

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

18.1. Пристеночный турбулентный поток

Рассмотрим на примере плоской задачи о продольно-однородном установившемся турбулентном течении вдоль плоской стенки основные особенности полуэмпирических теорий турбулентности. С помощью уравнений Рейнольдса найдем поле осредненной скорости турбулентного потока, т.е. в условиях рассматриваемого нами потока будем искать зависимость $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_3)$ (рис. 18.1), предполагая, что

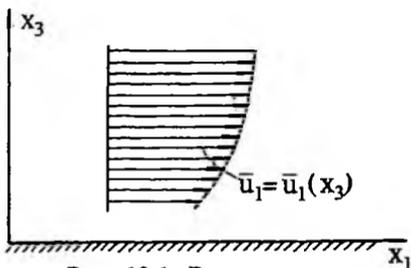


Рис. 18.1. Распределение продольной осредненной скорости вблизи плоской поверхности

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_2 = 0. \tag{18.1}$$

Для упрощения задачи считаем, что сила тяжести отсутствует, а изменение осредненного давления вдоль потока пренебрежимо мало вследствие продольной безграничности потока:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = 0. \tag{18.2}$$

Запишем первое из уравнений Рейнольдса (17.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} = \bar{f}_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \left[\eta \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\rho u_1'^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\rho u_1' u_2'} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{\rho u_1' u_3'} \right] \end{aligned} \tag{18.3}$$

Все производные по t , x_1 и x_2 равны нулю. Из (18.3) учитывая также (18.1) и (18.2), получим

$$0 = \eta \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{\rho u_1' u_3'}. \tag{18.4}$$

Два других уравнения (17.19) и уравнение неразрывности для осредненного движения (17.18) обращаются при сделанных предположениях в тождества. Таким образом, уравнение (18.4) — единственное уравнение для определения зависимости $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_3)$. Оно содержит две неизвестные функции \bar{u}_1 и $\overline{u_1' u_3'}$; для вычисления \bar{u}_1 необходимо ввести дополнительную связь между этими функциями, чтобы с ее помощью исключить функцию $\overline{u_1' u_3'}$, которая нас пока не интересует.

Первое предложение о замыкании уравнения (18.4) было сделано Буссинеском. Используя аналогию между турбулентным движением жидкости и тепловым движением молекул газа, он принял, что турбулентные касательные напряжения $\overline{p'_{31}} = -\rho \overline{u_1' u_3'}$ пропорциональны градиенту осредненной скорости:

$$-\overline{\rho u'_1 u'_3} = \eta^T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}, \quad (18.5)$$

где η^T — коэффициент турбулентной вязкости.

Используя (18.5), уравнение (18.4) можно привести к виду

$$(\eta + \eta^T) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} = \text{const}. \quad (18.6)$$

Собственно зависимость (18.5) не вносит принципиально новых связей между неизвестными функциями, так как нам априори ничего неизвестно о величине η^T и, введя зависимость (18.5), одну неизвестную величину $\overline{u'_1 u'_3}$ в уравнении (18.4) подменили другой неизвестной η^T в уравнении (18.6). Если попытаться решить уравнение (18.6), считая, что $\eta^T = \text{const}$, то получится линейное распределение осредненной скорости, которое, будучи верным при ламинарном движении, не подтверждается экспериментально для турбулентных потоков.

Прежде чем обратиться к последующим предложениям о замыкании уравнений Рейнольдса, отметим, что, как показывают эксперименты, уже на очень небольших расстояниях от стенки (измеряемых обычными долями миллиметра)

$$|\overline{\rho u'_1 u'_3}| \gg \eta \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}, \quad (18.7)$$

или, что то же,

$$\eta^T \gg \eta. \quad (18.8)$$

Используя это, уравнение (18.4) можно упростить и, проинтегрировав его, получить

$$-\overline{\rho u'_1 u'_3} = \text{const} = \tau_0, \quad (18.9)$$

где τ_0 — касательное напряжение на стенке.

Эта характеристика, а также плотность и вязкость жидкости определяют все особенности рассматриваемого нами турбулентного потока.

Существенное предложение, позволившее решить с помощью уравнений Рейнольдса вопрос об определении зависимости $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_3)$, было сделано Прандтлем. Приведем основные положения этого предложения. Во-первых, используя понятие *пути перемешивания*, он на основе рассуждений, аналогичных приведенным выше (см. разд. 17.4), определил порядок величины продольной пульсационной скорости:

$$u'_1 \sim \ell \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}. \quad (18.10)$$

Во-вторых, он принял, что значения продольной и поперечной пульсационных скоростей имеют один и тот же порядок:

$$u'_1 \sim u'_3. \quad (18.11)$$

Используя эти предположения, получим

$$P_{31}^T = -\rho \overline{u'_1 u'_3} = -\rho \ell^2 \overline{\left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right)^2}. \quad (18.12)$$

Далее он для длины пути перемешивания принял

$$\ell = \kappa x_3, \quad (18.13)$$

где κ — универсальная (безразмерная) постоянная, которую следует определить экспериментально.

Подставляя в (18.9) последовательно (18.12) и (18.13), получим

$$\tau_0 = -\rho \kappa^2 x_3^2 \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right)^2. \quad (18.14)$$

Введем *динамическую скорость*

$$u_*^2 \equiv \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (18.15)$$

Отметим, что u_* не следует придавать значения какой-либо реальной скорости в какой-либо точке пространства. Это просто удобное обозначение, используя которое перепишем (18.14) в виде

$$\frac{dx_3}{x_3} = \frac{\kappa}{u_*} d\bar{u}_1 \quad (18.16)$$

и получим окончательно

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{x_3}{x_0}, \quad (18.17)$$

где x_0 — постоянная интегрирования.

Зависимость (18.17) представляет собой экспериментально прекрасно подтверждаемое *логарифмическое распределение осредненной скорости* в плоском продольно-однородном пристеночном турбулентном потоке.

Наименее физически понятной представляется гипотеза (18.13). Более естественным, казалось бы, величину ℓ считать функцией от локальных характеристик поля осредненной скорости, таких, как, например, кривизна эпюры осредненной скорости. Имея это в виду, Карман предложил гипотезу о “локальном кинематическом подобии поля турбулентных пульсаций скорости”, согласно которой длина пути перемешивания прямо пропорциональна градиенту скорости и обратно пропорциональна кривизне эпюры скорости:

$$\ell = \kappa_K \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \left(\frac{d^2\bar{u}_1}{dx_3^2} \right)^{-1}, \quad (18.18)$$

где κ_K — универсальная постоянная.

