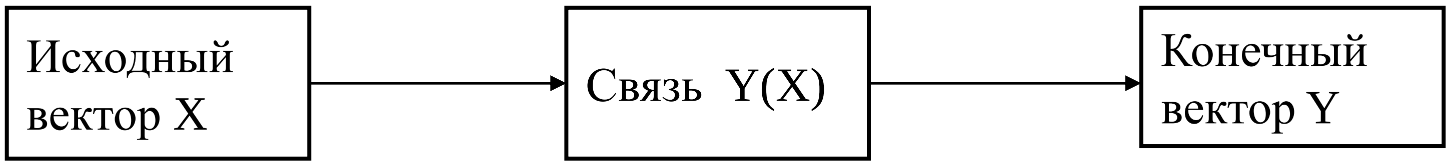
# Статистическое моделирование в задачах регионального переноса атмосферных примесей.

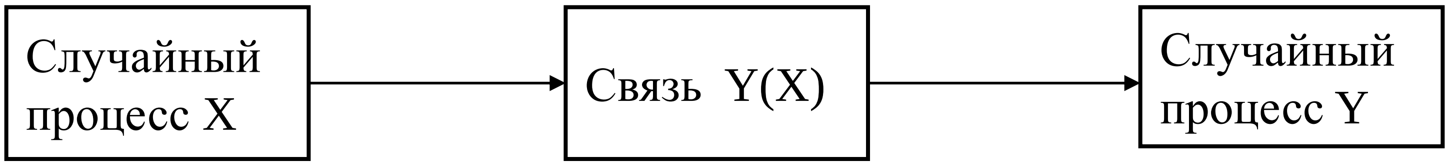
# Динамическая модель




Исходный вектор обычно включает характеристики начального состояния системы и параметры, определяющие ее эволюцию во времени.

Конечный вектор представляет собой совокупность интересующих исследователя величин.

# Статистическая модель




По известным параметрам процесса X требуется определить параметры процесса Y.

<u>Тривиальный пример</u>

X: N($m$,$\sigma^2$) - нормальное распределение

Y=$a$X

Тогда Y : N($am$,$a^2\sigma^2$)

# Уравнение атмосферной диффузии

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q_i}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q_i}{\partial y} + \sum_j a_{i,j} q_j + \sum_{j,k} b_{i,jk} q_j q_k + Q_i$$

$q_i$ – концентрация $i$-ой примеси;

$K_x$, $K_y$, $K_z$ – коэффициенты турбулентной диффузии;

$a_{i,j}$ – скорости реакций первого порядка (включая вымывание);

$b_{i,jk}$ – скорости реакций второго порядка;

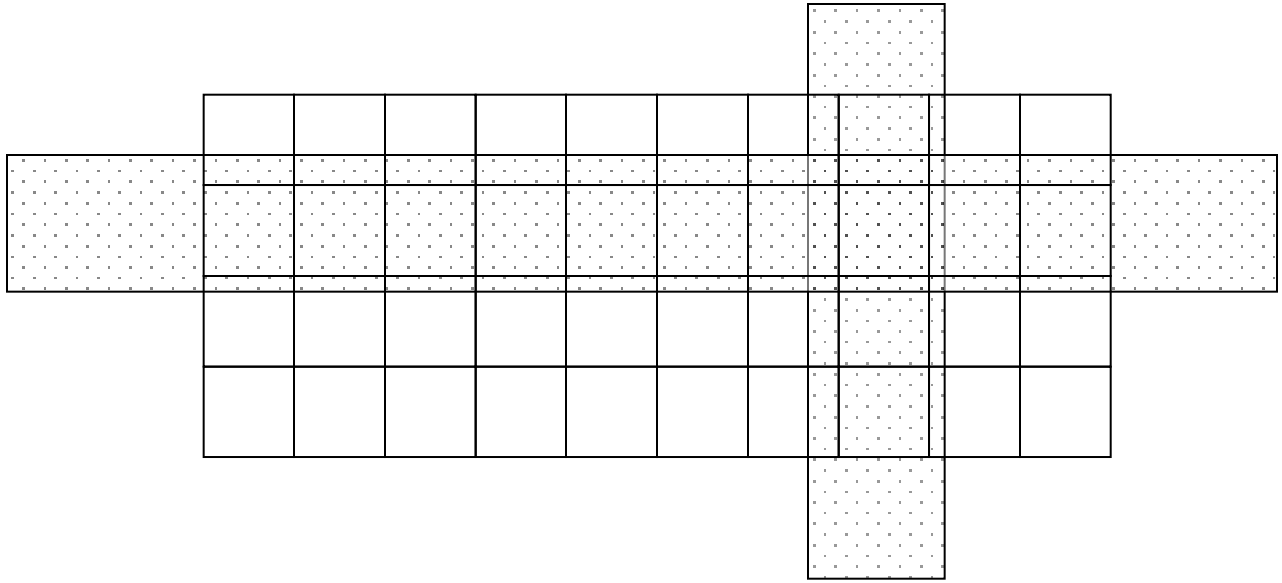
$Q_i$ – мощность источника $i$-ой примеси.

