Математическое моделирование экологических процессов. Уравнение движения. Закон сохранения энергии

Уравнение движения жидкости связывают воедино все параметры характеризующие движение, скорости и ускорения в точках пространства, заполненного жидкостью и силы обуславливающие это движение.

При выводе дифференциальных уравнений для жидкости будем исходить из ***второго закона Ньютона***, который является основным законом гидродинамики и имеет следующую формулировку:

«***Произведение массы точки на ускорение, которое оно получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы***».

Если на точку действует одновременно несколько сил, то их действие может быть отождествлено с действием равнодействующей силы, равной геометрической сумме всех действующих сил.

Математическая запись основного закона в векторной форме представится уравнением:

$$m \cdot \overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (1)$$

Где – $\overline{a}$ ускорение рассматриваемой материальной точки;

$\overline{F_k}$ – действующая сила;

n – число действующих сил;

k – переменный индекс суммирования.

В проекциях на оси координат уравнение (1) запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} m\cdot a_x &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ m\cdot a_y &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ m\cdot a_z &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В окончательном виде уравнение движения идеальной жидкости можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Это уравнение выведено Эйлером в 1775г.

Здесь: $\frac{du_x}{dt}, \frac{du_y}{dt}, \frac{du_z}{dt}$ – градиенты скорости;

$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ – градиенты давления;

X, Y, Z– проекция массовых сил на оси координат.

При решении практических задач проинтегрируем это уравнение с учетом силы тяжести. Для этого уравнение (1) умножим соответственно на dx, dy ,dz и сложим:

$$\frac{du_x}{dt} \cdot dx + \frac{du_y}{dt} \cdot dy + \frac{du_z}{dt} dz = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz -$$

$$- \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) \qquad (4)$$

Как известно $$u_x = \frac{dx}{dt}; \;\; u_y = \frac{dy}{dt}; \;\; u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Тогда правую сторону уравнения (4) можно записать:

$$\frac{du_x}{dt} \cdot dx + \frac{du_y}{dt} \cdot dy + \frac{du_z}{dt} dz = u_x \cdot du_x + u_y \cdot du_y + u_z \cdot du_z =$$

$$= \frac{1}{2} d\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)$$

Так как $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2$, можем записать вместо правой стороны (4) уравнение:

$$\frac{1}{2} d\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) = \frac{1}{2} d\left(u^2\right) \qquad (5)$$

Если мы примем во внимание только силу тяжести, то вторая часть уравнения примет вид: X=0;Y=0;Z=-g

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = -g \cdot dz \qquad (6)$$

Третий член уравнения (4) как известно из курса математического анализа, выражает полный дифференциал давления, т.е.:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp \qquad (7)$$

Подставив уравнения (5), (6) и (7) в уравнение (4) получим:

$$\frac{1}{2}\cdot d(u^2)+\frac{1}{\rho}\cdot dp+g\cdot dz=0$$

Проинтегрировав полученное выражение, получим

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2 \cdot g} = const \qquad (8)$$

или ***закон сохранения энергии***

Здесь *Z*– удельная энергия положения (потенциальная) потока жидкости.

$\frac{p}{\gamma}$ – удельная энергия давления (потенциальная)

$\frac{u^2}{2 \cdot g}$ – удельная кинетическая энергия потока.

При помощи этого уравнения определяются параметры потока, движущиеся в граничных средах (реках, каналах, системе трубопроводов и т.д.)