π -теорема. Решение задач на основе π -теоремы

Практическое значение π -теоремы заключается прежде всего в том, что с ее помощью можно существенно уменьшить число рассматриваемых величин. Тем самым упрощается выполнение исследования.

Пусть имеется некоторое уравнение, описывающее какой-либо физический процесс и содержащее n переменных:

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \qquad (1)$$

Если эти переменные можно выразить через m– основных размерных единиц, то их можно сгруппировать в n-m безразмерных членов :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \qquad (2)$$

Каждый из новых членов π будет состоять из *m+1* сомножителей (из числа величин $a_1, a_2 ....., a_n$), причем первые *m* сомножителей возводятся в некоторые степени (подлежащие описыванию) и выбираются произвольно, а последний сомножитель имеет первую степень и меняется от комплекса к комплексу.

В системе СИ для механических процессов, например *m=3* (*M, L, T*). Тогда, учитывая сказанное, можно написать структуру членов π в виде:

$$\pi_1 = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\beta_1} \cdot a_3^{\gamma_1} \cdot a_4$$

$$\pi_2 = a_1^{\alpha_2} \cdot a_2^{\beta_2} \cdot a_3^{\gamma_2} \cdot a_5$$

....

$$\pi_{n-m} = a_1^{\alpha_{n-m}} \cdot a_2^{\beta_{n-m}} \cdot a_3^{\gamma_{n-m}} \cdot a_n$$

Показатели степени α, β, γ определяются из условия, чтобы π комплексы были безразмерными.

Например: изучаются вопросы, связанные с истечением чрез водослив. Очевидно, расход Q, проходящий через водослив, зависит от напора H, ширины водослива b, g и плотности жидкости ρ. Поэтому $Q = f(b, \rho, g, H)$ или

$$\varphi(Q, b, \rho, g, H) = 0 \qquad (3)$$

Здесь 5 связанных между собой физических величин. Воспользуемся π -теоремой. Для уравнения (3) имеем

n-m=5-3=2 безразмерных комплекса:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0 \qquad (4)$$

Определим π_1 и π_2

$$\pi_1 = Q^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \cdot \rho^{\gamma_1} \cdot g$$

Размерность $[Q] = L^3 \cdot T^{-1}$; $[b] = L$; $[\rho] = M \cdot L^{-3}$; $[g] = L \cdot T^{-2}$

Тогда для π запишем:

$$\pi_1 = [Q]^{\alpha_1} \cdot [b]^{\beta_1} \cdot [\rho]^{\gamma_1} \cdot [g] \qquad (5)$$

Чтобы комплекс π был безразмерным, надо, чтобы сумма показателей степеней для каждой размерности была равно 0. Составим соответствующие равнения для размерности длины, времени и массы.

Для L $\quad 3\alpha_1 + \beta_1 - 3\gamma_1 + 1 = 0$

Для T $\quad -\alpha_1$ -2 = 0

Для M $\quad \gamma_1 = 0$

Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

Находим: $\gamma_1 = 0$; $\alpha_1 = -2$; $\beta_1 = 5$.

- Результативно находим комплекс π_1

$$\pi_1 = [Q]^{\alpha_1} \cdot [b]^{\beta_1} \cdot [\rho]^{\gamma_1} \cdot [g] = Q^{-2} \cdot b^5 \cdot \rho^0 \cdot g = \frac{b^5 \cdot g}{Q^2}$$

Аналогично находим второй комплекс π_2 :

$$\pi_2 = Q^{\alpha_2} \cdot b^{\beta_2} \cdot \rho^{\gamma_2} \cdot H$$

Составляя (подобно предыдущему) три уравнения находим значения $\alpha_2 = 0$; $\beta_2 = -1$ и $\gamma_2 = 0$ и тогда находим:

$$\pi_2 = b^{-1} \cdot H = \frac{H}{b} \qquad (6)$$

Теперь напишем уравнение (4):

$$\varphi(\pi_1, \pi_2) = \varphi(\frac{b^5 \cdot g}{Q^2}; \frac{H}{b}) = 0 \qquad (7)$$

Выражение π_1 для можно преобразовать, воспользовавшись обратной зависимостью:

$$\pi = \frac{1}{\pi} = \frac{Q^2}{b^5 \cdot g} = \frac{\vartheta^2 \cdot \omega^2}{b^5 \cdot g} = \frac{\vartheta^2 \cdot b^2 \cdot H^2}{b^5 \cdot g} = \frac{\vartheta^2}{g \cdot b} \cdot \frac{H^2}{b^2}$$

Но выражение $\vartheta^2 / g \cdot b$ представляет собой число Фруда, поэтому можно записать:

$$\varphi(Fr, \frac{H}{b}) = 0$$

Это равенство определяет собой зависимости явления истечения через водослив от числа Фруда. Очевидно, что в других случаях может оказаться, что рассматриваемое явление зависит от числа Рейнольдса и т.д.

П-теорема имеет широкое применение. Пользуясь этой теоремой, удается определить структуру формул, описывающих данное движение жидкости, правильно организовать экспериментальные работы и прочее.