$\frac{d}{dt}$ - субстанциональная производная

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$u$, $v$, $w$ – компоненты скорости ветра

# Модель облачности: параметры



Климатологический справочник:

$N_c(c)$ – количество дней с облачностью в зависимости от балла

Дополнительно:

$L_c$ – средняя ширина облачного слоя

$T_c$ – средняя продолжительность облачного периода

# Схема Бернулли

Проводится серия независимых испытаний, в каждом из которых вероятность осуществления события равна *p*. Тогда, вероятность того, что событие произойдет в ($k$+1)-ом испытании:

$$P_k = p(1-p)^k$$

Средняя длина последовательности испытаний до наступления события:

$$N = \frac{1-p}{p}$$

# Цепи Маркова

Однородная цепь Маркова с конечным числом состояний – это стохастический процесс в котором:

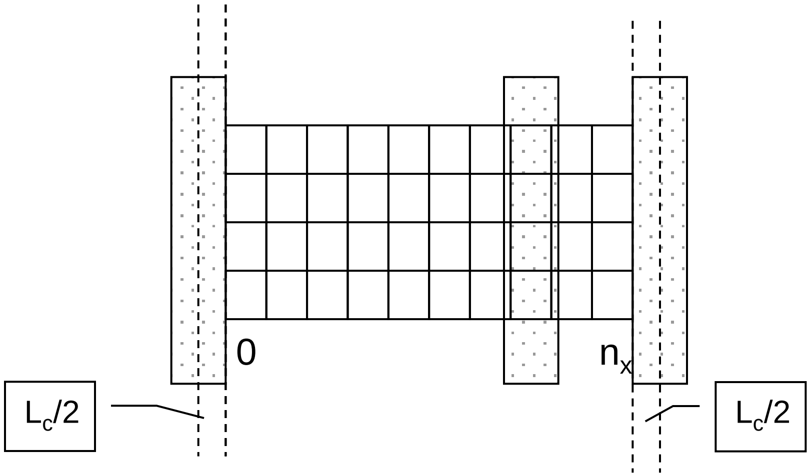
- для определения вероятностей состояний на ($n$+1)-ом, ($n$+2)-ом …. шагах достаточно знать вероятности состояний на $n$-ом шаге;
- вероятности переходов из одного состояния в другое $p_{ik}$ не зависят от номера шага.

Цепь называется регулярной, если вероятность попадания из любого состояния в любое за конечное число шагов отлична от нуля.

Если $P$ – переходная матрица регулярной цепи, то:

- для любого π последовательность $P^n\pi$ сходится к единственному вектору $\alpha$;
- справедливо равенство $P\alpha = \alpha$.

# Модель облачности: вероятность слоя(1)




Считаем известной $P_p$ – вероятность облачности в квадрате сетки; длину стороны квадрата сетки считаем равной 1.

