени является то, что они никогда не пересекаются друг с другом, за исключением особых точек (см. рис. 3.5). Это следует из того, что скорость в данной точке не может являться касательной одновременно к двум пересекающимся кривым.

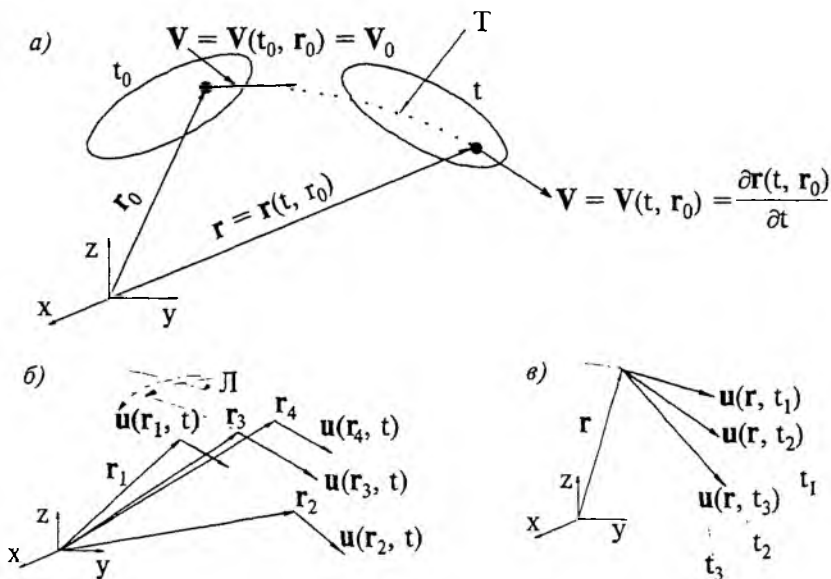


Рис. 3.2. Два метода описания движения сплошной среды: *a* — траектория  $T$  и скорость  $\mathbf{V}(t, \mathbf{r}_0)$  элементарного жидкого объема; *b* — линии тока  $L$  и скорость жидкости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в точках пространства; *c* — линии тока при неустановившемся движении в моменты времени  $t_1, t_2, t_3$

Если элементарный вектор, касательный к линии тока, обозначим через  $d\mathbf{e} = (dx, dy, dz) = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ , то вследствие того, что вектор  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  параллелен  $d\mathbf{e}$ , дифференциальное уравнение линии тока можно записать в виде

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = \frac{|d\mathbf{e}|}{|\mathbf{u}|} \quad (3.6)$$

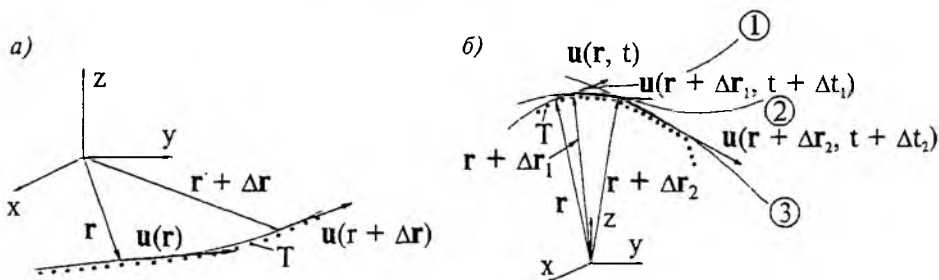


Рис. 3.3. Линии тока и траектории: *a* — при установившемся движении совпадают; *b* — при неустановившемся движении 1, 2, 3 — линии тока в моменты времени  $t, t + \Delta t_1, t + \Delta t_2$ ,  $T$  — траектория элементарного жидкого объема

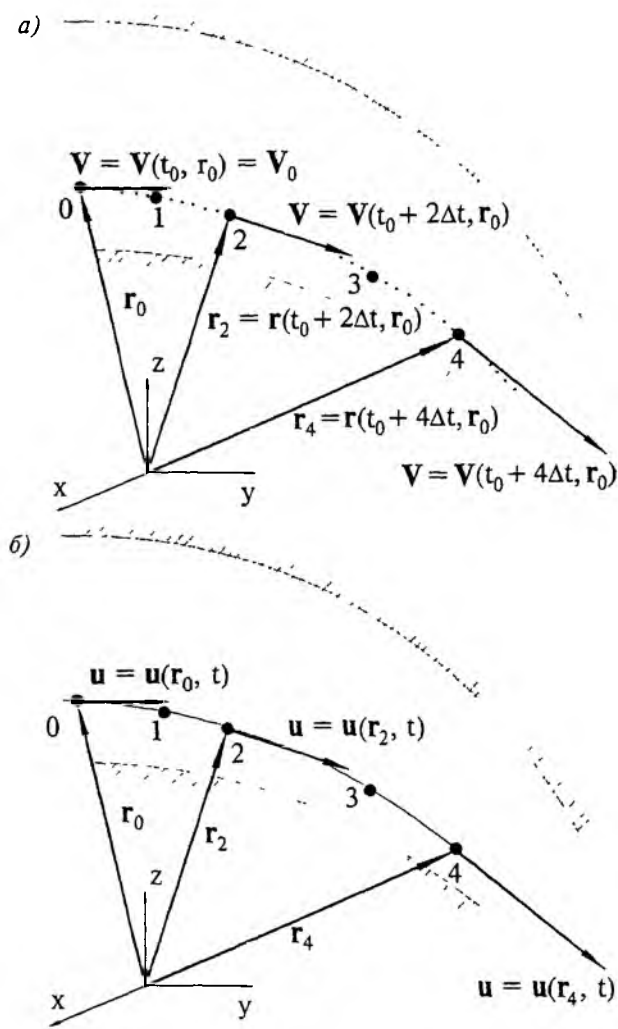


Рис. 3.4. Лагранжевы (а) и эйлеровы (б) переменные при описании установившегося движения в конфузуре

ко от пространственных координат этой точки  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ . Картина течения характеризуется достаточным набором линий тока.

Совокупность линий тока часто используется как наглядное средство для описания особенностей течения жидкости, особенно на плос-

Особенности лагранжева и эйлерова методов описания движения сплошной среды дополнительно продемонстрируем на примере установившегося движения жидкости (рис. 3.4), при котором траектория и линия тока совпадают. При лагранжевом методе (рис. 3.4,а) частица жидкости, имеющая при  $t = t_0$  начальную координату  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , движется по траектории, занимая в моменты времени  $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, t_0 + 3\Delta t$  положения в пространстве, отмеченные на рисунке точками. Скорость этой частицы изменяется со временем; картина течения описывается набором траекторий различных частиц жидкости. При эйлеровом подходе тот же поток (рис. 3.4,б) описывается полем скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ; при установившемся движении, когда  $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ , скорость жидкости в любой точке потока зависит толь-

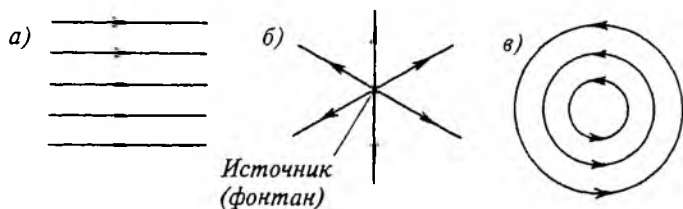


Рис. 3.5. Примеры линий тока для простейших потоков: а — равномерное движение; б — источник; в — водоворот

кости (рис. 3.5). На рис. 3.5,а показана совокупность линий тока при параллельно-струйном течении, когда скорости в каждой точке потока имеют одинаковые величину и направление. Такое течение бывает, в частности, в широком прямоугольном призматическом канале. На рис. 3.5, б показаны линии тока, которые имеют место в случае симметричного растекания жидкости при наличии источника; такое течение можно наблюдать в бассейне, в центре которого расположен фонтан. Линии тока, характерные для циркуляционных движений жидкости, например, водоворотов, смерчей и т.п., показаны на рис. 3.5,в.

### 3.3. Метод контрольного объема

В соответствии с двумя методами описания движения сплошной среды при необходимости дать математическую формулировку основных законов механики, а также получить эффективные методы решения практических задач отметим следующее. Законы механики формулируются для механических систем, т.е. совокупности физических тел; в случае сплошной среды это выделенный движущийся объем среды, сохраняющий при своем движении все составляющие его частицы. Это очевидно соответствует лагранжеву методу. Вместе с тем преимущества эйлерова метода приводят к использованию для решения задач гидромеханики представления о *контрольном объеме*, под которым понимают выделенную часть пространства, обычно неподвижную и, во всяком случае, не связанную с движением среды. Контрольный объем ограничивается *контрольной поверхностью*, сквозь которую течет среда. Контрольный объем может иметь конечные размеры, а границы его могут быть заданы в соответствии с решаемой задачей, например, они могут либо совпадать с твердыми поверхностями, ограничивающими поток, либо формировать сечения потока, в которых изучаются его характеристики. При других целях исследования контрольный объем может рассматриваться как бесконечно малый, стягивающийся к фиксированной точке пространства (опять-таки в соответствии с методом Эйлера независимо от движущейся сквозь него среды).