Используя зависимость (18.18) вместо (18.13), можно получить такой же логарифмический закон осредненной скорости, причем оказывается $\kappa_K = \kappa$. Эксперименты подтвердили, что эта величина является универсальной постоянной, она получила название *постоянной Кармана*. В настоящее время принято считать, что

$$\kappa = 0,4, \quad (18.19)$$

не указывая следующей значащей цифры.

Согласно современным представлениям принято получать тот же результат, т.е. логарифмический закон распределения скорости, исходя

из уравнения (18.18), не применяя понятия *пути перемешивания*, а используя анализ размерности (см. гл. 20). Как известно, наиболее важный этап при использовании анализа размерностей — установление набора величин, от которых зависит искомая величина, например, в нашем случае это турбулентное касательное напряжение. Это делается на основе интуитивных представлений, гипотез и т.п. Примем, что p_{31}^T зависит от плотности ρ и не зависит от вязкости η ; как уже отмечалось, при определении осредненной скорости в турбулентном потоке влиянием вязкости пренебрегают. Кроме того, так как p_{31}^T зависит от поперечного переноса импульса, связанного с переносом массы и неоднородностью поля осредненной скорости, следует считать, что p_{31}^T зависит не от осредненной скорости \bar{u}_1 , а от того, как изменяется осредненная скорость поперек потока, т.е. от производных $\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}$, $\frac{d^2\bar{u}_1}{dx_3^2}$ и т.д.

Если ограничиться двумя производными, то получим

$$p_{31}^T = f\left(\rho, \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}, \frac{d^2\bar{u}_1}{dx_3^2}\right). \quad (18.20)$$

В рамках подхода, основанного на теории размерности, приходим к представлениям, соответствующим гипотезе Кармана о локальном кинематическом подобии поля гидродинамических характеристик. Используя анализ размерностей, из (18.20) получим

$$p_{31}^T = K_K \rho \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^4 \left(\frac{d^2\bar{u}_1}{dx_3^2}\right)^{-2}, \quad (18.21)$$

где K_K — безразмерная постоянная.

Решая дифференциальное уравнение (18.21), найдем

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\sqrt{K_K}} \ln \frac{x_3}{x_0}. \quad (18.22)$$

Сравнивая (18.22) и (18.17), найдем, что $K_K = \kappa^2 = 0,16$.

Если провести рассуждение согласно подходу Прандтля, то надо положить, что p_{31}^T зависит от плотности ρ , производной от скорости $d\bar{u}_1/dx_3$ и от расстояния до твердой стенки x_3 :

$$p_{31}^T = f\left(\rho, \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}, x_3\right). \quad (18.23)$$

Используя анализ размерностей, из (18.23) получим

$$p_{31}^T = K_\Pi \rho x_3^2 \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^2, \quad (18.24)$$

где K_Π — безразмерная постоянная.

Решая уравнение (18.24), найдем

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\sqrt{K_\Pi}} \ln \frac{x_3}{x_0}, \quad (18.25)$$

где $K_\Pi = K_K = 0,16$.

Для определения постоянной интегрирования в логарифмическом законе x_0 в простейших случаях также можно воспользоваться анализом размерностей. Так, если стенка гладкая, то

$$x_0 = f(\rho, \eta, u_*), \quad (18.26)$$

так как вблизи стенки влиянием вязкости пренебречь нельзя. В этом случае имеем

$$x_0 = \beta \frac{\eta}{\rho u_*} = \beta \frac{\nu}{u_*}, \quad (18.27)$$

где $\beta = 0,09$ — универсальная постоянная, определенная экспериментально.

Если стенка шероховатая и шероховатость характеризуется только одним параметром — высотой выступов Δ , то

$$x_0 = f(\rho, \eta, u_*, \Delta).$$

Анализ размерностей при этом позволяет определить

$$x_0 = \Delta \cdot F(\text{Re}_*), \quad (18.28)$$

где $\text{Re}_* = \frac{u_* \Delta}{\nu}$ — безразмерный комплекс, а F — неизвестная функция, определяемая не с помощью анализа размерностей, а с помощью других методов (например, экспериментально).

Как показали эксперименты Прандтля, при больших значениях Re_* (отвечающих развитой шероховатости)

$$F(\text{Re}_*) = \frac{1}{30}. \quad (18.29)$$

Выше был рассмотрен полуэмпирический метод замыкания уравнений Рейнольдса на примере пристеночных потоков. Аналогичные приемы используются и при решении других задач (см., например, задачи о распределении скорости в струях разд. 18.4).

18.2. Структура турбулентного потока в гладкой трубе

В предыдущем разделе было получено распределение осредненной продольной скорости в той области турбулентного потока вблизи стенки, где можно пренебречь влиянием вязких напряжений, обусловленных градиентом осредненной скорости, в отличие от турбулентных касательных напряжений. Кроме того, в этой области поле скорости формируется под непосредственным влиянием стенки. Используя полученные результаты, рассмотрим, каково распределение осредненной скорости в других областях турбулентного потока в гладкой трубе, где указанные выше упрощающие ограничения не существуют.

Будем рассматривать установившееся равномерное турбулентное движение в широкой прямоугольной трубе. Вблизи продольной плоскости, перпендикулярной широкой стороне поперечного сечения (с этой плоскостью мы совместим координатную плоскость $x_1 O x_3$, направив ось x_1 вдоль течения), все осредненные гидромеханические характеристики потока практически не будут зависеть от координаты x_2 , что позволяет считать, что поток вблизи плоскости $x_1 O x_3$ плоский.

Приведем теоретические и экспериментальные данные о поле осредненной скорости и о других гидромеханических характеристиках в различных точках поперечного сечения потока. Для этого выделим в потоке четыре области (рис. 18.2, в).