Для слоя параллельного оси $y$: положение центра слоя равновероятно в пределах от $-L_c/2$ до $n_x+L_c/2$. Тогда вероятность того, что слой накрывает квадрат:

$$P_{cx} = P_{Lx}\frac{L_c}{n_x + L_c}$$

$P_{Lx}$ – вероятность существования слоя, параллельного оси $y$

Аналогично, для слоя, параллельного оси $x$:

$$P_{cy} = P_{Ly}\frac{L_c}{n_y + L_c}$$

$P_{Ly}$ – вероятность существования слоя, параллельного оси $x$

# Модель облачности: вероятность слоя(2)

Вероятности облачности, создаваемой слоями с разной ориентацией одинаковы:

$$P_{cx} = P_{cy}; \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{Lx}}{P_{Ly}} = \frac{n_x + L_c}{n_y + L_c}$$

В каждый момент времени может существовать только один слой, отсюда:

$$P_L = P_{Lx} + P_{Ly}$$

и можно ввести вероятности ориентации слоя:

$$P_x = \frac{P_{Lx}}{P_L} = \frac{n_x + L_c}{n_x + n_y + 2L_c}; \quad P_y = \frac{P_{Ly}}{P_L} = \frac{n_y + L_c}{n_x + n_y + 2L_c}$$

Вероятность попадания полосы на квадрат, т.е. вероятность наличия облачности в квадрате:

$$P_p = P_{cx} + P_{cy} = P_{Lx}\frac{n_x + L_c}{n_x + n_y + L_c} + P_{Ly}\frac{n_y + L_c}{n_x + n_y + L_c} = P_L\frac{2L_c}{n_x + n_y + L_c}$$

или же:

$$P_L = P_p\frac{n_x + n_y + 2L_c}{2L_c}$$

# Модель облачности: вероятности переходов(1)

Появление и исчезновение слоев моделируется марковским процессом. Временной шаг процесса – $\Delta\tau$.

$p(l|l)$ – вероятность сохранения облачного слоя;
$p(l|nl)$ – вероятность появления облачного слоя;
$p(nl|nl)$ – вероятность сохранения безоблачного неба;
$p(nl|l)$ – вероятность исчезновения облачного слоя.

Очевидно:

$$p(l\,|\,l) + p(nl\,|\,l) = 1; \quad p(l\,|\,nl) + p(nl\,|\,nl) = 1$$

т.е. только две вероятности независимы.

Среднее время существования облачного слоя (схема Бернулли, среднее время до наступления события):

$$T_c = \frac{1 - p(nl\,|\,l)}{p(nl\,|\,l)}\Delta\tau = \frac{p(l\,|\,l)}{1 - p(l\,|\,l)}\Delta\tau \quad \Rightarrow \quad p(l\,|\,l) = \frac{T_c}{T_c + \Delta\tau}$$

# Модель облачности: вероятности переходов(2)

Продолжительности периодов с облачным слоем и без него за время *T*:

$$T_L = TP_L ; T_{nL} = T(1 - P_L) \quad \Rightarrow \quad T_{nL} = T_L \frac{1 - P_L}{P_L}$$

С другой стороны, в соответствии со схемой Бернулли:

$$T_{nL} = \frac{1 - p(l \mid nl)}{p(l \mid nl)} \Delta\tau = \frac{p(nl \mid nl)}{1 - p(nl \mid nl)} \Delta\tau$$

Приравнивая и используя:

$$\boldsymbol{\frac{T_L}{T_c} = \frac{P_L}{P_P}}$$

получаем:

$$p(nl \mid nl) = \frac{1 - P_p \dfrac{n_x + n_y + L_c}{L_c}}{1 - P_p \left( \dfrac{n_x + n_y + L_c}{L_c} - \dfrac{\Delta\tau}{T_c} \right)}$$