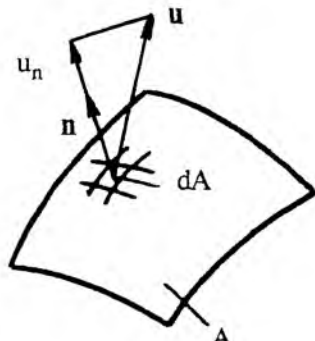


Рис. 3.6. Поток сквозь контрольную поверхность

Использование контрольного объема и контрольной поверхности для решения гидромеханических задач приводит к необходимости введения такого понятия, как поток гидродинамической характеристики (например, массы, кинетической энергии и т.п.) или количество этой гидродинамической характеристики, проносимое жидкостью в единицу времени через (сквозь) зафиксированную в пространстве поверхность. Зафиксируем в пространстве, занятом движущейся жидкостью, поверхность  $A$  и выделим около точки с координатами  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  элементарную площадку  $dA$  (рис. 3.6); скорость жидкости в этой точке равна  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности в этой же точке. При этом нормальная к поверхности составляющая скорости  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ .

Объем жидкости, протекающей в единицу времени через площадку  $dA$ , равен

$$dQ = u_n \cdot dA. \quad (3.7)$$

Эта величина называется объемным расходом жидкости (или просто расходом жидкости, термин поток объема не используется).

Расход через всю поверхность  $A$  равен сумме расходов через все элементарные площадки, на которые разделяется эта поверхность

$$Q = \int_A u_n dA = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.8)$$

Аналогично масса жидкости, протекающая (проносимая жидкостью) в единицу времени через поверхность  $A$ , равна

$$Q_M = \int_A \rho u_n dA. \quad (3.9)$$

Эта величина называется *массовым расходом* или потоком массы через контрольную поверхность.

Элементарный поток кинетической энергии равен количеству кинетической энергии той массы жидкости, которая протекает через  $dA$  за единицу времени:

$$d\Pi(\text{КЭ}) = \rho u_n dA \frac{u^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2} u_n dA. \quad (3.10)$$

Аналогично элементарный поток количества движения равен количеству движения массы жидкости, которая за единицу времени протекает через  $dA$ :

$$d\Pi(\text{КД}) = \rho u_n dA \cdot \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} \cdot u_n dA. \quad (3.11)$$

Вышеизложенное показывает, что в общем случае поток через элементарную площадку  $dA$  гидродинамической характеристики  $B$ , имеющей плотность распределения  $\beta(\mathbf{r}, t)$ , можно представить в виде

$$d\Pi(B) = \beta(\mathbf{r}, t) u_n dA, \quad (3.12)$$

а *поток гидродинамической характеристики* через всю поверхность  $A$  — в виде

$$\Pi(B) = \int_A \beta u_n dA = \int_A \beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA. \quad (3.13)$$

Сравнивая (3.13) и (3.8), получаем, что в случае объемного расхода  $Q$  следует принять  $\beta = 1$ .

Одной из важных задач, которую необходимо решить перед тем, как сформулировать математические выражения для законов механики в эйлеровых переменных, является определение способа выразить изменение во времени данной гидромеханической характеристики, например массы или количества движения выделенного объема среды (т.е. лагранжевой характеристики), рассматривая движение этого объема среды сквозь контрольный объем (т.е. в эйлеровых переменных). Для этого вводится особый вид производной от указанной гидромеханической характеристики по времени, которая называется *субстанциальной*, так как она связана с рассмотрением движения текучей среды, материи, субстанции. Иногда ее называют эйлеровой производной, так как она связана с использованием метода Эйлера, или Стоксовой, поскольку Стокс впервые дал ее математическое выражение и ввел специальное ее обозначение.

### 3.4. Гидромеханическая интерпретация теоремы Остроградского—Гаусса

Зафиксируем неподвижную в пространстве поверхность  $A$ , ограничивающую объем  $\mathcal{V}$ . Сквозь поверхность протекает жидкость, скорость жидкости  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ . Выделим на поверхности площадку  $dA$ , единичный вектор нормали к ней  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ . Если воспользоваться ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , то  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$ . Обозначим модуль скорости  $|\mathbf{u}| = u$ ; очевидно,  $|\mathbf{n}| = 1$ . Как известно, скалярное произведение двух векторов выражается двумя способами:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z; \quad (3.14)$$

через модули векторов и угол между ними

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = u \cos(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = u_n, \quad (3.15)$$

где  $u_n$  — нормальная к поверхности  $dA$  составляющая скорости. Таким образом

$$u_n = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z. \quad (3.16)$$

Согласно (3.16) объемный расход жидкости  $Q$  через поверхность  $A$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_A u_n dA &= \int_A (u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z) dA = \\ &= \int_A \left[ u_x \cos(\mathbf{n}, x) + u_y \cos(\mathbf{n}, y) + u_z \cos(\mathbf{n}, z) \right] dA. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Согласно теореме Остроградского—Гаусса имеем

$$\int_A u_n dA = \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) d\mathcal{V}. \quad (3.18)$$

Продемонстрируем доказательство этой зависимости на основе гидромеханических представлений.

Зафиксируем в пространстве параллелепипед с бесконечно малыми ребрами  $dx, dy$  и  $dz$ ; поверхность параллелепипеда обозначим через  $\Delta_1 A$ , а объем —  $\Delta_1 \mathcal{V} = dx dy dz$ .

На каждой грани параллелепипеда вследствие ее малости значение  $u_n$  постоянно и равно проекции скорости на координатную ось, к которой эта грань нормальна. Пусть проекции скорости имеют направления, указанные на рис. 3.7.

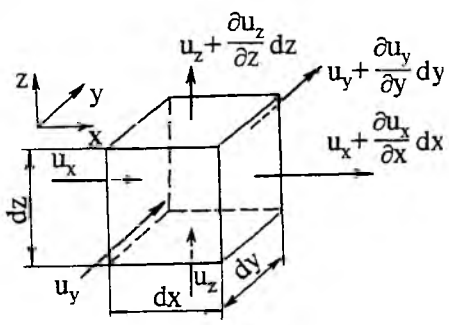


Рис. 3.7. Определение расхода жидкости сквозь поверхность элементарного параллелепипеда

Расход жидкости  $\int_{\Delta_1 A} u_n dA$ , протекающий сквозь поверхность  $\Delta_1 A$ , найдем как разность между объемом жидкости, вытекающим из параллеле-



лепипеда в единицу времени

$$\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz\right) dx dy,$$

и объемом, втекающим в него за то же время:

$$u_x dydz + u_y dx dz + u_z dx dy.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta, A} u_n dA &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz = \\ &= \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \Delta_1 \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  — дивергенция вектора скорости — скалярная величина, определяемая равенством

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (3.20)$$

Если жидкость несжимаемая, то из закона сохранения массы следует, что объем жидкости, втекающий в элементарный объем  $\Delta_1 \mathbf{V}$ , равен объему жидкости, вытекающему из него, так что

$$\int_{\Delta, A} u_n dA = 0. \quad (3.21)$$

При этом, так как  $\Delta_1 \mathbf{V} \neq 0$ , из (3.19) следует

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (3.22)$$

это выражение называют уравнением несжимаемости жидкости.

Чтобы обобщить равенство (3.19) для произвольного объема  $\mathbf{V}$ , ограниченного произвольной поверхностью  $A$  (рис. 3.8), разобьем  $\mathbf{V}$  на бесконечно малые параллелепипеды. Для каждого из них можно записать равенство (3.19). Складывая все такие равенства, можно заметить, что в левой части суммы все слагаемые, которые относятся к поверхностям, разделяющим параллелепипеды, взаимно уничтожаются, так как то, что вытекает из одного параллелепипеда, втекает в другой.