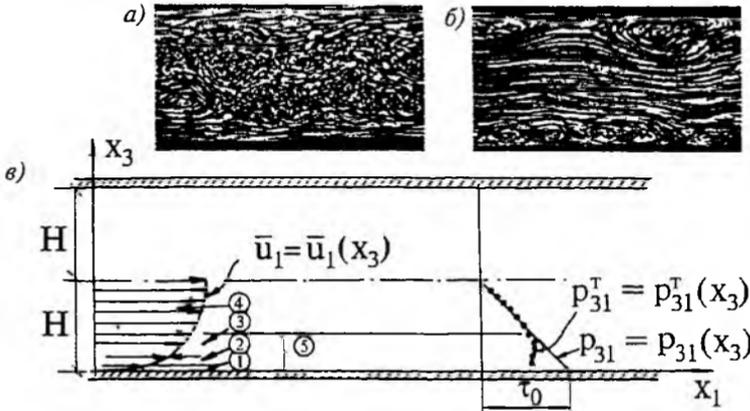


Рис. 18.2. Структура турбулентного потока в гладкой трубе: а — фотография сделана камерой, движущейся со скоростью средней части потока; б — то же со скоростью пристеночной части потока; в — четырехслойная модель:

- 1 — вязкий подслой; 2 — промежуточный слой; 3 — логарифмический слой; 4 — внутренний слой; 5 — пристеночный слой

1. *Вязкий подслой* прилегает непосредственно к стенке и характеризуется тем, что в нем существенную роль играют силы вязкости. Толщину его $\delta_{\text{вп}}$ определяют, исходя из условия, что турбулентные касательные напряжения в нем пренебрежимо малы по сравнению с вязкими напряжениями:

$$\left| \overline{\rho u_1' u_3'} \right| < 0,1 \left| \eta \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right|. \quad (18.30)$$

При этом, как показывают эксперименты,

$$\delta_{\text{вп}} \cong 5 \frac{\nu}{u_*}, \quad (18.31)$$

т.е. в реальных потоках воды в трубах эта величина измеряется долями миллиметра.

Касательное напряжение в вязком подслое можно считать постоянным и равным напряжению на стенке τ_0 . Исходя из этого, распределение осредненной скорости найдем теоретически. Интегрируя дифференциальное уравнение, полученное для условий вязкого подслоя (18.30) из (18.4):

$$\eta \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} = \tau_0, \quad (18.32)$$

получим

$$\bar{u}_1 = u_*^2 \frac{x_3}{\nu}. \quad (18.33)$$

Поперечные пульсационные скорости в вязком подслое весьма малы (практически равны нулю), а продольные значительны. Эксперименты показывают, что

$$\sqrt{\overline{u_1'^2}} \cong 0,3u_*^2 \frac{x_3}{\nu} = 0,3\bar{u}_1. \quad (18.34)$$

Таким образом, интенсивность турбулентности, которая обычно оценивается отношением стандарта пульсационной скорости $\sqrt{u_1'^2}$ к осредненной скорости в этой же точке пространства, в вязком подслое составляет приблизительно 0,3 и оказывается значительно выше, чем в других областях потока. Имея это в виду, следует отметить, что используемый иногда в литературе термин “ламинарный подслой” для обозначения вязкого подслоя неудачен.

2. *Промежуточный подслой* характеризуется тем, что здесь вязкие и турбулентные касательные напряжения имеют один и тот же порядок величин. Это имеет место, когда

$$5 \frac{v}{u_*} < x_3 < 30 \frac{v}{u_*}, \quad (18.35)$$

причем верхняя граница находится из условия

$$\left| \eta \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right| < (0,1 - 0,2) \left| \overline{\rho u_1' u_3'} \right|. \quad (18.36)$$

Теоретический анализ уравнений Рейнольдса в этой области сложен. Распределение осредненной скорости описывается обычно эмпирическими зависимостями, например, Карманом была предложена аппроксимация экспериментальных данных зависимостью

$$\bar{u}_1 = 5u_* \ln \frac{x_3 u_*}{v} - 3,05u_*. \quad (18.37)$$

Турбулентные касательные напряжения возрастают в этой области с увеличением x_3 практически от нуля до $0,8\rho u_*^2$, а стандарт поперечной пульсационной скорости $\sqrt{u_3'^2}$ — от 0 до значения, близкого к u_* . Стандарт продольной пульсационной скорости изменяется в пределах этого слоя от $1,5u_*$ до $2,5u_*$.

3. *Логарифмический слой* характеризуется, во-первых, тем, что

$$\left| \overline{\rho u_1' u_3'} \right| \gg \left| \eta \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right|, \quad (18.38)$$

а во-вторых, тем, что вся структура турбулентного потока формируется непосредственно под влиянием *ближайшей* твердой стенки (влияние противоположающей стенки пренебрежимо мало). Благодаря этому, например, следуя Прандтлю, можно считать, что длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию до стенки (см. разд. 18.1). Осредненная скорость распределена согласно зависимости

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{x_3}{x_0}. \quad (18.39)$$

Турбулентные касательные напряжения в этой области практически постоянны:

$$\left| \overline{\rho u_1' u_3'} \right| \approx (0,8 - 0,9)\tau_0. \quad (18.40)$$

Характерные значения пульсационных скоростей уменьшаются с удалением от стенки, причем значения стандартов поперечной и продольной пульсационных скоростей с удалением от стенки сближаются, т.е. поле пульсационных скоростей становится к середине потока близким к *изотропному*.

Если ввести согласно предложению Буссинеска коэффициент турбулентной вязкости

$$p_{31}^T = -\overline{\rho u_1' u_3'} = \eta^T \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}, \quad (18.41)$$

то, учитывая (18.40) и (18.41), найдем

$$\eta^T \cong \rho k u_* x_3. \quad (18.42)$$

Как показывают эксперименты, логарифмический закон распределения скорости с очень большой точностью выполняется при $x_3 < (0,25 - 0,40)H$, причем меньшим значениям коэффициента при H отвечают большие числа Рейнольдса. Примерно до этих же значений x_3 имеет место возрастание η^T . В средней части потока (при $0,4H < x_3 < 1,6H$) значение η^T можно считать постоянным.

Перечисленные три области (вязкий подслой, промежуточный слой, логарифмический слой) образуют так называемый пристеночный турбулентный слой, который имеет место не только при течении в трубе, но и в пограничных слоях, образующихся у твердых поверхностей.

4. *Внутренний слой* характеризуется свободной турбулентностью, непосредственное влияние каждой из стенок канала здесь несущественно, и можно считать, что $\eta^T = \text{const}$. Это позволяет проинтегрировать уравнение Рейнольдса и получить параболическое распределение осредненной скорости. Однако чаще всего считают, что с достаточной точностью осредненную скорость можно найти и с помощью логарифмической зависимости (18.39), экстраполируя ее до плоскости симметрии потока.

Турбулентные касательные напряжения здесь практически равны полным касательным напряжениям, действующим в осредненном потоке, которые изменяются по линейному закону (см. рис. 18.2, в)

$$p_{31}^T = p_{31} = \tau_0 \left(1 - \frac{x_3}{H}\right). \quad (18.43)$$

Значения стандартов пульсационных скоростей отличаются друг от друга ненамного и близки к значению динамической скорости.

