Моделирование движения потока. Уравнение Навье-Стокса

Известно, что реальные жидкости сопротивляются сдвигу одних частиц относительно соседних или одних слоев жидкости относительно других. Ньютон установил, что сила сопротивление сдвигу у жидких тел в противоположность закону Кулона для твердых тел, не зависит от давления, но зависит от площади, по которой происходит сдвиг, а также от скорости сдвига.

В математической записи эти законы выражаются формулой:

$$F = \mu \cdot S \frac{du}{dn} \qquad (1)$$

именуемой закона Ньютона.

Здесь:

F – сила сопротивления,

S – площадь сдвига (расчетная),

$\frac{du}{dn}$ – градиент скорости по нормали к направлению потока.

Из (1) получим касательное напряжение

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} \qquad (1a)$$

Законы Ньютона позволяют составить общие физические уравнения с учетом сил сопротивления, которые будем называть ***силами вязкости***.

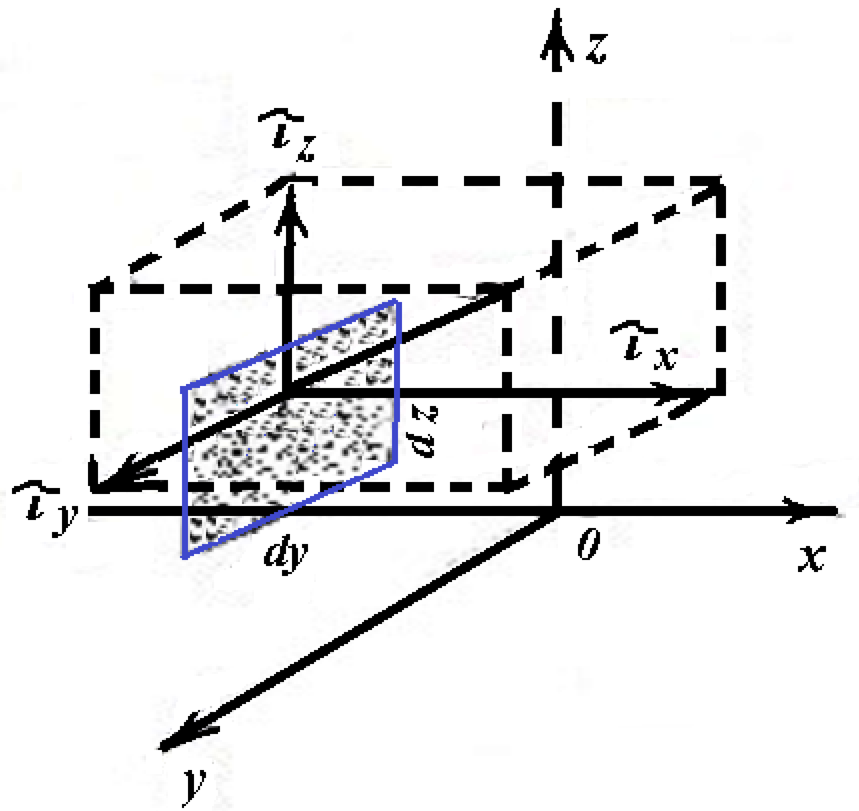
Силы вязкости можно условно свести к объемным силам и ускорение этих сил определить отношением

$$F = \frac{R}{\rho \cdot d\omega}$$

Обозначим проекции ускорения сил вязкости соответственно через *Fx* ;*Fy* ; *Fz* и введем их в уравнение Эйлера, тогда

$$\left.\begin{aligned}
X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} - F_x &= 0 \\
Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{du_y}{dt} - F_y &= 0 \\
Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{du_z}{dt} - F_z &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Допустим, что на некоторую площадку *dy; dz* в пределах координатной плоскости *yOz* действует сила вязкости *dF.*



Разлагая эту силу на проекции по координатным осям получим $dF*cos\acute{\alpha}=dP_x$ - нормальную к площади *dydz;* $d\tau_y$ - касательную к площади (*dydz*) в направлении оси *Oy* , $d\tau_z$ - касательную силу в направлении оси *Oz.*

Отнеся эти проекции силы вязкости к единице площади, т.е. разделив на ($dydz$) , получим 3 напряжения:

Нормальное $p_x = \dfrac{dP_x}{du \cdot dz}$ в направлении оси (Ox);