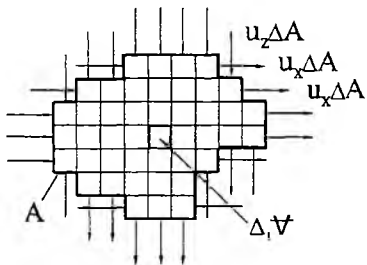


Рис. 3.8. Определение расхода сквозь произвольную контрольную поверхность

Следовательно, в левой части суммы по всем параллелепипедам получим

$$\sum_{\Delta, A} \int u_n dA = \int_A u_n dA. \quad (3.23)$$

В правой части суммы по определению интеграла как предела суммы бесконечно малых слагаемых имеем

$$\sum_i \operatorname{div} u_i \cdot \Delta_i \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} u \, d\mathcal{V}. \quad (3.24)$$

Таким образом, для объема  $\mathcal{V}$  произвольной формы справедливо равенство

$$\int_A u_n dA = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} u \, d\mathcal{V}; \quad (3.25)$$

представив  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ , имеем

$$\int_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dA = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} u \, d\mathcal{V},$$

что и составляет содержание теоремы Остроградского—Гаусса.

Аналогично можно рассуждать, рассматривая в поверхностном интеграле (3.18) вместо нормальной к поверхности проекции скорости  $u_n$  произведение любой физической (скалярной, векторной или тензорной) характеристики сплошной среды, плотность распределения которой обозначим через  $\beta$ , и нормальной составляющей скорости, т.е. поток этой величины [см. (3.13)]. При этом выражение (3.25) примет вид

$$\int_A \beta u_n dA = \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \beta u_x + \frac{\partial}{\partial y} \beta u_y + \frac{\partial}{\partial z} \beta u_z \right) d\mathcal{V}. \quad (3.26)$$

Легко вычислить, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \beta u_x + \frac{\partial}{\partial y} \beta u_y + \frac{\partial}{\partial z} \beta u_z &= \beta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ &+ u_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + u_z \frac{\partial \beta}{\partial z} = \beta \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \beta, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где оператор

$$(\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \equiv u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Воспользуемся уравнением (3.22) для вывода упрощенной формы теоремы Остроградского—Гаусса для важного частного случая, когда жидкость несжимаема.

Подставляя (3.27) в (3.26), имеем

$$\int_A \beta u_n dA = \int_{\mathcal{V}} [(\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \beta + \beta \operatorname{div} \mathbf{u}] d\mathcal{V}. \quad (3.28)$$

Если  $\beta$  скаляр, то (3.28) примет вид

$$\int_A \beta u_n dA = \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \beta + \beta \operatorname{div} \mathbf{u}] d\mathcal{V}. \quad (3.29)$$

В случае несжимаемой жидкости согласно (3.22) получим

$$\int_A \beta u_n dA = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \beta) d\mathcal{V}. \quad (3.30)$$

Эта формула будет использована в дальнейшем.

### 3.5. Векторная форма теоремы Остроградского—Гаусса

Пусть на поверхности  $A$  (рис. 3.9) действуют силы, плотность распределения которых (напряжение) обозначим вектором  $\mathbf{p}_n$ . Сумма поверхностных сил, действующих на эту поверхность, выражается в виде

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (3.31)$$

Заданная целью преобразовать этот интеграл в объемный по  $\mathcal{V}$ . Для этого разделим объем  $\mathcal{V}$  плоскостями, параллельными координатным, на элементарные параллелепипеды. Каждый из них взаимодействует с окружающими по поверхностям соприкосновения, при этом сила взаимодействия по каждой грани определяется напряжениями на этой грани.

Рассмотрим равновесие  $i$ -го элементарного параллелепипеда (рис. 3.10) с ребрами  $dx, dy, dz$  под действием поверхностных сил, опре-

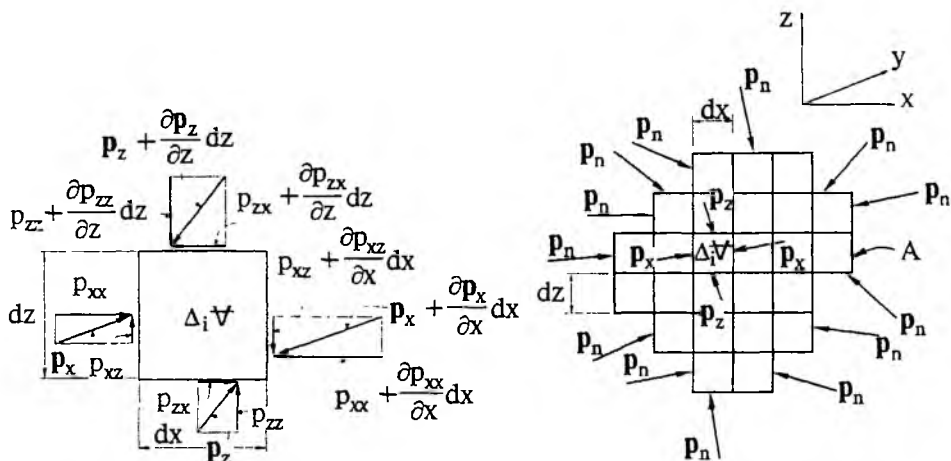


Рис. 3.9. Поверхностные силы, действующие на поверхности и внутри объема сплошной среды произвольной формы

Рис. 3.10. Определение равнодействующей поверхностных сил, действующих на элементарный параллелепипед

деляемых напряжениями на его гранях. Найдем проекцию суммы этих сил на ось  $x$ . Согласно принятым обозначениям (см. п. 1.3) на ось  $x$  могут иметь ненулевые проекции только силы, определяемые нормальным напряжением  $p_{xx}$  и касательными напряжениями  $p_{yx}$  и  $p_{zx}$ . Считая, что эти величины в пределах каждого элементарного параллелепипеда изменяются линейно, легко найти (см. рис. 3.10), что разность нормальных сил, действующих на противоположные грани площадью  $dydz$  и обусловленных напряжением  $p_{xx}$ , равна  $(\partial p_{xx}/\partial x) dx dy dz$ , а разности сил, обусловленных касательными напряжениями  $p_{yx}$  и  $p_{zx}$  и действующих на противоположные грани с площадями  $dx dz$  и  $dx dy$ , соответственно равны  $(\partial p_{yx}/\partial y) dx dy dz$  и  $(\partial p_{zx}/\partial z) dx dy dz$ .

Суммарная проекция сил на ось  $x$  равна

$$\Delta_1 F_x = \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Рассуждая аналогично, найдем проекции равнодействующей поверхностных сил на оси  $y$  и  $z$ :

$$\Delta_1 F_y = \left( \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz;$$

$$\Delta_1 F_z = \left( \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Из этих проекций можно составить вектор  $\Delta_1 \mathbf{F} = \Delta_1 F_x \mathbf{i} + \Delta_1 F_y \mathbf{j} + \Delta_1 F_z \mathbf{k}$ , который представим в виде матрицы-столбца:

$$\Delta_1 \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} dx dy dz. \quad (3.32)$$

Вектор, представленный в виде столбца в зависимости (3.32), в тензорном исчислении называется *дивергенцией тензора напряжений*  $\Pi$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{Div} \Pi = \text{Div} \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Перепишем (3.32) в виде

$$\Delta_1 \mathbf{F} = \text{Div} \Pi \cdot \Delta_1 \mathcal{V}, \quad (3.34)$$

где  $\Delta_1 \mathcal{V} = dx dy dz$  — объем  $i$ -го элементарного параллелепипеда.

Вектор  $\Delta_1 \mathbf{F}$  является равнодействующей всех поверхностных сил, действующих на элементарный параллелепипед.

Рассмотрим сумму всех поверхностных сил  $\Delta_1 \mathbf{F}$ , действующих на все элементарные параллелепипеды, на которые был разделен объем  $\mathcal{V}$ . По поверхностям соприкосновения действуют взаимно уравновешивающиеся (равные по величине и направленные в противоположные стороны) силы взаимодействия соседних параллелепипедов. Следовательно, при суммировании всех поверхностных сил силы по поверхностям соприкосновения взаимно уничтожаются, а ненулевой вклад в рассмат-

риваемую сумму внесут только поверхностные силы, действующие на поверхности элементарных объемов, которые не являются поверхностями соприкосновения соседних объемов, принадлежащих объему  $\mathcal{V}$ . Очевидно, что таковыми являются только поверхности элементарных объемов, совпадающие с поверхностью  $A$ . Следовательно, сумма  $\Delta_i \mathbf{F}$  по всем элементарным объемам, на которые был разделен  $\mathcal{V}$ , будет равна равнодействующей поверхностных сил, действующих на  $A$ :

$$\sum_i \Delta_i \mathbf{F} = \mathbf{F} = \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (3.35)$$

Рассматривая вместе с тем сумму по всем  $i$  выражений, стоящих в правой части равенства (3.34), легко увидеть, что она равна интегралу по объему  $\mathcal{V}$  от вектора  $\text{Div} \Pi$ . Таким образом получаем

$$\int_A \mathbf{p}_n dA = \int_{\mathcal{V}} \text{Div} \Pi d\mathcal{V}. \quad (3.36)$$

Так как согласно (1.18)  $\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\Pi$ , (3.36) можно представить в виде формулы

$$\int_A \mathbf{n}\Pi dA = \int_{\mathcal{V}} \text{Div} \Pi d\mathcal{V}, \quad (3.37)$$

которую назовем векторной формой теоремы Остроградского—Гаусса.