Область потока, состоящую из логарифмического и внутреннего слоев, называют *турбулентным ядром* потока.

Отметим, что пристеночный турбулентный слой, имеющий такую же структуру, как и описанная выше, существует и в турбулентном пограничном слое, образующемся, например, при обтекании невозмущенным (обычно потенциальным) потоком плоской пластины. Учитывая это сходство, здесь уместно указать на разницу между турбулентным пограничным слоем и турбулентным потоком в трубе (рис. 18.3).

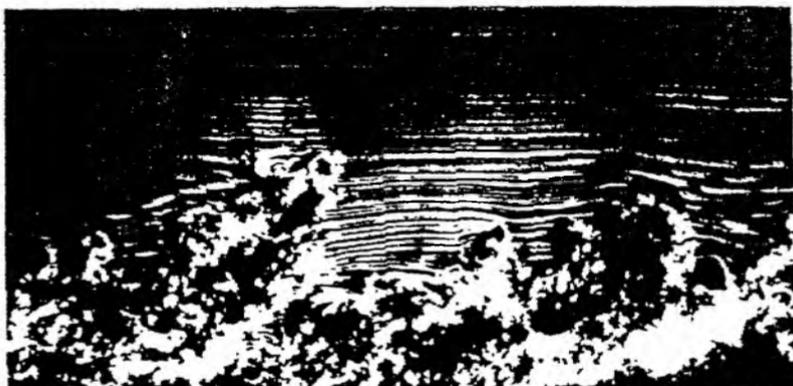
Во-первых, пограничный слой предполагает существование невозмущенной области движения жидкости; он является областью между твердой поверхностью (например, пластиной) и невозмущенным потоком (на который, как предполагается, не действует твердая граница).

Во-вторых, пограничный слой "развивается" вдоль потока, и при этом толщина его увеличивается. Напомним, что обычно толщиной пограничного слоя δ_{1nc} на пластине называют расстояние от твердой поверхности, на котором продольная осредненная скорость в погранич-

ном слое практически неотличима от скорости невозмущенного набегающего потока V_∞ . Это расстояние находят по условию $\bar{u}_1(\delta_{\text{пс}}) = 0,99V_\infty$.

Если двигаться от твердой границы, то за пристеночным слоем следует *внешний слой*, который так же, как рассмотренный выше внутренний слой в трубе, характеризуется свободной турбулентностью. Однако во внешнем слое пограничного слоя имеет место *перемежающаяся* турбу-

а)



б)

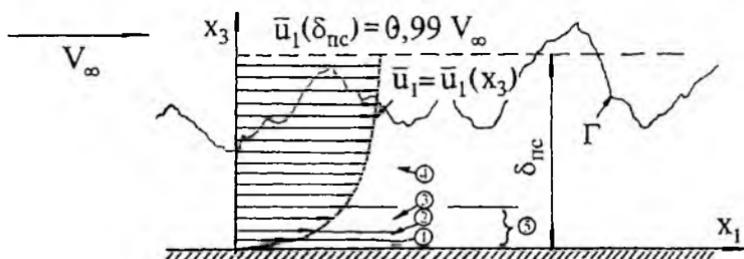


Рис. 18.3. Турбулентный пограничный слой на пластине:
 а — фотография визуализированного потока; б — структура потока: 1 — вязкий подслой; 2 — промежуточный слой; 3 — логарифмический слой; 4 — внешний слой; 5 — пристеночный слой; Г — граница области с турбулентным движением

лентность. Область с невозмущенной жидкостью можно обнаружить на расстоянии $x_3 = 0,35\delta_{\text{пс}}$, а область с турбулентным режимом течения иногда оказывается на расстоянии от стенки, превышающем толщину пограничного слоя (до $x_3 = 1,2\delta_{\text{пс}}$). Граница между областью с турбулентным движением и областью невозмущенного движения нестационарна, имеет сложное очертание.

Выше была описана структура турбулентного потока вблизи *гладкой поверхности*. При наличии *шероховатости* практически не имеет смысла рассматривать в приближении плоской задачи течение в вязком подслое и в промежуточном слое, так как эти слои очень тонкие и даже небольшие неровности твердой поверхности существенно искажают всю картину течения. В то же время на достаточном удалении от стенки (в несколько раз превышающем высоту выступов шероховатости), т.е. в логарифмическом и внутреннем слоях, основные закономерности в распределении скорости и других осредненных характеристик турбулент-

ного потока в гладких и шероховатых трубах достаточно хорошо совпадают.

В заключение отметим, что если известна или легко измерима осредненная скорость u_0 на фиксированном расстоянии от стенки (например, скорость в плоскости симметрии или на оси потока), можно исключить постоянную интегрирования x_0 и использовать в качестве постоянной указанную скорость.

Пусть при $x_3 = H$ скорость $\bar{u}_1 = u_0$ (см. рис. 18.2). Будем считать, что можно экстраполировать логарифмическую зависимость

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{x_3}{x_0}$$

и вычислить по ней скорость вплоть до плоскости симметрии, при этом

$$u_0 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{H}{x_0}. \quad (18.44)$$

Вычитая из (18.44) выражение (18.39), получим

$$u_0 - \bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{H}{x_3}. \quad (18.45)$$

Величину $u_0 - \bar{u}_1$ называют дефектом или дефицитом скорости, а зависимость (18.45) — соответственно, формулой для распределения дефекта скорости. Такое описание поля осредненной скорости широко используется при изучении турбулентных пограничных слоев, когда в качестве известной скорости вводится скорость невозмущенного набегающего потока V_∞ .

18.3. Потери напора по длине в круглой трубе

В этом разделе покажем, как полученное ранее поле осредненной продольной скорости можно использовать для вычисления потерь напора в турбулентном потоке.