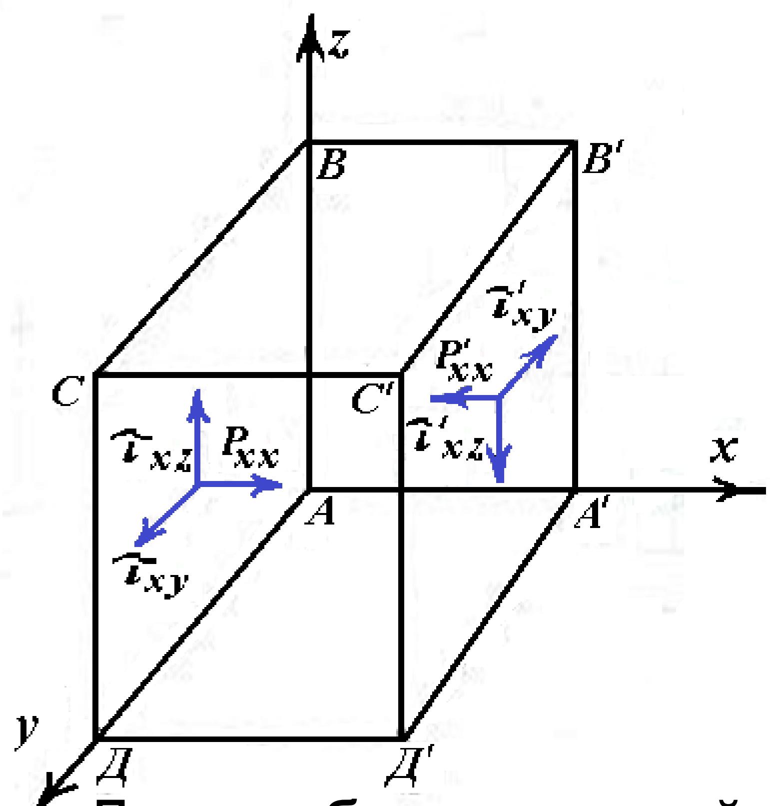
Касательное $\tau_y = \dfrac{d\tau_y}{dy \cdot dz}$ в направлении оси (Oy);

Касательное $\tau_z = \dfrac{d\tau_z}{dy \cdot dz}$ в направлении оси(Oz)

Итак, сила вязкости определила собой три напряжения в пределах выделенной площадки – нормальное (направление сжатия и растяжения) и два касательных.

Эти напряжения действуют по разным направлениям, каждое по своему. Т.о., при проектировании напряжений (и сил, ими определяемых) на какую-либо координатную ось в число действующих напряжений войдет только одно из трех напряжений (два других проектируются в точку).

Рассмотрим теперь напряжения, действующие по граням прямоугольного параллелепипеда ABCDA’B’C’D’.



Здесь из шести граней параллелепипеда три принадлежат трехгранному углу с вершиной A и три - трехгранному углу с вершиной C’.

Будем считать что течение имеет направление от угла A к углу C’, и определим сначала проекции на ось *Ox* всех напряжений трех граней угла A.

Для удобства записей введем двойную индексацию напряжений, например, для напряжений грани ABCD: нормальное напряжение *Pxx*, касательное напряжение (τ_{xy}), касательное напряжение (τ_{xz}).

Здесь первый индекс *X* обозначает, что напряжение принадлежит к грани, нормальной к оси *Ox*, а второй индекс указывает, в направлении какой оси действует данное напряжение.

Например напряжение (*Pxx*) действует параллельно оси *Ox*, а напряжение (τ_{xz}) действует в направление оси (*Oz*) и т.д. Аналогично будут записываться направления и для двух других граней угла *A*.

С учетом таких обозначений составим сумму проекций на ось *Ox* сил вязкости, действующих на грани угла А.

$$P_{xx} \cdot dydz + \tau_{yz} dxdz + \tau_{zx} dxdy$$

Составим теперь аналогичную сумму сил вязкости для граней угла С’:

$$P'_{xx}\cdot dy\cdot dz+\tau'_{yx}\cdot dx\cdot dz+\tau'_{zx}\cdot dx\cdot dy$$

Эти силы будут действовать в противоположном направлении, и тогда общая сила в направлении оси X

$$dF'_x=(P_{xx}-P'_{xx})\cdot dy\cdot dz+(\tau_{yx}-\tau'_{yx})dx\cdot dz+(\tau_{zx}-\tau'_{zx})dx\cdot dy$$

Определим теперь напряжение P^1xx, τ'_{yx} , τ'_{zx}

$$P'_{xx} = P_{xx} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} dx$$

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$$

Сделав соответствующую подстановку в предыдущее Уравнение и вынося за скобку общие множители (dx, dy, dz), получим:

$$dF'_x = -(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

а отнеся эту сумму проекций сил к единице массы, т.е. разделив на ($\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$) получим проекции ускорения сил вязкости на ось *Ox* (т.е. то ускорение, которое введено в уравнение Эйлера (2):

$$F_{x_x} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \qquad (3)$$

Определим теперь касательные напряжения, пользуясь законом Ньютона:

$$\tau_{yx} = \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t} \qquad \text{и} \qquad \tau_{zx} = \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

Аналогично можно принять нормальные напряжения (*Pxx*) определяемыми по закону Ньютона, т.е. принять $P_{xx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial x}$

При этом если $\frac{\partial u_x}{\partial x} > 0$ то - напряжение с растяжением,

а при $\frac{\partial u_x}{\partial x} < 0$ - сжатия.

Сделав подстановки в уравнение (3), получим

$$F_x = -\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \qquad (4)$$

Но $\frac{\mu}{\rho} = \nu$, поэтому можно записать первую строчку уравнений (2) в виде:

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} + \nu(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}) = 0$$

Аналогичные выражения получим и для двух следующих строк системы (2). Принимая несколько иное расположение слагаемых, запишем окончательно систему уравнений движения вязкой жидкости в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \\
Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) \\
Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\}$$

Эти уравнения называются уравнениями Навье-Стокса.