# Модель облачности: вероятность облачности в квадрате сетки

Определение дня с облачностью: облачность существует в один из периодов наблюдения в течение суток. Тогда, вероятность ясного дня:

$$P_{clear} = P_p[1 - p(nc\,|\,nc)]^{\frac{\tau_d}{\Delta\tau} - 1}$$

Для марковского процесса с двумя состояниями (облачно/безоблачно) вероятность нахождения в состоянии «облачно»:

$$P_p = \frac{p(c\,|\,nc)}{p(nc\,|\,c) + p(c\,|\,nc)} = \frac{1 - p(nc\,|\,nc)}{1 - p(c\,|\,c) + 1 - p(nc\,|\,nc)}$$

С другой стороны:

$$P_{clear} = 1 - P_{cloud} = 1 - \frac{N_c}{365}$$

Подставляя и учитывая $p(c\,|\,c) = p(l\,|\,l)$ получаем уравнение для *p(nc|nc),* что дает возможность определить $P_p$

# Модель осадков: параметры

Осадки генерируются независимо в каждом квадрате сетки, в котором присутствует облачность более 4 баллов. Схема генерации – марковский процесс с одновременной генерацией интенсивности осадков $I$.

Полагается, что вероятность осадков и вероятность возникновения осадков линейно зависят от балла облачности $j$:

$p_r^j = (j-4)\tilde{p}_r$ – вероятность осадков

$p^j(r \mid nr) = (j-4)\tilde{p}_t$ – вероятность возникновения осадков

Климатологический справочник:

$Q$ – годовая сумма осадков;
$T_r$ – суммарная продолжительность осадков;
$N_r$ – количество дождливых дней.

# Модель осадков: распределения

Распределение интенсивности осадков полагается экспоненциальным.

$$f(I) = \frac{1}{I_0} e^{-\frac{I}{I_0}}$$

$I_0$ – искомый параметр, зависящий от климатологических характеристик.

Вводится коэффициент заполнения: часть территории, занятая осадками:

$$R(I) = 1 - e^{-\frac{I}{I_s}}$$

Параметр $I_s$ полагается известным.

# Модель осадков: уравнение для средней интенсивности

Суммарное количество осадков за год ($\tau_y$ – продолжительность года):

$$Q = \sum_j Q^j = \tau_y \sum_j p_c^j p_r^j \int_0^\infty I\ f(I)R(I)\,dI$$

Среднегодовая продолжительность осадков:

$$T_r = \tau_y \sum_j p_c^j p_r^j \int_0^\infty f(I)R(I)\,dI$$

Принимая, что от балла облачности зависят только вероятности, получаем уравнение для $I_0$:

$$\frac{Q}{T_r} = \frac{\int_0^\infty I\ f(I)R(I)\,dI}{\int_0^\infty f(I)R(I)\,dI}$$

# Модель осадков: вероятности осадков в квадрате

Обозначим:

$$A = \frac{1}{\tau_y \int_0^\infty I\, f(I) R(I)\, dI}$$

Разрешая уравнение для $Q$ относительно вероятности осадков:

$$p_r^j\, p_c^j = Q^j A$$

Используя линейную зависимость и суммируя по баллу облачности:

$$\tilde{p}_r \sum_j (j-4)\, p_c^j = A \sum_j Q^j = AQ$$

т.е.

$$p_r^j = \frac{AQ}{\sum_i (i-4)\, p_c^i} (j-4)$$

# Модель осадков: вероятности возникновения осадков

Вероятность дня с баллом облачности $j$ без осадков:

$$P^j_{norain} = (1 - p^j_r)\left[1 - \tilde{p}_t(j-4)\right]^{\frac{\tau_d}{\Delta\tau} - 1}$$

С другой стороны:

$$P^j_{norain} = 1 - \frac{\tau_d N^j_r}{\tau_y p^j_c}$$

Приравнивая, умножая на вероятность балла облачности и суммируя по баллам облачности:

$$\sum_j p^j_c (1 - p^j_r)\left[1 - \tilde{p}_t(j-4)\right]^{\frac{\tau_d}{\Delta\tau} - 1} = \sum_j p^j_c - \frac{\tau_d N_r}{\tau_y}$$

