Моделирование движения потока. Уравнение Навье-Стокса

Известно, что реальные жидкости сопротивляются сдвигу одних частиц относительно соседних или одних слоев жидкости относительно других. Ньютон установил, что сила сопротивление сдвигу у жидких тел в противоположность закону Кулона для твердых тел, не зависит от давления, но зависит от площади, по которой происходит сдвиг, а также от скорости сдвига.

В математической записи эти законы выражаются формулой

$$F = \mu * S \frac{dy}{dn}$$

Именуемой закона Ньютона

Здесь:

F – сила сопротивления,

S – площадь сдвига (расчетная),

$\frac{dy}{dn}$ – градиент скорости по нормали к направлению потока.

Из(1) получим касательное напряжение

$$\tau = \frac{dy}{dn}$$

Законы Ньютона позволяют составить общие физические уравнения с учетом сил сопротивления, которые будем называть силами вязкости.

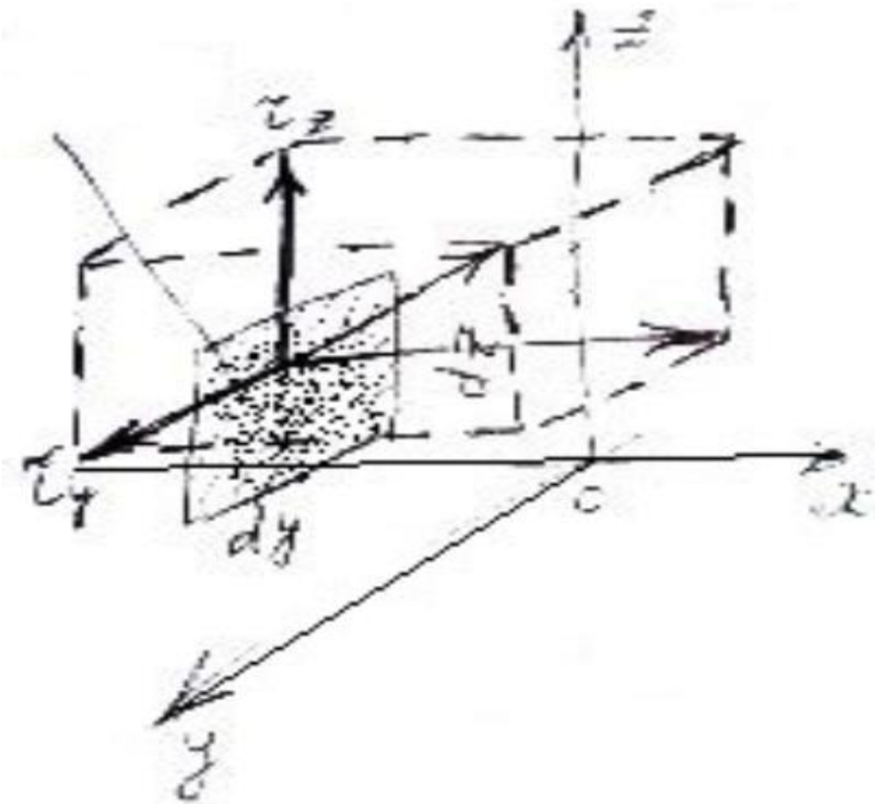
Силы вязкости можно условно свести к объемным силам и ускорение этих сил определить отношением

$$F = \frac{R}{\mathcal{P}dw}$$

- Обозначим проекции ускорения сил вязкости соответственно через Fx ;Fy ; Fz и введем их в уравнение Эйлера, тогда

$$\begin{cases} x - \frac{1}{\mathcal{P}}\frac{dp}{dx} - \frac{du_x}{dt} - F_x = 0 \\ x - \frac{1}{\mathcal{P}}\frac{dp}{dy} - \frac{du_y}{dt} - F_y = 0 \\ x - \frac{1}{\mathcal{P}}\frac{dp}{dz} - \frac{du_z}{dt} - F_z = 0 \end{cases}$$

- Допустим, что на некоторую площадку dy; dz в пределах координатной плоскости Oz действует сила вязкости dF



Разлагая эту силу на проекции по координатным осям получим
(dF*cosά=dPx)
нормальную к площади (dy;dz;dTy), касательную к площади (dydz) в направлении оси (Oy) , (dTz) касательную силу
в направлении оси (Oz)

- Отнеся эти проекции силы вязкости к единице площади, т.е. разделив на (dy,dz) , получим 3 напряжения:
- Нормальное $P_X = \dfrac{d\mathcal{P}_x}{d_u d_z}$ в направлении оси (Ox)
- Касательное $\tau_y = \dfrac{d\tau_y}{d_y d_z}$ в направлении оси (Oy)

Касательное $\tau_z = \dfrac{d\tau_z}{d_y d_z}$ в направлении оси(Oz)

- Итак, сила вязкости определила собой три напряжения в пределах выделенной площадки – нормальное (направление сжатия и растяжения) и два касательных. Эти направления действуют по разным направлениям, каждое по своему. Т.о., при проектировании напряжений (и сил, ими определяемых) на какую-либо координатную ось в число действующих напряжений войдет только одно из трех напряжений (два других проектируются в точку).