### 3.6. Разложение движения элементарного объема сплошной среды на поступательное, вращательное и деформационное (теорема Гельмгольца)

Поле скорости определяет характер изменения размеров и формы некоторого небольшого объема сплошной среды (жидкости) при его движении. Как показано на рис. 3.11, при перемещении объема жидкости, ограниченного поверхностью  $A$ , отрезок  $ab$  через время  $\Delta t$  изменил свою длину, повернулся на некоторый угол и занял положение  $a'b'$ . Другие отрезки будут по-другому изменять свое положение и длину. Будем

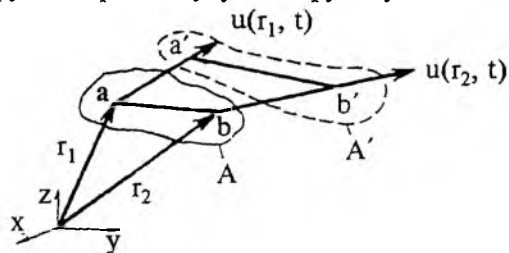


Рис. 3.11. Перемещение отрезка  $ab$  при движении жидкости

рассматривать изменение положения, формы и размеров объемов сплошной среды за малые интервалы времени  $\Delta t$ , следовательно, при перемещениях на малые расстояния. На таких расстояниях изменение поля скорости можно оценить значениями первых производных от проекций скорости, считая, что вкладом вторых производных можно пренебречь. Таких первых произ-

водных от каждой из трех составляющих скорости  $(u_x, u_y, u_z)$  по каждой из трех координат  $(x, y, z)$  получается девять. Прежде чем их выписывать, обратим внимание на то, что при рассмотрении поля некоторой скалярной величины  $\phi$  (например, плотности  $\rho$ , давления  $p$ ) из-

менчивость  $\varphi$  в окрестности фиксированной точки пространства характеризуется тремя производными  $\varphi$  по трем координатам ( $\partial\varphi/\partial x$ ,  $\partial\varphi/\partial y$ ,  $\partial\varphi/\partial z$ ). Эти три производные рассматриваются как проекции на соответствующие координатные оси векторной величины, которая называется градиентом скалярного поля  $\varphi$ :

$$\text{grad } \varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \equiv \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right).$$

Таким образом, если известно векторное поле  $\text{grad } \varphi$ , то можно вычислить, как изменяется скалярная характеристика  $\varphi$  в окрестности любой точки этого поля.

Если рассматривается векторное поле скорости, то изменчивость этого поля в окрестности фиксированной точки характеризуется девятью значениями производных; причем, если их объединить в таблицу (матрицу), то можно доказать, что эта совокупность образует *тензор* (см. п. 1.3):

$$\text{Grad } \mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Этот тензор называют *градиентом скорости*. Надо обратить внимание на то, что матрица  $\text{Grad } \mathbf{u}$  несимметрична. Если составить матрицу

$$\text{Grad}^* \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

то такая матрица называется сопряженной с матрицей  $\text{Grad } \mathbf{u}$ . Если тензор симметричный, то  $\text{Grad } \mathbf{u} = \text{Grad}^* \mathbf{u}$ .

Тензор  $\overset{\circ}{A}$  называется *антисимметричным*, если

$$\overset{\circ}{A}^* = -\overset{\circ}{A}. \quad (3.40)$$

Общий вид антисимметричного тензора

$$\overset{\circ}{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Для анализа характера движения элементарного объема удобнее пользоваться тензором  $\text{Grad } \mathbf{u}$ , разлагая этот тензор на симметричную и

антисимметричную части и представляя его в виде

$$\text{Grad } \mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{S}} + \overset{\circ}{\mathbf{A}}.$$

Симметричная часть  $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$  тензора  $\text{Grad } \mathbf{u}$  называется *тензором скорости деформации*. Легко непосредственными вычислениями проверить, что симметричная  $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$  и антисимметричная  $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$  части тензора определяются по формулам:

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^* \mathbf{u}); \quad \overset{\circ}{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u} - \text{Grad}^* \mathbf{u}). \quad (3.42)$$

Вычислим тензоры  $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$  и  $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ :

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Анализируя в дальнейшем перемещение и деформацию некоторого объема жидкости в пространстве, для удобства графического изображения будем рассматривать это явление в плоскости  $(xOy)$ , т.е. считать, что  $u_z = 0$  и  $\partial u_x / \partial z = \partial u_y / \partial z = 0$ , другими словами, рассматривать плоское движение объема. Очевидно, при этом будут отличны от нуля только те компоненты  $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$  и  $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ , которые находятся внутри штриховых прямоугольников в (3.43) и (3.44). Кроме того, в плоскости  $(xOy)$  для большей наглядности будем рассматривать перемещение и деформацию жидкости (сплошной среды), заключенной в начальный момент времени внутри квадрата  $abcd$  (рис. 3.12—3.15).

Для упрощения анализа выберем такую подвижную систему декартовых координат  $(x, y, z)$ , чтобы скорость  $\mathbf{u}$  в точке  $a$  была равна нулю. При этом смещения и скорости точек, принадлежащих отрезкам  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  и  $ad$ , относительно точки  $a$  можно рассматривать как абсолютные.

Отметим, что перемещение (поворот) ребра  $ab$  за время  $\Delta t$  относительно вершины  $a$  обусловлен изменением скорости  $u_x$  вдоль оси  $y$ , т.е. производной  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ , которая является недиагональной составляющей тензора

$\text{Grad } \mathbf{u}$ ; аналогично  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$  обуславливает поворот ребра  $ad$ . Выделив сим-

метричную  $\overset{\circ}{S}$  и антисимметричную  $\overset{\circ}{A}$  части тензора  $\text{Grad } u$ , считаем, что перемещения ребер  $ab$  и  $ad$  обуславливают составляющие тензоров  $\overset{\circ}{S}$  и  $\overset{\circ}{A}$ , расположенные в ячейках их матриц, соответствующих ячейкам матрицы  $\text{Grad } u$ , в которых находятся

$\frac{\partial u_x}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ . Таким образом, поворот  $ab$  обусловлен составляющими

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right),$$

а поворот  $ad$  — составляющими

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

тензоров  $\overset{\circ}{S}$  и  $\overset{\circ}{A}$  соответственно.

Дополнительно упростим последующий анализ, рассматривая несжимаемую жидкость; в этом случае при различных перемещениях ребер площадь квадрата  $abcd$ , характеризующая объем жидкого элемента, будет оставаться постоянной.

Рассмотрим вклад отдельных составляющих тензоров  $\overset{\circ}{S}$  и  $\overset{\circ}{A}$  в перемещение за время  $\Delta t$  жидкого объема, ограниченного квадратом  $abcd$ .

1. Деформация растяжения—сжатия (линейная деформация). Пусть только диагональные составляющие тензора  $\overset{\circ}{S}$  отличны от нуля, причем

$\frac{\partial u_x}{\partial x} < 0$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial y} > 0$  (рис. 3.12). В этом случае скорость всех точек ребра  $bc$

будет положительна, и оно переместится на расстояние  $\frac{\partial u_y}{\partial y} ab \Delta t$ , оставаясь параллельным оси  $x$ . Ребро  $cd$  переместится в отрицательном направлении оси  $x$  на расстояние  $\frac{\partial u_x}{\partial x} ad \Delta t$ , следовательно, наличие ненулевых  $\frac{\partial u_x}{\partial x} < 0$  и  $\frac{\partial u_y}{\partial y} > 0$  показывает, что квадрат  $abcd$  будет растягиваться в направлении оси  $y$  и сжиматься в направлении оси  $x$ . Таким образом, диагональные составляющие  $\overset{\circ}{S}$  обуславливают изменение линейных размеров движущегося объема.

2. Вращение (поворот без растяжения—сжатия:  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ ).