Как известно, потеря напора по длине в круглоцилиндрической трубе вычисляется по формуле (5.85) Вейсбаха—Дарси (см. разд. 5.11)

$$h_r = \lambda \frac{\ell}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Подставив гидравлический уклон $J_e = h_r / \ell$ из (5.85) в основное уравнение равномерного движения (5.71)

$$\frac{\tau_0}{\gamma} = RJ_e,$$

получим

$$\tau_0 = \lambda \rho \frac{v^2}{8}, \quad (18.46)$$

или, вводя динамическую скорость $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, найдем

$$\frac{u_*}{v} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}. \quad (18.47)$$

Эта зависимость позволяет оценить величину динамической скорости; так как для большинства потоков в трубах величина

λ не сильно отличается от значения 0,03, то можно считать, что

$$u_* = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{20} \right) v.$$

Заметим, что в инженерно-строительной гидравлике для определения потерь напора часто используется формула Шези

$$v = C\sqrt{RJ}, \quad (18.48)$$

где C — коэффициент Шези. Если извлечь квадратные корни из левой и правой частей уравнения (5.71), а затем разделить полученное равенство почленно на равенство (18.48), то получим еще одну оценку для динамической скорости:

$$\frac{u_*}{v} = \frac{\sqrt{g}}{C}. \quad (18.49)$$

Сравнивая (18.47) с (18.49), получим равенство

$$\frac{g}{C^2} = \frac{\lambda}{8}. \quad (18.50)$$

Проделав эти предварительные вычисления, перейдем к главной задаче — к определению зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$. Она может быть найдена на основании эксперимента; в частности, известные опыты Никурядзе позволили установить ее графически, а также получить достаточно точные аппроксимационные формулы.

Нашей задачей будет установление зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ на основе распределения осредненной скорости в поперечном сечении потока, полученного с помощью полуэмпирической теории турбулентности.

Рассмотрим вначале гладкую трубу, для которой по определению $\lambda = \lambda(\text{Re}_D)$. Хотя логарифмическая зависимость была получена при решении плоской задачи, эксперименты показали, что в пристеночной области круглой трубы осредненная скорость также распределена по зависимости

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{x_3 u_*}{\beta v}, \quad (18.51)$$

где x_3 — расстояние до стенки по радиусу. Более того, эта же зависимость дает хорошее соответствие с экспериментальными значениями осредненной скорости вплоть до оси трубы, т.е. когда $x_3 = D/2$. Поскольку по определению средняя скорость потока

$$v = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \bar{u}_1 d\omega, \quad (18.52)$$

где ω — площадь поперечного сечения, то непосредственно подставив \bar{u}_1 из (18.51) в (18.52) и проведя вычисление интеграла, найдем

$$v = u_0 - 3,75u_*, \quad (18.53)$$

где u_0 — скорость на оси трубы.

Заметим, что при вычислении интеграла исключалась область интегрирования вблизи стенки, где зависимость (18.51) дает отрицательные значения скорости; погрешность, вносимая при этом в расчеты, пренебрежимо мала.

Поскольку

$$u_0 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{Du_*}{2\beta v} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\text{Re}_D \frac{u_*}{v} \cdot \frac{1}{2\beta} \right), \quad (18.54)$$

то можно переписать (18.53) в виде

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} + 3,75 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\text{Re}_D \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \frac{1}{2\beta} \right)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = C_1 \ln (\text{Re}_D \sqrt{\lambda}) + C_2, \quad (18.55)$$

где $C_1 = 2,0$, $C_2 = -0,8$ — универсальные постоянные, определенные из эксперимента.

Неявная полуэмпирическая зависимость λ от числа Re_D не очень удобна для практических расчетов. Преимущество в этом отношении имеет полученная Никурадзе экспериментальная зависимость

$$\lambda = 0,0032 + 0,221 \text{Re}_D^{-0,237}, \quad (18.56)$$

являющаяся практически точной при $\text{Re}_D < 10^6$. Хорошее соответствие с экспериментом при $\text{Re}_D < 10^5$ дает и более простая формула Блазиуса:

$$\lambda = (100 \text{Re}_D)^{-0,25} = 0,3164 \text{Re}_D^{-0,25}. \quad (18.57)$$

Переходя к рассмотрению шероховатых труб, будем иметь в виду зернистую шероховатость, т.е. имеющую вид зерен примерно одинаковой высоты, не превышающей 7% от диаметра. Кроме того, как уже отмечалось, единственной характеристикой такой шероховатости будем считать высоту выступов (полагая, что ни форма зерен, ни их расположение не влияют на последующие рассуждения). Опыты с такого рода шероховатыми трубами показали, что при малых числах Re_D они не отличаются от гладких. При этом $\lambda = \lambda(\text{Re}_D)$, и имеет место так называемый *первый предельный режим*, а область чисел Рейнольдса Re_D при соответствующей шероховатости называют областью *гладких труб* (см. разд. 5.11). При достаточно больших Re_D наступает *второй предельный режим*, при котором $\lambda = \lambda(\Delta_r)$ и потери напора согласно (5.85) пропорциональны квадрату скорости.

Область чисел Рейнольдса, при которых существует второй предельный режим, называется *областью квадратичного сопротивления*. Кроме того, существует промежуточная, так называемая, докватратичная область чисел Re_D , в которой $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$; эта область отделяется от области гладких труб нижними предельными числами Рейнольдса $(\text{Re}_D)'_{\text{пред}}$, а от области квадратичного сопротивления — верхними предельными числами — $(\text{Re}_D)''_{\text{пред}}$.

Исследования зависимости критических чисел Рейнольдса $(\text{Re}_D)'_{\text{кр}}$ и $(\text{Re}_D)''_{\text{кр}}$ (при которых происходит переход из ламинарного режима в турбулентный) и предельных чисел Рейнольдса показали следующее:

- 1) значение $(\text{Re}_D)'_{\text{кр}}$ не зависит от величины шероховатости;
- 2) значение $(\text{Re}_D)''_{\text{кр}}$ уменьшается с увеличением шероховатости;

3) для предельных чисел Рейнольдса существуют оценки

$$(\text{Re}_D)'_{\text{пред}} = \frac{10}{\Delta_r}; \quad (\text{Re}_D)''_{\text{пред}} = \frac{500}{\Delta_r},$$

т.е. эти числа уменьшаются с увеличением шероховатости.

