

ОДНОМЕРНЫЕ ПОТОКИ ГАЗА

15.1. Скорость распространения возмущений в сжимаемой среде

Как было показано в разд. 7.1, изменение во времени средней скорости воды или гидродинамического давления в каком-либо сечении трубопровода (это изменение называют также возмущением потока) распространяется вдоль потока с конечной скоростью a . Скорость распространения возмущения зависит от характеристик сжимаемости воды и деформируемости стенок трубопровода:

$$a = \frac{\sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D E_{\text{ж}}}{\delta E_{\text{т}}}}} \quad (7.12)$$

Из зависимости (7.12) следует, что если трубопровод рассматривать как абсолютно жесткий (недеформируемый) и положить модуль упругости материала, из которого он изготовлен, сколь угодно большим ($E_{\text{т}} \rightarrow \infty$), то скорость распространения возмущений будет определяться модулем объемной упругости $E_{\text{ж}}$ и ее плотностью ρ :

$$a = \sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}} \quad (15.1)$$

Для воды $E_{\text{ж}} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$, а $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9 \text{ Па}}{1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}} \approx 1400 \text{ м/с}; \quad (15.2)$$

эта величина равна скорости звука в воде. Как следует из примеров, приведенных в гл. 7, учитывать конечную скорость распространения возмущений целесообразно лишь при рассмотрении быстро протекающих процессов, например, *мгновенного* закрытия задвижки. Если время закрытия задвижки $t_{\text{з}}$ во много раз превышает время $t_{\text{г}}$, за которое возмущение от задвижки пройдет по всей длине трубопровода L :

$$t_{\text{з}} \gg t_{\text{г}} = \frac{L}{a}, \quad (15.3)$$

то можно считать $t_{\text{г}} = 0$, или, что то же, скорость распространения возмущения $a = \infty$, т.е., считать жидкость несжимаемой. Таким образом, условие (15.3) ограничивает область применения модели несжимаемой жидкости для капельных жидкостей.

Как известно, модуль объемной упругости газов в десятки тысяч раз меньше модуля объемной упругости капельных жидкостей $E_{\text{ж}}$, и следовательно, скорость распространения возмущений (скорость звука) в га-

зах значительно меньше, чем в капельных жидкостях. Поэтому область применения модели несжимаемой жидкости для изучения потоков газа значительно меньше. Дополнительным и наиболее важным ограничением этой области является то, что скорость движения твердых тел в газовой среде (или скорость потоков газа) может быть соизмеримой со скоростью звука, и следовательно, эффекты, связанные со сжимаемостью, проявляются не только в *нестационарных*, но и в *стационарных* процессах. Отметим, что скорость движения твердых тел в капельных жидкостях ограничена фазовыми переходами (кавитацией), и обычно она во много раз меньше скорости звука в жидкости.

Кроме того, по сравнению с капельными жидкостями газы обладают малыми теплоемкостью и теплопроводностью, и многие гидромеханические процессы в газе сопровождаются существенным изменением внутренней энергии (температуры) и не могут рассматриваться как изотермические. Поэтому для газов при составлении баланса энергии наряду с механической энергией необходимо включить в рассмотрение и внутреннюю (тепловую) энергию текучей среды.

По изложенным причинам в гидромеханике выделяют раздел, в котором принимаются во внимание сжимаемость текучей среды, ограниченность скорости распространения в ней возмущений и соответствующие термодинамические эффекты. Этот раздел называют *газовой динамикой*.

Найдем зависимость скорости распространения возмущений (скорости звука) в текучей среде от механических характеристик этой среды. Запишем систему дифференциальных уравнений, выражающих закон сохранения массы (14.5) и закон изменения количества движения (14.34):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \end{array} \right. \quad (15.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \right). \end{array} \right. \quad (15.5)$$

В одномерном случае, когда $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = (u_x, 0, 0)$, а все производные по y и z равны нулю, пренебрегая вязкостью ($\nu = 0$) и внешними объемными силами $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) = (0, 0, 0)$, а также полагая, что конвективные составляющие субстанциальных производных пренебрежимо малы по сравнению с локальными составляющими, получим

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0; \end{array} \right\} \quad (15.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{array} \right\} \quad (15.7)$$

Преобразуем (15.6), представив

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (15.8)$$

а также принимая во внимание, что по определению модуль объемной упругости газа

$$E_r = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (15.9)$$

Подставив (15.8) и (15.9) в (15.6), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + E_r \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + E_r \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.11)$$