Пусть  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial x}$ , при этом все составляющие тензора  $\overset{\circ}{S}$  равны нулю, и перемещение обусловлено только недиагональными составляющими  $\overset{\circ}{A}$  (рис. 3.13). Вершина  $b$  за время  $\Delta t$  переместится

в положительном  $\left( \frac{\partial u_x}{\partial y} > 0 \right)$  направлении оси  $x$  на расстояние

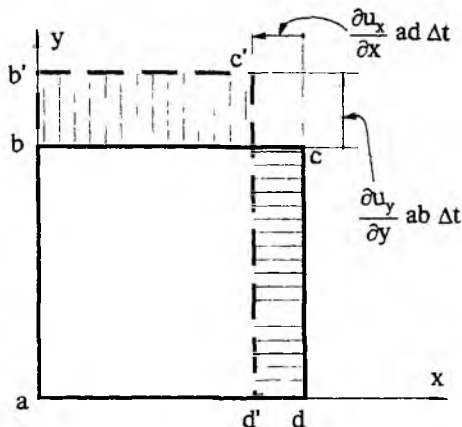


Рис. 3.12. Линейная деформация квадрата



$bb' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) ab \cdot \Delta t = \frac{\partial u_x}{\partial y} ab \cdot \Delta t$ , а вершина  $d$  переместится на такое

же расстояние в отрицательном  $\left( \frac{\partial u_y}{\partial x} < 0 \right)$  направлении оси  $y$ :

$dd' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) ad \cdot \Delta t = \frac{\partial u_y}{\partial x} ad \cdot \Delta t$ . Очевидно, при этом квадрат  $abcd$ ,

не деформируясь, повернется вокруг полюса  $a$  с угловой скоростью, равной

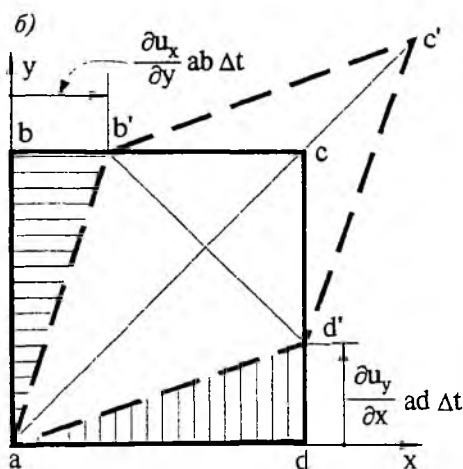
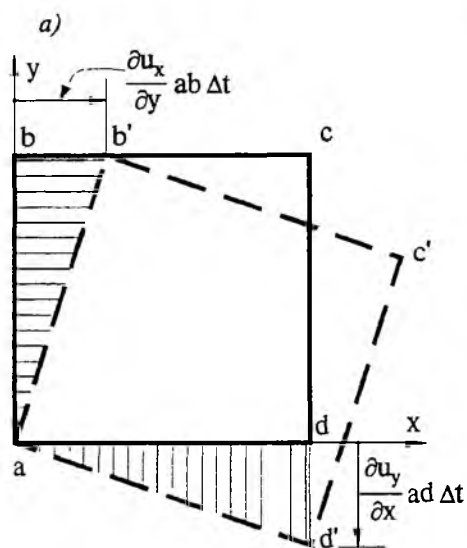


Рис. 3.13. Вращение (а) и угловая деформация (б) квадрата

угловой скорости, например, ребра  $ab$ . Пренебрегая малыми величинами, имеющими порядок второй и более высоких степеней длины ребра  $ab$ , найдем угловую скорость вращения квадрата  $abcd$ . Линейная скорость точки  $b$  равна  $bb'/\Delta t$ , а угловая скорость вращения ребра  $ab$  равна отношению линейной скорости точки  $b$  к расстоянию от этой точки до полюса  $a$ ; следовательно,

$$\omega_z = \frac{-(bb'/\Delta t)}{ab} = \frac{-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) ab}{ab} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Отрицательное значение  $\omega_z$  и знак минус перед линейной скоростью точки  $b$  объясняются тем, что вращение  $abcd$  происходит по часовой стрелке.

Таким образом, составляющие тензора  $A$  обуславливают вращение без деформации элементарного квадрата  $abcd$  с угловой скоростью  $\omega_z$ ; индекс  $z$  показывает, что ось вращения параллельна координатной оси  $z$ .

3. Угловая деформация (без растяжения—сжатия  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ ). Рассмотрим частный случай, когда  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0$  (рис. 3.13, б). При этом

вершины  $b$  и  $d$  перемещаются за время  $\Delta t$  в положительных направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно на одинаковое расстояние

$$bb' = dd' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) ab \cdot \Delta t = \frac{\partial u_x}{\partial y} ab \cdot \Delta t = \frac{\partial u_y}{\partial x} ad \cdot \Delta t,$$

а ребра повернутся на один и тот же угол. При этом квадрат превратится в ромб, так как вследствие малости размеров квадрата  $abcd$  можно считать, что ребра  $bc$ ,  $cd$  поворачиваются на тот же угол, что и ребра  $ab$  и  $ad$ . Диагонали ромба при этом остаются параллельными диагоналям квадрата, т.е. квадрат деформируется не поворачиваясь, без вращения. Заметим, что составляющая антисимметричного тензора  $\dot{A}$ , стоящая на том же месте, что и составляющая  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$  в матрице  $\dot{S}$ , в этом случае равна нулю; это подтверждает, что вращение  $abcd$  обусловлено составляющими тензора  $\dot{A}$ .

4. Чистый сдвиг (без растяжения—сжатия:  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ ). Рассмотрим следующий частный случай, когда  $\frac{\partial u_x}{\partial y} > 0$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$  (рис. 3.14). При чистом сдвиге перемещение  $abcd$  в положение  $ab''c''d$  представля-

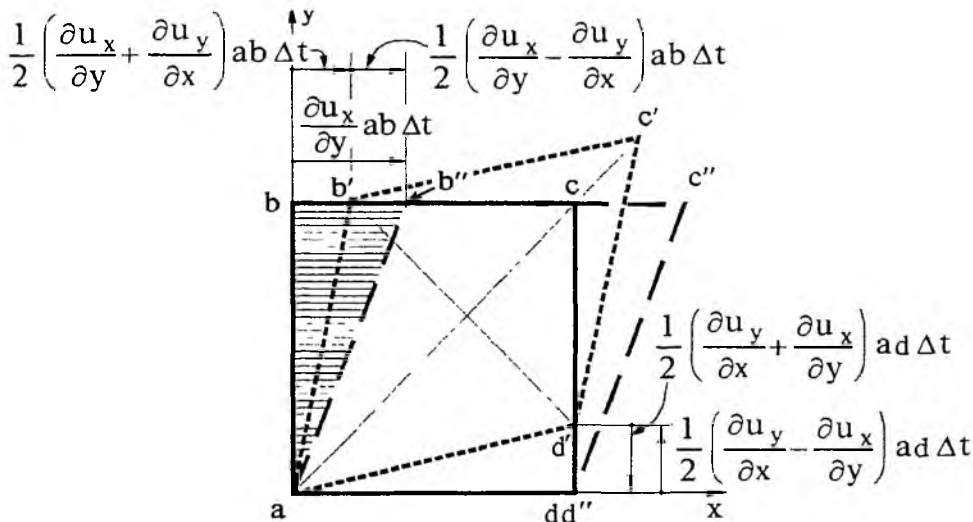


Рис. 3.14. Чистый сдвиг квадрата

ется в виде суммы: 1) угловой деформации за счет составляющей  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y}$  тензора  $\dot{S}$ , при которой, как было показано выше, квадрат  $abcd$  превращается в ромб  $ab'c'd'$ ; 2) поворота ребер  $ab'$  и  $ad'$  за счет составляющих  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$  и  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$  антисимметричного тензора  $\dot{A}$ . Очевидно, что эти составляющие в данном случае приведут к перемещению точки  $b$  в положительном направлении оси  $x$ , а точки  $d$  — в отри-

цательном направлении оси  $y$ ; при этом длины отрезков  $bb'$ ,  $b'b''$ ,  $dd'$  и  $d'd''$  оказываются равными между собой, а точка  $d''$  совпадает с точкой  $d$ .

Легко показать, что угловая скорость вращения ромба  $ab'c'd'$  равна

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

5. Деформация и вращение объема жидкости (без растяжения—сжатия):  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ ). Эти случаи легко разобрать по рис. 3.15, *а* и *б*.