Для определения функции $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ для шероховатых труб Никурадзе представил зависимость (18.51) в виде

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{x_3}{\Delta} + B' \quad (18.58)$$

и исследовал зависимость B' от безразмерного комплекса:

$$\text{Re}_* = \frac{u_* \Delta}{\nu} = \text{Re}_D \Delta_r \sqrt{\frac{\lambda}{8}}. \quad (18.59)$$

Как показали результаты экспериментов (рис. 18.4), начиная со значения $\text{Re}_* \cong 100$, величина B' остается (при дальнейшем увеличении этого комплекса) практически постоянной. Приняв $B' = 8,5$, можно зависимость (18.58) представить в виде

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{30x_3}{\Delta}. \quad (18.60)$$

Если принять эту зависимость для распределения осредненной скорости и проделать те же

вычисления, которые были сделаны для гладких труб, то можно получить

$$\lambda = (1,74 - 2 \lg \Delta_r)^{-2}. \quad (18.61)$$

Эта полуэмпирическая формула дает зависимость $\lambda = \lambda(\Delta_r)$ для второго предельного режима (области квадратичного сопротивления) в явном виде. Несмотря на это, при выполнении практических расчетов чаще используются экспериментальные зависимости еще более простого вида, например $\lambda = 0,11 \Delta_r^{0,25}$.

Отметим в заключение, что в приведенных вычислениях логарифмическая зависимость для распределения продольной осредненной скорости экстраполировалась на все поперечное сечение круглой трубы, хотя, как указывалось, она, строго говоря, пригодна лишь для узкой пристеночной области в условиях плоского потока.

Таким образом, вместо четырехслойной модели потока, описанной в предыдущем разделе, здесь использовалась практически однослойная модель. Несмотря на это, погрешность вычислений оказалась вполне приемлемой, так как приближенно правильная логарифмическая зависимость интегрировалась, а локальная неточность в определении подынтегральной функции несущественно влияет на величину интеграла.

Совершенно иной подход необходим при решении задач о тепло- и массопереносе в турбулентном потоке. Здесь для определения пара-

метров переноса необходимо дифференцировать зависимость скорости от координат, а, как известно, в процессе такой операции погрешность возрастает. Имея это в виду, при решении задач о переносе необходимо более детально и точно описывать распределение скорости и использовать многослойные модели турбулентного потока.

18.4. Полуэмпирические методы решения задач о свободной турбулентности

Понятие *свободная турбулентность* обычно противопоставляется понятию *пристеночная турбулентность*. Наиболее характерным примером свободной турбулентности является турбулентность в струях (в подвижной и неподвижной жидкости), в *следах* за движущимися телами и т.п. В разд. 18.2 уже отмечалось, что на достаточном удалении от стенки, за пределами логарифмического слоя в трубе и в пограничном слое на пластине поток также характеризуется свободной турбулентностью, параметры которой практически не зависят от расстояния до твердой границы.

В этом разделе описаны возможности, которые предоставляются уравнениями Рейнольдса и полуэмпирическими методами их замыкания для решения простейших задач о свободной турбулентности, а также основные приемы решения этих задач. Как и ранее, нас будет интересовать главным образом распределение осредненной скорости. Отметим, что при свободной турбулентности молекулярной вязкостью при расчете поля осредненной скорости можно пренебречь и учитывать только так называемые *молярные* процессы переноса, обусловленные беспорядочным перемещением в турбулентном потоке элементарных жидких объемов — *молей*.

Рассмотрим в качестве примера истечение жидкости с постоянным расходом из круглого отверстия в полупространство, занятое той же жидкостью, находящейся в покое (рис. 18.5).

Полуэмпирические методы замыкания уравнений Рейнольдса оказываются эффективными лишь при решении задачи о распределении осредненной продольной скорости в двух областях.

Область I находится в непосредственной близости к кромке отверстия; здесь можно пренебречь кривизной круглого отверстия и рассматривать течение в этой области как *плоскую затопленную* турбулентную струю.

Область II расположена на значительном удалении от отверстия, когда влияние некоторых особенностей начальных условий (например, распределение скорости на выходе из отверстия) оказывается несущественным. Течение здесь описывается как *осесимметричная затопленная* струя на большом удалении от отверстия.

Неоднородный поток в каждой из указанных областей представляет собой *пограничный слой*. В области I этот слой разделяет невозмущенный однородный поток из отверстия и пространство, занятое покоящейся жидкостью. В области II пограничный слой со всех сторон окружен покоящейся жидкостью.

Для решения поставленной задачи следует получить из уравнений Рейнольдса уравнения турбулентного пограничного слоя, сформулировав предварительно основные допущения, используемые при выводе этих уравнений. Определим скорость в области I.

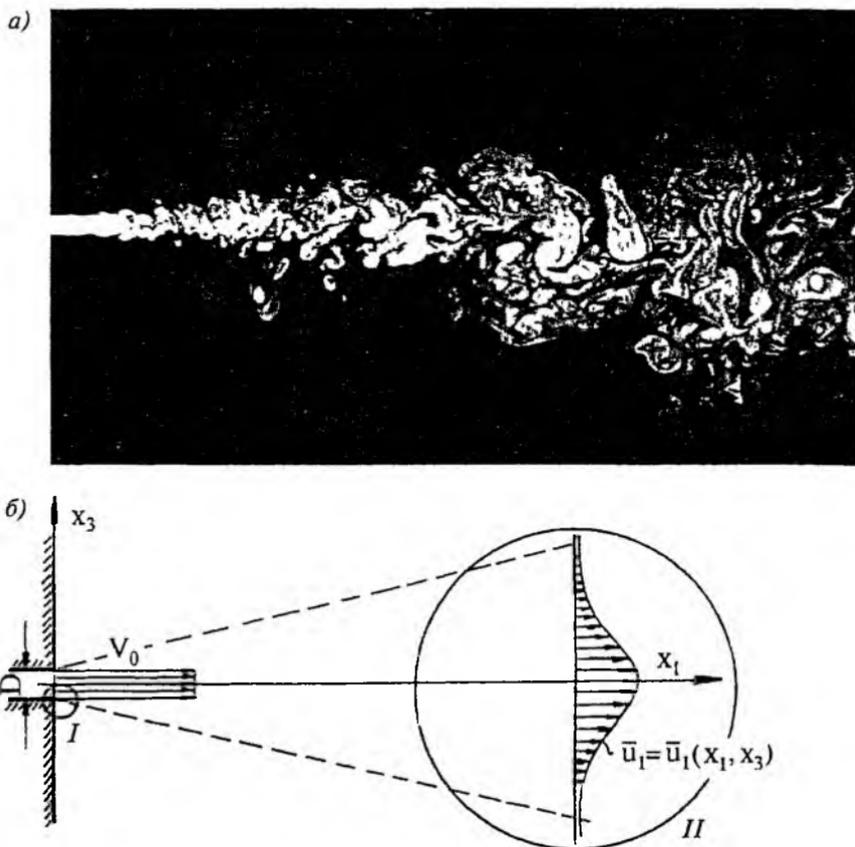


Рис. 18.5. Осесимметричная затопленная струя жидкости: а — фотография визуализированного потока; б — схема осредненного потока

Плоская затопленная струя

С целью определения осредненной скорости $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_1, x_3)$ сформулируем основные допущения, необходимые для упрощения уравнений Рейнольдса

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \overline{\rho u'_i u'_\alpha} \right).$$

1. Поток на выходе из отверстия изотурбулентный, потенциальный, скорость во всех точках выходного сечения постоянна и равна V_0 .