Сравнивая эту систему уравнений с системой уравнений гидравлического удара (7.19), обратим внимание, что квадрат скорости распространения возмущений a^2 согласно уравнениям (7.19) равен произведению коэффициентов перед вторыми слагаемыми уравнений системы (7.19). Отметим, что это же было получено в гл. 7 на основе анализа системы (7.19) вне связи с реальным физическим процессом, который описывает эта система уравнений (в гл. 10 этот же анализ позволил определить скорость распространения возмущений в потоках в открытых руслах $c = \sqrt{gh_0}$ с помощью линеаризованных уравнений мелкой воды (10.18), сходных с (7.19)). В результате найдем, что квадрат скорости звука в сжимаемой текучей среде (при сделанных предположениях)

$$a^2 = \frac{E_r}{\rho}$$

или

$$a = \sqrt{\frac{E_r}{\rho}}. \quad (15.12)$$

Эта зависимость для a совпадает с зависимостью (15.1), полученной в качестве предельного случая распространения возмущений в трубопроводе с недеформируемыми стенками ($E_r \rightarrow \infty$). Используя определение E_r (15.9), представим зависимость (15.12) в более удобной для ее анализа форме:

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}. \quad (15.13)$$

Как будет показано ниже, скорость звука в потоке газа зависит от термодинамических характеристик потока.

15.2. Уравнение Бернулли для установившегося потока газа

Уравнение Бернулли для потока жидкости было получено из уравнения, выражающего закон изменения кинетической энергии

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{u^2}{2} \rho dV = \int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA - \int_V \Phi dV.$$

Как указано выше, для описания движения газа необходимо включить в рассмотрение внутреннюю энергию текучей среды, представляющую собой, главным образом, кинетическую энергию хаотического теплового движения молекул газа. Поэтому для вывода уравнения Бернулли для потока газа необходимо исходить из более общего уравнения, выражающего закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды (4.20):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \rho dV = \int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA + \int_V \tau dV + \int_A \sigma dA + \sum_i W_i, \quad (15.14)$$

где $e(\mathbf{r}, t)$ — плотность распределения *внутренней* (тепловой) энергии газа или удельная (на единицу массы) внутренняя энергия газа; $\tau(\mathbf{r}, t)$ — плотность распределения внутри контрольного объема источников тепла (на единицу объема в единицу времени); $\sigma(\mathbf{r}, t)$ — плотность распределения на контрольной поверхности источников тепла (на единицу площади в единицу времени); W_i — мощность точечных источников (стоков) энергии внутри контрольного объема.

При отсутствии внешних источников (стоков) тепловой и механической энергии внутри контрольного объема (распределенные $\tau = 0$, точечные $W_i = 0$) и на его поверхности ($\sigma = 0$) уравнение (15.14) отличается от уравнения (15.13):

наличием плотности распределения внутренней энергии $e(\mathbf{r}, t)$ в виде дополнительного к плотности распределения кинетической энергии слагаемого под интегралом в левой части уравнения;

отсутствием слагаемого, выражающего мощность внутренних сил (диссипацию механической энергии) внутри контрольного объема. Отметим, что работа внутренних сил увеличивает внутреннюю энергию текучей среды (см. разд. 4.6). Если провести все преобразования, указанные в разд. 5.4, взяв в качестве исходного уравнения (15.14), то вместо уравнения Бернулли (5.40) получим

$$Q_M \left(\frac{\alpha_1 v_1^2}{2} + e_1 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = Q_M \left(\frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + e_2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right). \quad (15.15)$$

В нем по сравнению с (5.40) появилось слагаемое e и не появилось

$\int_V \Phi dV$. Дополнительно при выводе этого уравнения и в дальнейшем практически всегда можно полагать, что работа силы тяжести в потоках газа дает пренебрежимо малый вклад в баланс энергии и что все гидродинамические характеристики (u , e , p , ρ) постоянны в каждом расчетном живом сечении, при этом $\alpha_i = 1,0$, а $u = v$. Сокращая на Q_M , получим искомое уравнение Бернулли для газа:

$$e_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = e_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (15.16)$$

Если рассматривать поток невязкого газа и тем самым исключить перенос поперек потока механической энергии за счет вязкости, то урав-

нение (15.16) можно применять не только для потоков, ограниченных твердыми стенками, но и для трубок тока, внутри которых сохраняется постоянным массовый расход Q_M . Ввиду того, что поперечные размеры трубки тока могут быть приняты сколь угодно малыми, уравнение (15.16) может быть использовано и для двух любых точек, лежащих на одной линии тока. Другими словами, из уравнения (15.16) следует, что равенство

$$e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (15.16a)$$

справедливо *вдоль линии тока* при установившемся движении газа.