а)  $\frac{\partial u_x}{\partial y} < 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0$

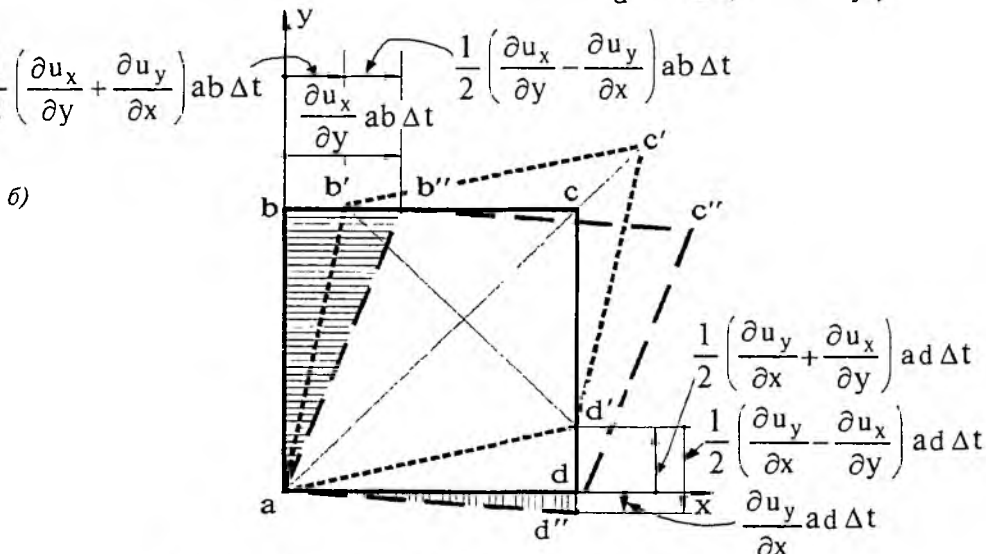
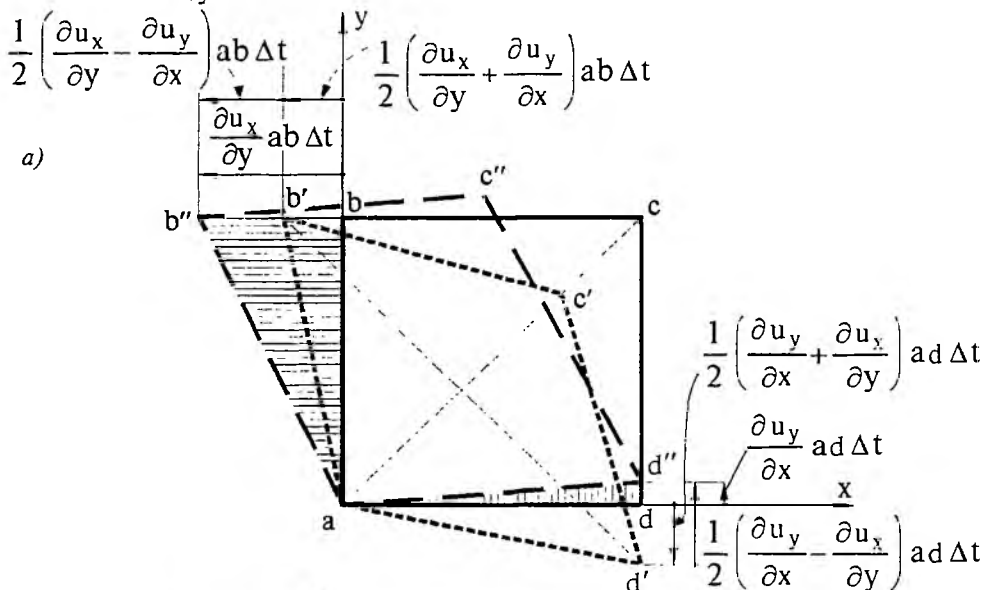


Рис. 3.15. Угловая деформация и вращение квадрата:

а —  $\frac{\partial u_x}{\partial y} < 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0$ ; б —  $\frac{\partial u_x}{\partial y} > 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} < 0$

6. Общий случай. Если не равны нулю все производные скорости по координатам, то на перемещение, изображенное на рис. 3.15, *a* и *b*, следует наложить деформацию растяжения—сжатия, в результате чего ромб превратится в параллелограмм.

Таким образом, в общем случае любое перемещение элементарного объема за бесконечно малый промежуток времени можно представить в виде следующей суммы: 1) *поступательного* движения со скоростью  $\mathbf{u}$  некоторой выделенной точки объема (в нашем случае это точка  $a$ ), называемой *полюсом*; 2) *деформационного* движения этого объема вследствие такой неоднородности поля скорости  $\mathbf{u}$ , которая обуславливает ненулевые значения симметричной части  $\dot{S}$  тензора  $\text{Grad } \mathbf{u}$ . При этом диагональные составляющие  $\dot{S}$  обуславливают деформацию вида растяжения—сжатия (линейную деформацию), а недиагональные — угловую деформацию (перекашивание), в результате которой, например, квадрат превращается в ромб; 3) *вращательного* движения этого деформированного объема, как твердого тела, вокруг полюса с угловой скоростью, определяемой составляющими антисимметричной части тензора  $\dot{A}$ .

Изложенное выше представление перемещения элементарного объема жидкости составляет содержание теоремы Гельмгольца.

Примечания: 1. Проводя аналогию с механикой твердого недеформируемого тела, можно отметить, что при движении элементарного объема жидкости можно выделить два вида движения, которые уже изучались в курсе теоретической механики, — поступательное движение твердого тела со скоростью полюса и вращение его вокруг полюса. В случае жидкости дополнительным видом движения является деформационное.

Поэтому иногда подразделяют движение элементарного объема жидкости на *квазитвердое* (поступательное и вращательное) и *деформационное*.

2. Из шести составляющих тензора  $\dot{A}$ , описывающего вращение жидкого объема вокруг полюса, только три отличаются друг от друга по абсолютной величине. Каждая из них определяет значение угловой скорости вращения вокруг оси, параллельной координатной оси, наименование которой не входит в индексы, принадлежащие составляющей  $\dot{A}$ . Например, как было показано выше,

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Эти угловые скорости  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  можно рассматривать как проекции на соответствующие координатные оси вектора  $\underline{\omega}$ , определяющего угловую скорость вращения элементарного объема жидкости при его перемещении в трехмерном пространстве:

$$\underline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.45)$$

3. В векторном анализе вместо  $\underline{\omega}$  рассматривают вектор  $2\underline{\omega}$ , который обозначают  $\text{rot } \mathbf{u}$  и называют *вихрем вектора  $\mathbf{u}$*  (или *вихрем скорости*):

$$\text{rot } \mathbf{u} = \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.46)$$

4. Следует обратить внимание, что выше рассматривалось лишь перемещение объема за бесконечно малые интервалы времени  $\Delta t$ . Если рассматривать конечные интервалы времени, то, например, после поворота с угловой скоростью  $\underline{\omega}$  за время  $\Delta t$  элементарный объем жидкости займет другие точки в поле скорости, и за следующий отрезок времени его угловая скорость может измениться. В результате даже при наличии во всех точках скорости  $\underline{\omega} \neq 0$  и  $\text{rot } \mathbf{u} \neq 0$  (такие поля называются вихревыми) может оказаться, что при перемещении на конечные расстояния элементарного объема жидкости поворот его вокруг полюса не будет восприниматься как вращение в обычном смысле. Например, при сдвиговом течении, представленном на рис. 3.16 с полем скорости  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left( \frac{u}{H} z, 0, 0 \right)$ , имеем, что только  $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{u}{H} \neq 0$ , а все остальные составляющие тензора  $\text{Grad } \mathbf{u}$  равны нулю. Очевидно, что при пе-

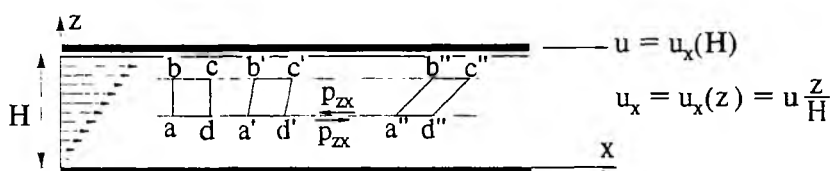


Рис. 3.16. Сдвиговое продольно-однородное течение (течение Куэтта)

ремещении объема  $abcd$  на большое расстояние поворот его вокруг  $a$  не воспринимается как вращение, хотя мгновенная угловая скорость этого объема

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{u}{2H} \neq 0.$$

### 3.7. Субстанциальная производная

В гидромеханике для того, чтобы использовать общие законы механики, необходимо иметь выражения, которые определяют изменение во

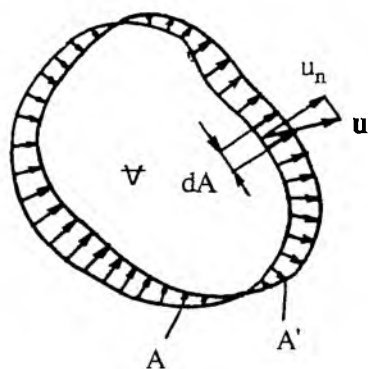


Рис. 3.17. Перемещение жидкости, содержащейся в момент  $t$  внутри контрольной поверхности  $A$ ; для простоты показано перемещение плоского произвольного объема единичной толщины; объем  $(V' - V)$  покрыт стрелками

времени механических величин, относящихся к выделенному движущемуся объему жидкости произвольной формы. Найдем выражение для определения указанного изменения в случае, когда используется эйлеров подход к описанию движения жидкости. Как было отмечено, эйлеров подход используется при решении подавляющего большинства задач гидромеханики.