- Рассмотрим теперь напряжения, действующие по граням прямоугольного параллелепипеда ABCDA’B’C’D’

Здесь из шести граней параллелепипеда три принадлежат трехгранному углу с вершиной А и три трехгранному углу с вершиной С.

Будем считать что течение имеет направление от угла А к углу С’, и определим сначала проекции на ось ОХ всех напряжений трех граней угла А.

Для удобства записей введем двойнуюиндексикацию напряжений, например, для напряжений грани (ABCD) нормальное напряжение (Pxx), касательное напряжение (тxy), касательное напряжение (тxz).

Здесь первый индекс X обозначает, что напряжение принадлежит к грани нормальной к оси OX, а второй индекс указывает, в направлении какой оси действует данное напряжение. Например напряжение (Pxx) действует параллельно оси OX, а напряжение (τxy) действует в направление оси (Oz) и т.д.. Аналогично будут записываться направления и для двух других граней угла A.

С учетом таких обозначений составим сумму проекций на ось OX сил вязкости, действующих на грани угла A.

$$p_{xx}dydz+\tau_{zx}dxdy + \tau_{zx}dxdy$$

- Составим теперь аналогичную сумму сил вязкости для граней угла
- p’xxdydz+т’zxdxdy + т’zxdxdy
- Эти силы будут действовать в противоположном направлении, и тогда общая сила в направлении оси X
- dFx=(pxx-p’xx)dydz+(тyx-т’yx)dxdz+(тzx-т’zx)dxdy

- Определим теперь напряжение (Pxx) (т’yx) (т’zx)

$$P'xx = pxx = \frac{dPxx}{dx}dx;$$

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}dy$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz}dz$$

Сделав соответствующую подстановку в предыдущее Уравнение и выноса за скобку общие множители (dx, dy, dz), получим:

$$dF'x = -\left(\frac{dPxx}{dx} + \frac{dt_{yx}}{dy} + \frac{dt_{zx}}{dz}\right)$$

А отнеся эту сумму проекций сил к единице массы, т.е. разделив на (ФОРМУЛА) получим проекции ускорения сил вязкости на ось OX (т.е. то ускорение, которое введено в уравнение Эйлера (2):

$$Fx = -1/\mathcal{P}(dPxx/dx + (dt_{\downarrow}yx)/dy + (dt_{\downarrow}zx)/dz$$

Определим теперь касательные напряжения, пользуясь законом Ньютона:

$$\tau_{\mathbf{yx}} = \mu \frac{du_x}{dy} \text{ и } \tau_{zx} = \mu \frac{du_x}{dz}$$

- Аналогично можно принять нормальные напряжения (Pxx) определяемыми по закону Ньютона, т.е. принять

$p_{xx} = \mu \frac{du_x}{dx}$ При этом если $\frac{du_x}{dx} > 0$

то - напряжение с растяжением,

а при $\frac{du_x}{dx} < 0$ сжатия.

Сделав подстановки в уравнение (3), получим

$$Fx = -\frac{\mu}{\mathcal{P}}\left(\frac{d^2u_x}{d_{x^2}} + \frac{d^2u_x}{d_{y^2}} + \frac{d^2u_x}{d_{z^2}}\right)$$

- Но $^{\mathcal{M}}/_{\mathcal{P}} = \mathcal{V}$, поэтому можно записать первую строчку уравнений (2) в виде:

$$x - \frac{1}{\mathcal{P}}\frac{dp}{dz} - \frac{du_x}{dt} + \mathcal{V}\left(\frac{d^2u_x}{d_{x^2}} + \frac{d^2u_x}{d_{y^2}} + \frac{d^2u_x}{d_{z^2}}\right) = 0$$

Аналогичные выражения получим и для двух Следующих строк системы (2). Принимая несколько иное расположение слагаемых, запишем окончательно систему уравнений движения вязкой жидкости в таком виде:

t − 𝒱((d↑2 u↓x)/d↓(x↑2) + (d↑2 u↓x)/d↓(y↑2) + (d↑2 u↓x)/d↓(z↑2))@y − 1/𝒫 dp/dy − □du□↓y/dt − 𝒱((d↑2 u↓x)/d↓(x↑2)

Эти уравнения называются уравнениями Навье-Стокса