2. Задача плоская, поэтому $\bar{u}_2 = 0$, и все производные по оси x_2 , направленной перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 18.6), тоже равны нулю.

3. Граничные условия стационарны, и осредненное движение в струе установившееся: $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$; $i = 1, 2, 3$.

4. Внешние объемные силы из рассмотрения исключаем:

$$f_i = 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

5. Молекулярную вязкость в расчет не вводим, так как в случае свободной турбулентности

$$\left| \eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right| \ll \left| \overline{\rho u'_i u'_\alpha} \right|, \quad i, \alpha = 1, 2, 3.$$

6. Давление считаем постоянным во всей области: $\bar{p} = \text{const}$.

Следующие три допущения характерны для теории пограничного слоя, в которой обычно принимают, что все характеристики турбулентного потока *быстро* изменяются *поперек потока* и *медленно* — *вдоль потока*.

$$7. \quad \bar{u}_1 \gg \bar{u}_3.$$

$$8. \quad \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right| \gg \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right| = \left| \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right|.$$

$$9. \quad \left| \frac{\partial \overline{\rho u_1'^2}}{\partial x_1} \right| \ll \left| \frac{\partial \overline{\rho u_1' u_3'}}{\partial x_3} \right|.$$

При сделанных допущениях из трех уравнений Рейнольдса (17.19) и уравнения несжимаемости (17.18) получаем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\rho u_1' u_3'}}{\partial x_3}; \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.62)$$

Система (18.62) представляет собой *уравнения турбулентного пограничного слоя*.

Введем функцию тока $\psi(x_1, x_3)$:

$$\bar{u}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}; \quad \bar{u}_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (18.63)$$

и сформулируем начальные и граничные условия:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \begin{cases} V_0 & \text{при } x_3 > 0; \\ 0 & \text{при } x_3 < 0; \end{cases}$$

$$\text{при } x_1 > 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \begin{cases} V_0 & \text{при } x_3 \rightarrow +\infty; \\ 0 & \text{при } x_3 \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Очевидно, что скорость в любой точке рассматриваемой области зависит от физических свойств жидкости (т.е. от ее плотности и вязкости) и от величины скорости V_0 , поэтому (пренебрегая вязкостью при свободной турбулентности) можно считать, что $\psi = \psi(\rho, V_0, x_1, x_3)$.

Анализ размерностей показывает, что

$$\psi = V_0 x_1 f(\xi), \quad (18.64)$$

где $\xi = x_3/x_1$; f — универсальная функция. Дифференцируя (18.64), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = V_0 f'(\xi). \quad (18.65)$$

Используем анализ размерностей для определения связи турбулентных касательных напряжений $-\rho u'_1 u'_3 = p_{31}^T$ с функцией f .

Предположим, что в каждом поперечном сечении пограничного слоя p_{31}^T постоянно, т.е. p_{31}^T не зависит от x_3 . Тогда естественно считать

$$p_{31}^T = f_1 \left(\rho, x_1, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right).$$

Из анализа размерностей следует

$$p_{31}^T = c \rho x_1^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right|^2, \quad (18.66)$$

где c — универсальная постоянная.

Подставляя (18.63)—(18.66) в (18.62), получим

$$f''(cf''' + f) = 0. \quad (18.67)$$

Уравнение (18.67) распадается на два уравнения:

$$f'' = 0; \quad (18.68)$$

$$cf''' + f = 0. \quad (18.69)$$

Очевидно, что решение уравнения (18.68) является линейной функцией, при этом функция тока, удовлетворяющая начальным и предельным условиям, имеет вид

$$\psi = V_0 x_3 \text{ при } x_3 > 0;$$

$$\psi = 0 \text{ при } x_3 < 0.$$

Эта функция описывает распределение скорости вне пограничного слоя (рис. 18.6).

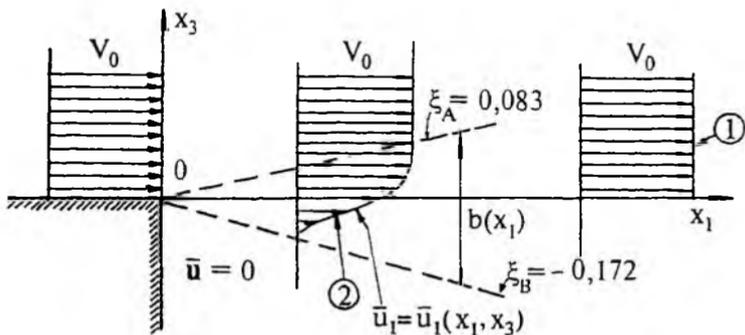


Рис. 18.6. Плоская затопленная струя: 1 — решение уравнения (18.68); 2 — решение уравнения (18.69)

Решение уравнения (18.69) должно позволить найти распределение скорости внутри пограничного слоя, а следовательно, и очертание его границ. Сформулируем условия на этих границах, которые согласно (18.64) должны быть прямыми линиями (в плоскости $x_1 0x_3$). Пусть уравнение верхней границы $x_3 = \xi_A \cdot x_1$, а нижней — $x_3 = \xi_B \cdot x_1$; значения ξ_A и ξ_B следует определить из решения уравнения (18.69). Потребуем, чтобы на границе пограничного слоя функция $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_1, x_3)$ и ее производная были непрерывными.

Из непрерывности функции \bar{u}_1 следует

$$f'(\xi_A) = 1; f'(\xi_B) = 0, \quad (18.70)$$

а из непрерывности ее производной:

$$f''(\xi_A) = 0; f''(\xi_B) = 0. \quad (18.71)$$

Кроме того, так как согласно предельному условию при $x_3 \rightarrow \infty$ следует положить $f(\xi) = \xi$, то на верхней границе из непрерывности функции $f(\xi)$ следует

$$f(\xi_A) = \xi_A. \quad (18.72)$$

Решение дифференциального уравнения (18.69) имеет вид

$$f = C_1 \cdot e^{-\alpha\xi} + e^{\frac{1}{2}\alpha\xi} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha\xi + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha\xi \right), \quad (18.73)$$

где $\alpha = c^{\frac{1}{3}} = 11,8$ — безразмерная постоянная, определяемая экспериментально.