Выделим в момент  $t$  в пространстве контрольный объем  $V$ , ограниченный контрольной поверхностью  $A$ ; в момент  $t + \Delta t$  жидкость, содержащаяся в этом объеме, переместится в пространстве и займет объем  $V'$  (рис. 3.17). Пусть нас интересует какая-либо определенная гидромеханическая величина  $B$ , которая име-

ет плотность распределения  $\beta$ , зависящую в общем случае от координат и от времени, т.е.  $\beta = \beta(\mathbf{r}, t)$ . Это может быть скаляр (например, плотность жидкости), вектор (скорость жидкости, плотность распределения количества движения) или даже тензор; ход рассуждений будет один и тот же. Рассмотрим производную по времени от указанной величины, относящейся ко всему объему  $\mathcal{V}$ , т.е. от  $B = \int_{\mathcal{V}} \beta d\mathcal{V}$ , при перемещении содержащейся

внутри него жидкости в пространстве, имея в виду, что  $\beta$  является эйлеровой переменной. Эта производная называется *субстанциальной* производной и обозначается через  $D/Dt$ :

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V}' - \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t}. \quad (3.47)$$

Преобразуем тождественно правую часть равенства, прибавив и отняв в числителе  $\int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}'$ , получим

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V}' - \int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}'}{\Delta t} + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}' - \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t}.$$

В первом пределе интегралы вычисляются по одному и тому же объему  $\mathcal{V}'$ , изменяется только одна переменная — время  $t$ , следовательно, он представляет собой частную производную по времени от интеграла по объему  $\mathcal{V}'$ , так как при  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}$ . Во втором пределе интегралы вычисляются в один и тот же момент времени  $t$ , но по различным объемам  $\mathcal{V}'$  и  $\mathcal{V}$ , поэтому числитель можно представить в виде одного интеграла, вычисляемого по разностям этих объемов ( $\mathcal{V}' - \mathcal{V}$ ). В результате имеем

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{(\mathcal{V}' - \mathcal{V})} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t}. \quad (3.48)$$

Интеграл  $\int_{(\mathcal{V}' - \mathcal{V})} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}$  представляет собой “количество” величины

В в объеме  $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$  (см. рис. 3.17); это “количество” проносится за время  $\Delta t$  при движении жидкости через поверхность  $A$ , и его можно рассчитать следующим образом. Разделим контрольную поверхность  $A$  на элементарные площадки  $dA$  и построим на каждой  $dA$ , как на основании, прямоугольные призмы, ограниченные сверху поверхностью  $A'$  (рис. 3.18). Очевидно, совокупность всех этих призм образует объем  $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$ . Высота каждой призмы равна расстоянию, на которое за время  $\Delta t$  поверхность  $A'$  удалилась от  $A$ , а так как  $A'$  переносится за счет движения жидкости со скоростью  $\mathbf{u}$ , то из геометрических построений, приведенных на рис. 3.18,

найдем значение высоты как  $(u_n \cdot \Delta t)$ . Объем элементарной призмы равен  $(u_n \cdot \Delta t) dA$ , а количество характеристики В внутри этой призмы вследствие элементарности ее объема представим в виде  $\beta(u_n \cdot \Delta t) dA$ . Так как

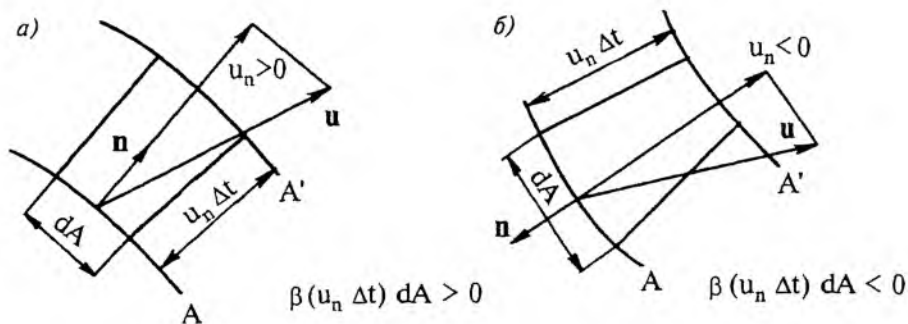


Рис. 3.18. Элементарная часть объема  $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$  в виде призмы с основанием  $dA$  и высотой  $u_n \Delta t$

рассматриваемый интеграл выражает изменение характеристики В в результате протекания жидкости сквозь контрольную поверхность А, то на той части А, где скорость жидкости направлена из контрольного объема (рис. 3.18,а), поток жидкости вносит характеристику В в объем  $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$ ; при этом  $\beta(u_n \Delta t) dA > 0$ . На той части А, где  $u$  направлена внутрь объема  $\mathcal{V}$  (рис. 3.18,б), поток жидкости выносит характеристику В из объема  $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$ , и при этом  $\beta(u_n \Delta t) dA < 0$ . Поэтому, рассматривая выражение количества В в элементарной призме в виде

$$\beta u_n \Delta t \cdot dA,$$

следует учитывать знак  $u_n$  на каждом элементе поверхности  $dA$ .

Количество характеристики В в объеме  $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$  найдем, просуммировав количества этой характеристики во всех построенных элементарных призмах:

$$\int_{(\mathcal{V}' - \mathcal{V})} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_A \beta u_n \Delta t \cdot dA. \quad (3.49)$$

Подставив это равенство в оставшийся невычисленным предел (3.48), имеем

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{(\mathcal{V}' - \mathcal{V})} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_A [\beta u_n \cdot dA] \cdot \Delta t}{\Delta t} = \int_A \beta u_n \cdot dA. \quad (3.50)$$

Подставив (3.50) в (3.48), получим основное выражение для *субстанциональной* производной:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} + \int_A \beta u_n dA. \quad (3.51)$$

Первый интеграл в правой части выражает изменение гидродинамической величины В, относящейся к объему  $\mathcal{V}$ , связанное с изменением

во времени величины  $\beta(\mathbf{r}, t)$  в каждой точке внутри объема  $\mathcal{V}$ , и потому его называют *локальной* составляющей субстанциальной производной. Второй интеграл выражает изменение во времени этой же величины  $\beta$ , связанное с перемещением в пространстве (переносом, конвекцией) жидкости, содержащейся в момент  $t$  внутри контрольной поверхности  $A$ , и его называют *конвективной* составляющей субстанциальной производной.

Воспользуемся для вычисления поверхностного интеграла, который выражает конвективную составляющую субстанциальной производной, формулой Остроградского—Гаусса в форме

$$\int_A \beta u_n dA = \int_{\mathcal{V}} [(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\beta + \beta \text{div} \mathbf{u}] d\mathcal{V}. \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в (3.51), получаем

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \beta d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \beta d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} [(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\beta + \beta \text{div} \mathbf{u}] d\mathcal{V} \quad (3.53)$$

или

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \beta d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \beta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\beta \right] d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \beta \text{div} \mathbf{u} d\mathcal{V}. \quad (3.54)$$

Первый интеграл в правой части (3.54) определяет вклад в субстанциальную производную от величины  $\int_{\mathcal{V}} \beta d\mathcal{V}$ , обусловленный изменением величины  $\beta$ . Это, с одной стороны, локальное изменение, т.е. изменение во времени этой величины в фиксированной точке пространства  $\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)$ , а с

другой стороны, изменение  $\beta$  в связи с наличием переноса (конвекции), так как выражение  $(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\beta$  появилось из интеграла (3.50), определяющего конвективную составляющую субстанциальной производной от  $\beta$ .