15.3. Краткие сведения из термодинамики

В этой главе будут использоваться понятия, термины и зависимости, которые рассматриваются в курсе термодинамики.

1. Уравнение состояния совершенного газа (уравнение Клапейрона—Менделеева):

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (15.17)$$

Здесь T — абсолютная температура, К; R — универсальная газовая постоянная,

$$R = \frac{1,987 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{\mu} = \frac{8,3147 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{\mu}, \quad (15.18)$$

где μ — молекулярный вес газа; g — ускорение силы тяжести. Для воздуха $\mu = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, и следовательно, $R = 287,0 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

2. Энтальпия, или тепловая функция

$$i = e + \frac{p}{\rho}. \quad (15.19)$$

3. Удельная теплоемкость газа при постоянном объеме c_v и удельная теплоемкость газа при постоянном давлении c_p (рис. 15.1):

$c_v = \frac{\partial e}{\partial T}$ при фиксированном объеме выделенной массы газа $V = \text{const}$, для воздуха

$$c_v = 717,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$c_p = \frac{\partial i}{\partial T}$ при таком изменении объема V выделенной массы газа, которое обеспечивает постоянное давление $p = \text{const}$, для воздуха

$$c_p = 1004 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

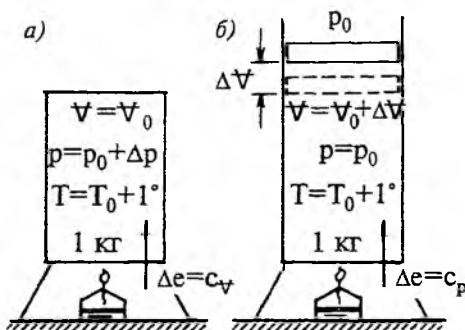


Рис. 15.1. Интерпретация теплоемкостей c_v и c_p в статических условиях (количество тепла, повышающее температуру 1 кг газа на 1К)

Из определения c_v следует, что при постоянном c_v удельная внутренняя энергия газа

$$e = c_v T. \quad (15.20)$$

4. Основная термодинамическая формула (формула Майера):

$$c_p - c_v = R. \quad (15.21)$$

Умножим равенство (15.21) на T :

$$c_p T - c_v T = RT$$

и, воспользовавшись уравнением состояния (15.17) и равенством (15.20), получим

$$c_p T = e + \frac{p}{\rho} \quad \text{или} \quad i = c_p T. \quad (15.22)$$

5. При *изотермическом* течении ($T = \text{const}$) в выделенном элементарном объеме газа вдоль траектории его движения согласно уравнению Клапейрона—Менделеева (15.17) выполняется условие:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (15.23)$$

6. При *адиабатическом* течении, когда приток тепла извне к выделенному элементарному объему газа или отток его исключаются, согласно первому началу термодинамики выполняется условие:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \quad (15.24)$$

где $k = \frac{c_p}{c_v}$ — показатель адиабаты; как правило, полагают для воздуха и других двухатомных газов $k = 1,4$.

Условие (15.24) можно представить в виде так называемой адиабаты Пуассона:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k, \quad (15.25)$$

где p_0 и ρ_0 — давление и плотность в какой-либо фиксированной точке траектории движущегося элементарного объема.

При установившемся движении равенства (15.23), (15.24) и (15.25) выполняются *вдоль линий тока*.

15.4. Зависимость скорости звука от термодинамических условий. Термодинамические формы уравнения Бернулли

Используем рассмотренные выше термодинамические зависимости для анализа свойств газовых потоков. Скорость звука в газе согласно зависимости (15.13), может быть вычислена при двух различных предположениях:

1) процесс распространения возмущения изотермический ($T = \text{const}$). Тогда согласно уравнению Клапейрона

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{p}{\rho} = RT. \quad (15.26)$$

При этом

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{RT}; \quad (15.27)$$

2) процесс распространения возмущений адиабатический. Тогда из уравнения (15.24) Пуассона следует:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \quad p = \rho^k \text{ const};$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = k \rho^{k-1} \cdot \text{const} = k \rho^{k-1} \cdot \frac{p}{\rho^k} = k \frac{p}{\rho}.$$

При этом

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (15.28)$$

Формула (15.27) была получена Ньютоном, а (15.28) — Лапласом. На основании экспериментов установлено, что опытные значения скорости звука хорошо соответствуют формуле (15.28), следовательно, процесс распространения возмущений в газах близок к адиабатическому. Отметим, что различие между значениями a , определяемыми по формулам (15.27) и (15.28), не превышает 20%.