Используя граничные условия (18.70)—(18.72), можно найти $C_1 = -0,0062$; $C_2 = 0,987$; $C_3 = 0,577$; $\xi_A = 0,083$; $\xi_B = -0,172$.

Отсюда определим, в частности, толщину пограничного слоя (зоны смешения)

$$b(x_1) = (\xi_A - \xi_B)x_1 = 0,255x_1. \quad (18.74)$$

Осесимметричная затопленная струя на большом удалении от отверстия

Будем решать задачу в цилиндрических координатах x, φ, r (рис. 18.7). Составляющие скорости по соответствующим направлениям обозначим u, v, w . Примем, что вся картина течения определяется плотностью ρ жидкости, ее вязкостью ν и величинами диаметра отверстия D и начальной скорости V_0 , так как никакие другие факторы на поле скорости влияния не оказывают.

Считаем движение осесимметричным, следовательно,

$$\bar{u} = \bar{u}(x, r); \quad \overline{\rho u'w'} = \overline{\rho u'w'}(x, r). \quad (18.75)$$

Из анализа размерностей найдем

$$\bar{u} = V_0 f_1 \left(\frac{x}{D}, \frac{r}{D}, Re_D \right); \quad \overline{u'w'} = -\rho V_0^2 g_1 \left(\frac{x}{D}, \frac{r}{D}, Re_D \right),$$

где $Re_D = V_0 D/\nu$, а f_1, g_1 — неизвестные универсальные функции.

На больших расстояниях от отверстия влияние параметра x/D должно уменьшаться, и следует ожидать, что существуют некоторые функ-

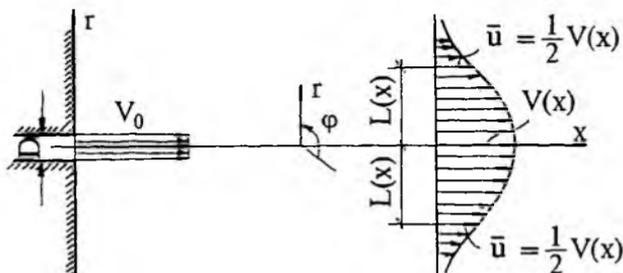


Рис. 18.7. Осесимметричная затопленная струя на большом удалении от отверстия

ции величин r/D и Re_D , которые являются пределами f_1 и g_1 при $x/D \rightarrow \infty$.

Кроме того, естественно ожидать, что условия на выходе из отверстия (т.е. величины V_0 и D) на большом удалении от него будут сказываться лишь через значение *начального импульса* струи, равное $\rho \pi D^2 V_0^2 / 4$. Другими словами — истечение из отверстия большого диаметра D с маленькой начальной скоростью V_0 создаст на большом удалении от отверстия такое же поле скорости, как при истечении с большой скоростью из маленького отверстия. Поле скорости будет зависеть от импульса (потока количества движения, поступающего в полупространство). Этот импульс определяет плавно изменяющиеся вдоль оси x характеристики типа скорости на оси струи $V(x) = \bar{u}(x, 0)$ или полуширины струи $L(x)$, которую считают равной расстоянию от оси до точек, где $\bar{u}(x, L) = V(x)/2$. Все осредненные характеристики будут зависеть от величин $V(x)$ и $L(x)$. Таким образом,

$$\bar{u} = V(x) f_2 \left(\frac{r}{L(x)}, Re_x \right); \quad \overline{u'w'} = -\rho [V(x)]^2 g_2 \left(\frac{r}{L(x)}, Re_x \right),$$

где $Re_x = V(x)L(x)/\nu$.

Наконец, будем считать, что при $Re_x \rightarrow \infty$ функции f_2 и g_2 приобретают некоторые предельные значения \bar{f} и g , так что

$$\bar{u} = V(x) f \left(\frac{r}{L(x)} \right); \quad \overline{u'w'} = -\rho [V(x)]^2 g \left(\frac{r}{L(x)} \right). \quad (18.76)$$

Система уравнений пограничного слоя и несжимаемости (18.62) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \overline{u'w'} \right); \quad (18.77)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\bar{w})}{\partial r} = 0. \quad (18.78)$$

Умножим уравнение (18.77) на r и проинтегрируем все его члены по r от 0 до ∞ . Используя интегрирование по частям и уравнение (18.78), найдем

$$\int_0^{\infty} \bar{u}^2 r dr = \frac{\text{ПКД}(x)}{\rho} = \text{const}, \quad (18.79)$$

где ПКД(x) — поток количества движения через поперечные сечения струи. Уравнение (18.79) представляет собой закон сохранения импульса, записанный для целой струи. Подставим в (18.79) первую формулу из (18.76) и найдем, что

$$V^2 L^2 \int_0^{\infty} f^2(\xi) \xi d\xi = \text{const},$$

где $\xi = r/L(x)$.

Полученный результат показывает, что Re_x не зависит от x , так как $f(x)$ — универсальная функция, и интеграл от нее есть универсальная постоянная.

Подставим (18.76) в (18.77) и, используя (18.78), получим

$$\frac{dL(x)}{dx} = \text{const},$$

отсюда

$$L(x) \sim x - x_0; \quad V(x) \sim \frac{1}{x - x_0},$$

где x_0 — условное начало струи. Следовательно, струя имеет форму кругового конуса.

Найдем расход струи:

$$Q = \int_0^{\infty} \bar{u} 2\pi r dr \sim \int_0^{\infty} L^2 V f(\xi) \xi d\xi \sim (x - x_0) \int_0^{\infty} f(\xi) \xi d\xi.$$

Полученный результат показывает, что расход струи увеличивается вдоль оси x , т.е. имеет место эжекция.

Проделанные вычисления позволили выяснить ряд качественных особенностей осесимметричной струи. Для того, чтобы найти распределение осредненной продольной скорости, необходимо решить систему уравнений (18.77) и (18.78), используя дополнительные гипотезы полуэмпирического характера. Иногда распределение продольной скорости в осесимметричной струе задают, основываясь только на достаточно обширном экспериментальном материале, практически не пользуясь уравнениями Рейнольдса. В данном курсе на этих вопросах останавливаться не будем и, закончив рассмотрение простейших методов определения поля осредненной скорости в турбулентных потоках, перейдем к статистическим методам описания турбулентности.