Второй интеграл в (3.54) выражает вклад в субстанциальную производную, обусловленный изменением в пространстве поля скорости  $\mathbf{u}$ , а не самой величины  $\beta$ .

Вышеизложенное позволило назвать подынтегральное выражение в первом интеграле правой части (3.54) субстанциальной производной плотности распределения  $\beta$  и обозначить

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial \beta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\beta \quad (3.55)$$

или

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial \beta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + u_z \frac{\partial \beta}{\partial z}. \quad (3.55)$$

Здесь, как и в выражении (3.50), субстанциальная производная представляется в виде суммы локальной составляющей  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ , обусловленной из-



менением во времени гидродинамической характеристики  $B$  в фиксированных точках пространства, и конвективной составляющей  $(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\beta$ , обусловленной изменением  $\beta$  вследствие переноса (конвекции) гидродинамической характеристики движущейся жидкостью (субстанцией).

Покажем в качестве пояснения выражения (3.55), как в эйлеровых переменных выражается ускорение выделенной движущейся жидкой частицы (это ускорение является лагранжевой характеристикой потока). Пусть в момент времени  $t$  положение в пространстве элементарного объема  $\Delta V$  определяется тремя координатами  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , а скорость его равна  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — эйлерова характеристика. Через малый промежуток времени  $\Delta t$  этот объем, переместившись в пространстве по некоторой траек-

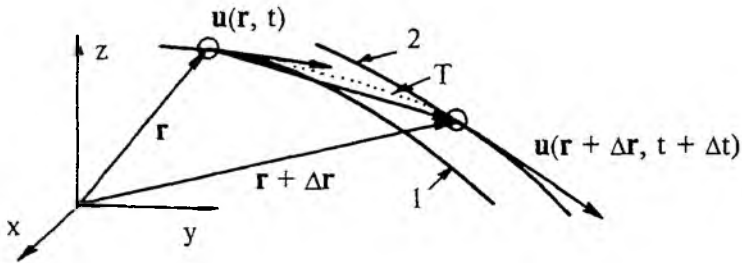


Рис. 3.19. Ускорение жидкой частицы:  $\Gamma$  — траектория, 1 и 2 — линии тока в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$  соответственно

тории (рис. 3.19), займет положение, определяемое координатами  $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ , при этом скорость его станет равной  $\mathbf{u} = (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t)$  — тоже эйлерова характеристика. Ускорение этого объема  $\mathbf{a}$  равно

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}. \quad (3.56)$$

Здесь следует указать:

приращение  $\Delta \mathbf{r}$  — это вектор, определяющий перемещение жидкого объема, т.е. лагранжева характеристика (а не просто приращение независимой переменной  $\mathbf{r}$ );

если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то величины  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  также стремятся к нулю; при этом

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = u_x; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = u_y; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = u_z. \quad (3.57)$$

Преобразуем производную по времени (3.56) так, чтобы выразить ее через частные производные по времени и по пространству:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t)}{\Delta t} + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t) - \mathbf{u}(x, y + \Delta y, z + \Delta z, t)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(x, y + \Delta y, z + \Delta z, t) - \mathbf{u}(x, y, z + \Delta z, t)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \\
& + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(x, y, z + \Delta z, t) - \mathbf{u}(x, y, z, t)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \\
& = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получено, что *ускорение жидкой частицы* в эйлеровых переменных представляет собой субстанциальную производную от скорости

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (3.58)$$

Оно имеет локальную  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  и конвективную  $(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}$  составляющие. Как было отмечено в п.3, ускорение жидкой частицы и при установившемся движении (когда поле скорости неизменно во времени) может быть отлично от нуля за счет конвективной составляющей.

### 3.8. Потенциал скорости и функция тока при плоском безвихревом движении

При *безвихревом* движении, когда все составляющие вектора  $\text{rot } \mathbf{u}$  равны нулю, можно для односвязной области ввести *потенциал* скорости, т.е. такую функцию координат и времени  $\varphi(x, y, z, t)$ , что  $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$  или

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.59)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой (3.59) в (3.46), что справедливо и обратное положение: если существует функция  $\varphi(x, y, z, t)$ , определяющая скорость согласно (3.59), то  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ . Если удастся ввести  $\varphi(x, y, z, t)$ , то исследование поля скорости существенно упрощается, так как вместо трех функций  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  достаточно определить одну функцию  $\varphi$ , а потом найти проекции скорости простым дифференцированием. Движение жидкости, для которого можно ввести потенциал скорости, называется *потенциальным*.

Подставим выражения для проекций скорости (3.59) в уравнение несжимаемости (3.22), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.60)$$

Следовательно, в случае несжимаемой жидкости функция потенциала скорости должна удовлетворять уравнению Лапласа (другими словами, являться гармонической функцией).

Если скорость жидкости имеет две ненулевые составляющие  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ , которые зависят от двух переменных  $x, y$ , то можно рассматривать плоскую задачу механики жидкости; при этом уравнение несжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (3.61)$$

Из этого уравнения следует, что всегда существует такая функция  $\psi(x, y)$ , что

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.62)$$

так как при подстановке (3.62) в (3.61) последнее обращается в правильное тождество. Если подставить (3.62) в уравнение линии тока (3.6), которое для плоской задачи имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \quad \text{или} \quad u_y dx - u_x dy = 0, \quad (3.63)$$

то получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0, \quad \text{или} \quad d\psi = 0, \quad (3.64)$$

откуда следует, что на линии тока имеет место равенство

$$\psi(x, y) = \text{const}. \quad (3.65)$$

Вследствие этого функция  $\psi(x, y)$ , определяемая равенствами (3.62), называется *функцией тока*.

Сравнивая (3.62) с выражением проекций скорости через потенциал  $\phi$  в случае плоской задачи

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (3.66)$$

получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.67)$$

Подставив (3.66) в уравнение несжимаемости, записанное для условий плоской задачи в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (3.68)$$

найдем, что в этих условиях потенциал скорости  $\phi(x, y, t)$  должен удовлетворять двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \phi = 0. \quad (3.69)$$

Как уже отмечалось, если движение потенциальное, то вектор вихря скорости равен нулю, что доказывается подстановкой выражения проекций скорости через потенциал  $\phi$  в выражение проекций вектора  $\text{rot } \mathbf{u}$  (3.46). В случае плоской задачи ненулевой может быть только проекция  $\text{rot } \mathbf{u}$  на

ось  $z$ , так как в остальные проекции входит либо  $u_z$ , либо производная по  $z$ , которые в этом случае равны нулю.

Подставляя (3.66) в выражение

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (3.70)$$

убедимся, что оно равно нулю. Если в это же выражение подставить (3.62), то найдем, что

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Таким образом, если движение жидкости безвихревое, то

$$\Delta \psi = 0. \quad (3.71)$$

Следовательно, при безвихревом (потенциальном) плоском движении жидкости функция тока (как и потенциал скорости) является гармонической функцией.

Равенства (3.67) представляют собой известные из теории функций комплексного переменного условия Коши—Римана. Если функцию комплексного переменного  $\xi = x + iy$  представить в виде комплексной функции двух вещественных переменных  $x$  и  $y$

$$f(\xi) = f_1(x, y) + if_2(x, y), \quad (3.72)$$

то производные вещественных функций  $f_1$  и  $f_2$  должны быть связаны между собой так же, как производные  $\varphi$  и  $\psi$  согласно (3.67).

Указанные выше свойства потенциала скорости и функции тока обусловили эффективное использование теории функций комплексного переменного при решении плоской задачи механики жидкости. В частности, если задать произвольную функцию комплексного переменного (например,  $f(\xi) = a\xi^2 + b$  или  $f(\xi) = \operatorname{Log} \xi$  и т.п.), то, выделяя функции  $f_1(x, y)$  или  $f_2(x, y)$  согласно (3.72), можно считать, что  $f_1(x, y)$  — это потенциал скорости, а  $f_2(x, y)$  — функция тока:

$$\varphi(x, y) \equiv f_1(x, y), \quad \psi(x, y) \equiv f_2(x, y). \quad (3.73)$$

Поле скорости в плоскости течения и его общий вид определяются как путем непосредственного вычисления значений проекций скорости по формулам (3.62) или (3.66), так и построением линий тока на основе равенства (3.65). Надо отметить, что заранее при задании функции  $f(\xi)$  неизвестно, какое течение описывают функции  $f_1$  и  $f_2$ . Однако вследствие линейности оператора Лапласа  $\Delta$  можно использовать принцип суперпозиции и, суммируя потенциалы, описывающие простейшие течения, которые определяются элементарными функциями, получить возможность описывать более сложное течение, характер которого в значительной мере уже можно предсказать.