Это уравнение для $\tilde{p}_t$

# Модель осадков: вероятности прекращения осадков

Соотношение между вероятностями переходов и вероятностями состояний для цепей Маркова:

$$p_r^j = \frac{p^j(r \mid nr)}{p^j(r \mid nr) + p^j(nr \mid r)}$$

Отсюда:

$$p^j(nr \mid r) = p^j(r \mid nr)\frac{1 - p_r^j}{p_r^j}$$

Переменные в правой части определены ранее, оставшиеся элементы матрицы переходов определяются как:

$$p^j(r \mid r) = 1 - p^j(nr \mid r)$$

$$p^j(nr \mid nr) = 1 - p^j(r \mid nr)$$

# Модель поля ветра: параметры

Климатологический справочник:

- средняя скорость ветра $U_0$;
- роза ветров $p_i$.

Дополнительно:

коэффициент корреляции между последовательными трехчасовыми измерениями скорости ветра равен 0,95.

Поле ветра принимается однородным во всей расчетной области. Компоненты скорости ветра – случайные величины с гауссовым распределением. $V_0$ – модуль среднего вектора скорости ветра.

$$f(V_x, V_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[\frac{(V_x - V_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{V_y^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

# Модель поля ветра: уравнения(1)

Модель ориентирована на относительно однородную местность, так что можно считать розу ветров близкой к круговой. Для круговой розы ветров $V_0$=0 и :

$$U_0 = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|V|\exp\left(-\frac{V_x^2}{2\sigma^2}-\frac{V_y^2}{2\sigma^2}\right)dV_x dV_y = $$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty}V^2\exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma^2}\right)dV = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Линейное приближение для отклонений от круговой розы ветров:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\left[1+\frac{\pi}{2}\cos\varphi\frac{\Delta V_0}{U_0}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi\frac{1}{U_0}\left(\Delta\sigma_x-\Delta\sigma_y\right)\right]$$

# Модель поля ветра: уравнения(2)

Отклонения среднего модуля скорости и дисперсий определяются из условия минимума функционала:

$$J = \sum_i \left[ p_i - p(\varphi_i) \right]^2$$

при условии неизменности среднего модуля вектора скорости ветра:

$$\Delta U_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\sigma_x = -\Delta\sigma_y$$

Изменения ветра во времени моделируются процессом авторегрессии:

$$V_x^{(i)} = \alpha V_x^{(i-1)} + (1-\alpha)V_0 + \varepsilon_x^{(i)}$$
$$V_y^{(i)} = \alpha V_y^{(i-1)} + \varepsilon_y^{(i)}$$

где $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$ - распределенные по Гауссу случайные числа с нулевым средним и дисперсиями соответственно $(1-\alpha^2)\sigma_x^2$ and $(1-\alpha^2)\sigma_y^2$, $i$ – номер интервала генерации, $\alpha$ - коэффициент корреляции между соседними значениями.