Рассчитаем скорость звука в воздухе при температуре 20°C:

$$a = \sqrt{kRT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 293} = 343,1 \text{ м/с}.$$

Интересно отметить, что значение скорости звука в газе имеет тот же порядок, что и значение скорости свободного пробега молекул. Как известно из кинетической теории газа, среднеквадратическое значение этой скорости $V_m = \sqrt{3RT}$, следовательно, $a \approx 0,68 V_m$.

Как уже отмечалось, низкие теплоемкость и теплопроводность газов обеспечивают условия протекания процессов в них, близкие к адиабатическим, поэтому в дальнейшем все результаты будут получены для условий адиабатического процесса.

В соответствии с этим преобразуем уравнение Бернулли (15.16а)

$$e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad \text{или} \quad i + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (15.29)$$

Во-первых, используя уравнение Клапейрона—Менделеева, выразим внутреннюю энергию e через давление p :

$$e = c_v T = c_v \frac{p}{R\rho} = c_v \frac{p}{(c_p - c_v)\rho} = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Подставив это выражение в (15.29), получим

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (15.30)$$

или

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{const.} \quad (15.31)$$

Подставив в (15.29) вместо i выражение (15.22), получим еще одну форму уравнения Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = \text{const.} \quad (15.32)$$

Другую форму уравнения Бернулли можно записать, заменив в (15.31) kRT на a^2 (согласно (15.28)):

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \text{const.} \quad (15.33)$$

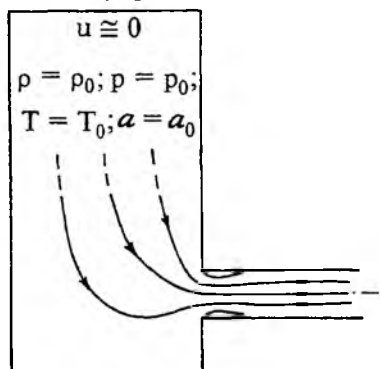
Отметим, что в (15.33) скорость звука a местная, т.е. она относится к тому же сечению, что и скорость u .

Представленные формы уравнения Бернулли, содержащие термодинамические характеристики, выполняются для термоизолированных потоков совершенного газа, а также для коротких отрезков линий тока, в пределах которых можно пренебречь поперечной диффузией тепла и механической энергии.

15.5. Параметры торможения.

Критическая скорость. Число Маха

Анализ и расчеты гидромеханических и термодинамических характеристик потоков газа при использовании уравнения Бернулли значительно упрощаются, если на линии тока имеется точка, в которой скорость газа равна нулю.



Например, при истечении газа из резервуара (рис. 15.2), имеющего объем достаточно большой, чтобы можно было считать, что на участке линии тока в резервуаре скорость газа равна нулю. При этом уравнения Бернулли (15.30), (15.32) и (15.33) для этой линии представляют в виде

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}; \quad (15.30a)$$

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = c_p T_0; \quad (15.32a)$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}, \quad (15.33a)$$

где p_0 , ρ_0 , T_0 и a_0 — значения соответствующих величин в резервуаре.

При набегании потока газа на твердое тело (рис. 15.3) вдоль линии тока, которая на поверхности твердого тела в точке В разветвляется, элементарные объемы газа уменьшают свою скорость (тормозятся) от значения u в точке А до нуля в точке В, следовательно, и для линии

тока АВ уравнение Бернулли можно представить в виде (15.30а), (15.32а) и (15.33а), где p_0, ρ_0, T_0 и a_0 — значения этих величин в точке В. С учетом последней интерпретации изменения величин p, ρ, T и a вдоль линии тока значения этих величин в точке линии тока, где $u = 0$, называют *параметрами торможения*, а саму эту точку — *точкой торможения*. В общем случае в реальных потоках такой точки, в которой скорость газа равна нулю, может и не быть, поэтому параметры торможения следует рассматривать как некоторые расчетные параметры потока. Так, согласно (15.32а) вдоль всего потока (или вдоль линии тока) величина T_0 является постоянной и характеризует полную энергию данного потока (если нет теплообмена через границы потока).

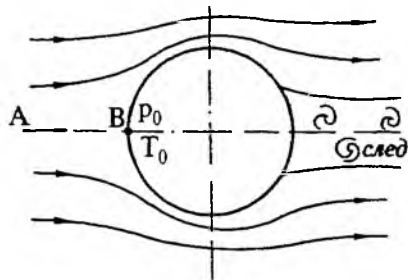


Рис. 15.3. Точка торможения при обтекании шара

Из уравнения (15.33а) следует, что при увеличении вдоль потока скорости газа u местная скорость звука a уменьшается. Это происходит вследствие уменьшения температуры потока T при увеличении скорости u (см. (15.28)); скорость звука в точке торможения a_0 , как и температура торможения T_0 , остаются неизменными. Уравнение (15.33а) позволяет найти такую скорость газа u , которая будет равна скорости звука в этой же точке линии тока. В этом случае скорость звука a называется критической и обозначается a^* . При условии $u = a = a^*$ имеем (из уравнения (15.33а))

$$\frac{a^{*2}}{2} + \frac{a^{*2}}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}.$$

Из этого равенства получим

$$a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} \approx 0,9a_0. \quad (15.34)$$

Соотношение между скоростью газа u и скоростью распространения возмущений в потоке газа a играет решающую роль в определении свойств газовых потоков. Отношение скорости движения газа u в какой-либо точке потока к скорости звука a в этой же точке называется *числом Маха* и обозначается через M :

$$M = \frac{u}{a}. \quad (15.35)$$

Если $u < a$ и $M < 1$, то поток называется *дозвуковым*; возмущения в нем распространяются со скоростью большей, чем скорость потока, и следовательно, они могут распространяться вверх и вниз по течению. Так, если в дозвуковой поток поместить какое-либо твердое тело, то возмущение от этого тела распространяется по всему потоку, и весь поток перестроится; частицы газа как бы заранее будут готовиться к обтеканию этого тела (см. рис. 15.3).

Если $u > a$ и $M > 1$, то поток называется *сверхзвуковым*; возмущения в нем не могут распространяться вверх и вниз по течению, и тело, вве-

денное в сверхзвуковой поток, может воздействовать лишь на ту часть потока, которая расположена ниже по течению; частицы газа набегают на тело, не успевая подготовиться к обтеканию, и только в непосредственной близости к лобовой поверхности тела изменяют свою скорость, образуя ударный (уплотненный) слой (рис. 15.4).

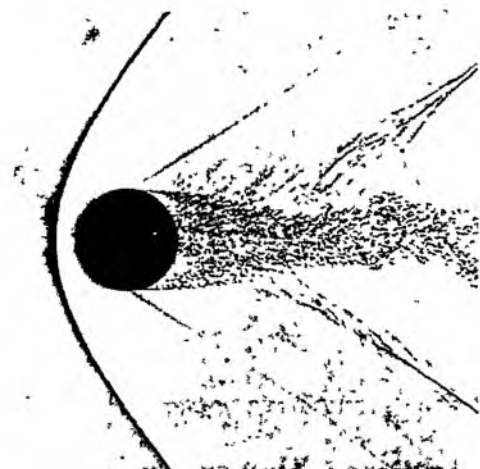


Рис 15.4. Шар, движущийся при $M = 1,53$. За тем участком головной волны, который находится непосредственно перед шаром, вдоль его поверхности вплоть до угла 45° течение дозвуковое

равна $t = -30^\circ\text{C}$ ($T_A = 243\text{K}$), а отсутствие обледенения гарантировано при температуре в точке В на поверхности стекла $t = 20^\circ\text{C}$ ($T_B = 293\text{K}$). В инерционной системе координат, движущейся со скоростью самолета

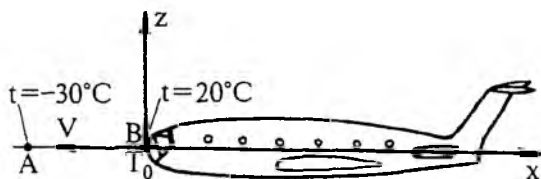


Рис. 15.5 К расчету обледенения самолета
точка А достаточно удалена от самолета и в принятой системе координат скорость в ней равна $(-V)$ Тогда согласно (15.32а) имеем:

$$\frac{V^2}{2} + c_p T_A = c_p T_B;$$

отсюда

$$V = \sqrt{2c_p (T_B - T_A)} = \sqrt{2 \cdot 1004 \cdot (293 - 243)} = 317 \text{ м/с} = 1140 \text{ км/ч.}$$

Таким образом, во избежание обледенения самолет должен иметь скорость $V \geq 1140$ км/ч.