# Кольский полуостров

| | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 275 | 292 | 276 | 296 | 299 | 260 | 274 | 268 | 265 | 254 | 254 | 253 | 243 | 239 | 213 | 207 | 233 | 230 | 258 | 247 | 214 |
| | 309 | 300 | 305 | 335 | 343 | 316 | 294 | 282 | 294 | 273 | 272 | 280 | 249 | 241 | 229 | 242 | 240 | 262 | 229 | 252 | 213 |
| **32** | 368 | 336 | 326 | 343 | 318 | 328 | 315 | 294 | 301 | 307 | 294 | 264 | 217 | 222 | 215 | 227 | 235 | 240 | 239 | 244 | 212 |
| | 363 | 370 | 362 | 343 | 342 | 356 | 350 | 351 | 322 | 311 | 293 | 258 | 214 | 218 | 231 | 227 | 239 | 238 | 236 | 232 | 211 |
| | 349 | 375 | 359 | 369 | 389 | 361 | 366 | 342 | 312 | 266 | 256 | 252 | 259 | 233 | 235 | 248 | 227 | 245 | 237 | 238 | 210 |
| | 340 | 363 | 371 | 353 | 404 | 360 | 359 | 304 | 298 | 277 | 237 | 258 | 227 | 235 | 250 | 242 | 228 | 249 | 219 | 237 | 209 |
| | 427 | 420 | 411 | 417 | 407 | 373 | 344 | 341 | 338 | 297 | 281 | 274 | 251 | 247 | 234 | 234 | 238 | 243 | 225 | 233 | 208 |
| | 443 | 489 | 442 | 511 | 440 | 417 | 420 | 405 | 367 | 359 | 352 | 339 | 296 | 265 | 260 | 209 | 240 | 239 | 229 | 247 | 207 |
| **31** | 490 | 553 | 527 | 526 | 481 | 431 | 443 | 383 | 423 | 450 | 477 | 349 | 319 | 311 | 285 | 249 | 237 | 250 | 253 | 243 | 206 |
| | 581 | 590 | 606 | 545 | 660 | 850 | 571 | 445 | 495 | 552 | 516 | 431 | 359 | 334 | 322 | 269 | 249 | 269 | 259 | 250 | 205 |
| | 751 | 849 | 726 | 692 | 965 | 1486 | 833 | 517 | 689 | 690 | 695 | 555 | 419 | 370 | 299 | 286 | 276 | 270 | 276 | 257 | 204 |
| | 917 | 1798 | 1120 | 791 | 687 | 905 | 552 | 559 | 897 | 1889 | 1131 | 626 | 420 | 357 | 314 | 290 | 277 | 290 | 276 | 276 | 203 |
| | 1455 | 4207 | 1669 | 712 | 601 | 524 | 470 | 522 | 1474 | 3573 | 2217 | 740 | 435 | 390 | 340 | 280 | 248 | 274 | 286 | 259 | 202 |
| | 1777 | **5160** | 2111 | 698 | 603 | 513 | 445 | 432 | 486 | 1316 | 737 | 555 | 466 | 368 | 354 | 300 | 293 | 264 | 251 | 254 | 201 |
| **30** | 519 | 1673 | 619 | 533 | 473 | 486 | 438 | 352 | 371 | 426 | 445 | 552 | 445 | 335 | 334 | 308 | 266 | 265 | 262 | 252 | 200 |
| | 378 | 427 | 437 | 408 | 389 | 329 | 367 | 328 | 396 | 358 | 360 | 401 | 307 | 310 | 297 | 254 | 254 | 281 | 264 | 258 | 199 |
| | 308 | 325 | 344 | 355 | 320 | 317 | 333 | 354 | 487 | 405 | 338 | 322 | 323 | 313 | 311 | 271 | 263 | 283 | 273 | 265 | 198 |
| | 321 | 341 | 326 | 327 | 311 | 310 | 306 | 283 | 357 | 331 | 300 | 324 | 330 | 302 | 308 | 274 | 298 | 296 | 299 | 286 | 197 |
| | 315 | 345 | 348 | 350 | 327 | 313 | 344 | 292 | 295 | 316 | 313 | 309 | 318 | 301 | 321 | 291 | 296 | 301 | 309 | 299 | 196 |
| | 290 | 313 | 330 | 329 | 324 | 318 | 324 | 292 | 321 | 327 | 337 | 309 | 328 | 331 | 328 | 306 | 297 | 304 | 315 | 317 | 195 |
| **29** | 309 | 306 | 305 | 309 | 298 | 295 | 310 | 303 | 287 | 302 | 309 | 291 | 306 | 318 | 325 | 305 | 302 | 311 | 315 | 323 | 194 |
| | | | | **16** | | | | | | **17** | | | | | | **18** | | | | | |