15.6. Течение газа в конфузорах и диффузорах (в одномерном приближении)

Для анализа адиабатического течения газа в каналах с переменным поперечным сечением воспользуемся уравнениями, выражающими закон сохранения массы и закон сохранения энергии. Первый из них представим в форме уравнения постоянства массового расхода вдоль потока:

$$Q_M = \rho u \omega = \text{const.}$$

Второй закон используем в виде уравнения Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Представим оба уравнения в дифференциальной форме:

$$\left. \begin{aligned} u \omega d\rho + \rho \omega du + u \rho d\omega &= 0; \\ u du + \frac{k}{k-1} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p d\rho}{\rho^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Разделим слагаемые первого уравнения на $\rho \omega$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{d\omega}{\omega} &= 0; \\ u du + \frac{d\rho}{\rho} \frac{k}{k-1} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho} \right) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Введем во второе уравнение скорость звука согласно (15.28):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{d\omega}{\omega} &= 0; \\ u du + \frac{d\rho}{\rho} \left(\frac{k}{k-1} a^2 - \frac{a^2}{k-1} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.36)$$


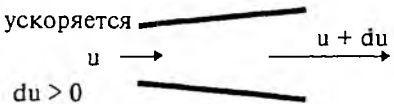
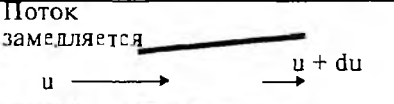
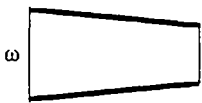
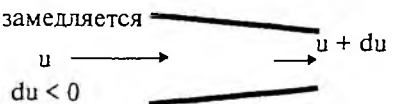
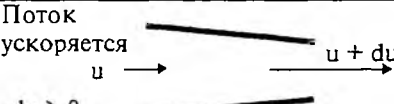
Разделив все слагаемые второго уравнения на a^2 и подставив из него $\frac{d\rho}{\rho}$ в первое уравнение системы, получим

$$-\frac{u du}{a^2} + \frac{du}{u} + \frac{d\omega}{\omega} = 0.$$

Преобразуя полученное уравнение, введя в него число Маха, получим

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (15.37)$$

Анализ этого уравнения (которое получено Гюгонио) представлен в таблице:

| | | |
|--|--------------------------------|--|
| <p>Диффузор</p>  <p>ω $\omega + d\omega$</p> <p>$d\omega > 0$</p> | Сверхзвуковой поток $M > 1$ | Поток ускоряется  <p>$u \rightarrow$ $u + du$</p> <p>$du > 0$</p> |
| | Дозвуковой поток $M < 1$ | Поток замедляется  <p>$u \rightarrow$ $u + du$</p> <p>$du < 0$</p> |
| <p>Конфузор</p>  <p>ω $\omega + d\omega$</p> <p>$d\omega < 0$</p> | Сверхзвуковой поток $M > 1$ | Поток замедляется  <p>$u \rightarrow$ $u + du$</p> <p>$du < 0$</p> |
| | Дозвуковой поток $M < 1$ | Поток ускоряется  <p>$u \rightarrow$ $u + du$</p> <p>$du > 0$</p> |

В следующем разделе показано, как эти свойства потоков газа можно использовать для получения сверхзвукового движения газа.

15.7. Истечение газа из резервуара через насадок

Рассмотрим истечение газа из резервуара, газ имеет температуру T_0 , давление p_0 и плотность ρ_0 (рис. 15.6). Размеры резервуара достаточно велики, так что скорость газа в нем можно считать равной нулю,

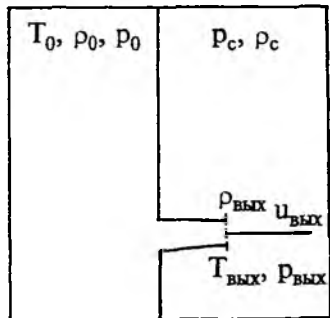


Рис. 15.6. Запирание насадка при сверхзвуковом обтекании

поэтому T_0 , p_0 и ρ_0 — параметры торможения. Пусть насадок является конфузуром с площадью выходного сечения $\omega_{\text{вых}}$, а истечение газа происходит в камеру, где поддерживается постоянное давление p_c , которое называется *противодавлением*, и где плотность газа равна ρ_c . Температуру, давление и плотность газа в выходном сечении обозначим $T_{\text{вых}}, p_{\text{вых}}, \rho_{\text{вых}}$, соответственно.

Пока скорость газа в выходном сечении $u_{\text{вых}}$ меньше скорости звука a в этом сечении ($M < 1$), возмущение может распространяться вверх по течению, и если, например, $p_{\text{вых}} > p_c$, то “известие” об этом (т.е. о том, что нарушен баланс энергии и не выполняются условия, описываемые уравнением Бернулли) достигает резервуара. В результате скорость газа возрастает до значения, при котором в соответствии с уравнением Бернулли (15.30а) $p_{\text{вых}} = p_c$, $\rho_{\text{вых}} = \rho_c$, т.е. до значения:

$$u_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_c}{\rho_c} \right)}. \quad (15.38)$$

Таким образом, уменьшая противодавление p_c при фиксированном p_0 , можно увеличивать скорость газа, на первый взгляд, до значе-

ния $u = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}}$. В действительности, когда при некотором противодавлении p_c^* выходная скорость $u_{\text{вых}}$ достигает скорости звука a ($M = 1$), при дальнейшем понижении противодавления p_c известие о несоответствии между p_c и $p_{\text{вых}} = p_c^*$ не может достигнуть резервуара, так как оно распространяется со скоростью звука $a < u$ и “сносится” потоком вниз по течению. В результате резервуар с насадком оказывается как бы изолированным от камеры, а процесс истечения определяется лишь условиями в резервуаре (параметрами торможения) и равенством выходной скорости и скорости звука в выходном сечении. Это явление называют “запиранием” потока в насадке.

Для того, чтобы установить закономерность изменения скорости газа на выходе из насадка, рассмотрим зависимость массового расхода Q_M от давления в выходном сечении насадка $p_{\text{вых}}$:

$$Q_M = \rho_{\text{вых}} u_{\text{вых}} \omega_{\text{вых}},$$

$$Q_M = \rho_{\text{вых}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}} \right)} \omega_{\text{вых}}. \quad (15.39)$$

Считаем, что течение газа адиабатическое; тогда, используя адиабату Пуассона

$$\frac{p_0}{\rho_0^k} = \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}^k} = c^k, \quad (15.40)$$

где c — постоянная, исключаем из (15.39) плотность газа $\rho = p^{\frac{1}{k}}/c$ и получаем

$$Q_M = \frac{1}{c} p_{\text{вых}}^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(c p_0^{\frac{k-1}{k}} - c p_{\text{вых}}^{\frac{k-1}{k}} \right)} \omega_{\text{вых}}. \quad (15.41)$$

Из выражения (15.41) следует, что $Q_M = 0$ при $p_{\text{вых}} = 0$ и при $p_{\text{вых}} = p_0$ (в первом случае массовый расход равен нулю из-за того, что вследствие (15.40) при $p_{\text{вых}} = 0$ плотность газа $\rho_{\text{вых}} = 0$, а во втором случае скорость газа равна нулю, так как давление в резервуаре, из которого газ вытекает, и давление в камере, куда он втекает, равны между собой. Очевидно, массовый расход на интервале $(0, p_0)$ должен иметь хотя бы один максимум. Продифференцировав выражение (15.41) по $p_{\text{вых}}$ и приравняв $\partial Q/\partial p_{\text{вых}}$ нулю, найдем, что Q_M имеет один максимум при

$$p_{\text{вых}}^{\text{max}} = p_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (15.42)$$

Для значения $k = 1,4$ найдем

$$p_{\text{вых}}^{\text{max}} \cong 0,528 p_0. \quad (15.43)$$

Подставив (15.42) в (15.41), найдем максимальный расход из насадка:

$$Q_M^{\text{max}} = \sqrt{p_0 \rho_0} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \omega_{\text{вых}}.$$

Как показывают эксперименты, зависимость Q_M от $p_{\text{вых}}$ в виде (15.41) хорошо аппроксимирует опытные точки для значений $p_{\text{вых}}$, лежащих в интервале $(p_{\text{вых}}^{\text{max}}, p_0)$. Для того, чтобы выяснить, каким будет истечение при значении $p_{\text{вых}}$ в интервале $(0, p_{\text{вых}}^{\text{max}})$, вычислим скорость истечения $u_{\text{вых}}$, соответствующую Q_M^{max} и $p_{\text{вых}}^{\text{max}}$ согласно (15.42):

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}^{\text{max}} &= \frac{Q_M^{\text{max}}}{\rho_{\text{вых}} \omega_{\text{вых}}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(c p_0^{\frac{k-1}{k}} - c p_{\text{вых}}^{\frac{k-1}{k}} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(c p_0^{\frac{k-1}{k}} - c p_0^{\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{2k}{k+1} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} c p_0^{\frac{k-1}{k}} \left(1 - \frac{2k}{k+1} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{k-1}{k+1}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{2k}{k+1}} = \sqrt{RT_0 \frac{2k}{k+1}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} = a^*. \end{aligned}$$

Таким образом, при максимальном расходе Q_M^{\max} скорость газа $u_{\text{вых}}$ в выходном сечении становится равной скорости звука a в нем. Следовательно, при противодавлении $p_0 = p_{\text{вых}}^{\max}$ в выходном сечении происходит описанное выше явление запираания потока, и при дальнейшем уменьшении p_0 влияние противодавления исключается, а массовый расход Q_M при значении p_c в интервале $(0, p_{\text{вых}}^{\max})$ остается постоянным и равным Q_M^{\max} . На рис. 15.7 нормированная по максимальным значениям зависимость $Q_M = Q_M(p_{\text{вых}})$ показана сплошной линией; штриховой линией показана нереализуемая часть этой зависимости на интервале $(0, p_{\text{вых}}^{\max})$ согласно формуле (15.39).

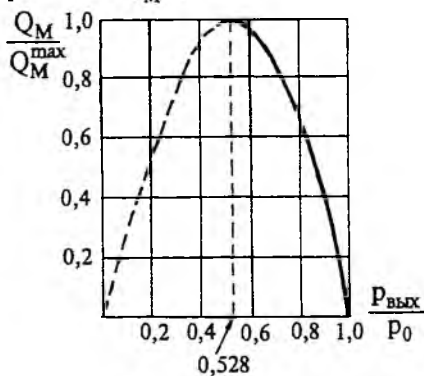


Рис. 15.7. Зависимость $Q_M / Q_M^{\max} = f(p_{\text{вых}}/p_0)$

приняв во внимание, что сверхзвуковые потоки в диффузорных каналах ускоряются, можно предложить способ получения сверхзвукового потока при истечении из резервуара. Он заключается в том, что к выходному сечению конфузорного насадка в котором $M = 1$,

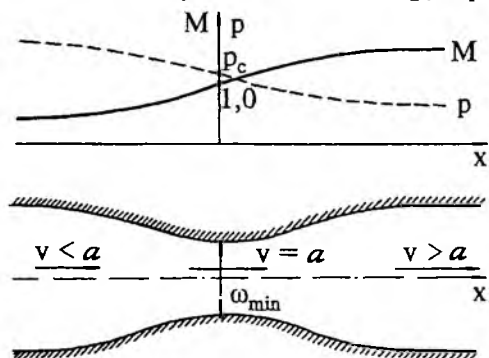


Рис. 15.8. Сопло Лавая. Распределение скорости и давления вдоль потока

т.е. поток не дозвуковой и не сверхзвуковой, присоединяют диффузорный насадок (рис. 15.8). Этот насадок при заданном давлении p_c сразу за местом присоединения рассчитывают так, чтобы поток имел возможность превзойти скорость звука и, став сверхзвуковым, ускориться. В результате в выходном сечении диффузора скорость газа u может быть существенно больше скорости звука в этом сечении.

Степень увеличения площади сечения диффузора вдоль его оси задается в зависимости от значения противодавления, при этом следует исключить возможность отрыва потока от стенок насадка и образования застойных областей. Такого рода диффузорные насадки называются соплами Лавая по имени шведского инженера, впервые их рассчитавшего и использовавшего. Следует отметить, что сопло Лавая рассчитывается для заданных значений давления торможения p_0 ; при отклонении этих величин от расчетных сопло может не обеспечивать образования сверхзвукового потока.