III BOB. SUYUQLIKLAR KINEMATIKASI VA DINAMIKASI ASOSLARI. SUYUQLIKLARDA HARAKAT TURLARI

Gidravlikaning suyuqliklar harakat qonunlari va ularning harakatlanayotgan yoki harakatsiz qattiq jismlar bilan o'zaro ta'sirini o'rganuvchi bo'limi gidrodinamika deyiladi.

Harakatlanayotgan suyuqlik vaqt va koordinata bo'yicha o'zgaruvchi turli parametrlarga ega bo'lgan harakatdagi moddiy nuqtalar to'plamidan iborat. Odatda suyuqlikni o'zi egallab turgan fazoni butunlay to'ldiruvchi tutash jism deb qaraladi. Bu degan suz tekshirilayotgan fazoning istalgan nuqtasini olsak, shu yerda suyuqlik zarrachasi mavjuddir. Gidrostatikada asosiy parametr bosim edi, gidrodinamikada esa bosim va tezlikdir.

3.1. Gidrodinamikaning asosiy masalasi. Harakat turlari

Suyuqlik harakat qilayotgan fazoning har bir nuqtasida shu nuqtaga tegishli tezlik va bosim mavjud bo'lib, fazoning boshqa nuqtasiga o'tsak, tezlik va bosim boshqa qiymatga ega bo'ladi, ya'ni tezlik va bosim koordinatalar *x, u, z* ga bog'liq. Nuqtadagi suyuq zarrachaga ta'sir qilayotgan bosim va tezlik vaqt o'tishi bilan o'zgarib borishini tabiatda kuzatish mumkin.

Tezlik va bosim maydonlari. Suyuqlik harakat qilayotgan fazoning har bir nuqtasida hayolan tezlik va bosim vektorlarini ko'rib chiqsak, ko'rilayotgan harakatga mos keluvchi tezlik va bosim to'plamlarini ko'z oldimizga keltira olamiz. Ana shu usul bilan tuzilgan tezlik *to'plami tezlik maydoni* deyiladi. Shuningdek, bosim vektorlaridan iborat to'plam *bosim maydoni* deb ataladi. Tezlik va bosim maydonlari vaqt o'tishi bilan o'zgarib boradi. Gidrostatikadagi kabi gidrodinamikada ham gidrodinamik bosimni p bilan belgilaymiz va uni sodda qilib bosim deb ataymiz. Tezlikni esa u bilan belgilaymiz. U holda tezlikning koordinata o'qlaridagi proyektsiyalari u_x, u_y, u_z bo'ladi.

Yuqorida aytib o'tilganga asosan suyuqlik parametrlari funktsiya ko'rinishida yoziladi

$$\begin{aligned} p &= f_1(x,y,z,t) \\ u &= f_2(x,y,z,t) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

tezlik proyektsiyalari ham funktsiyalardir;

$$u_x = f_3(x,y,z,t)$$
$$u_y = f_4(x,y,z,t)$$
$$u_z = f_5(x,y,z,t)$$

Bu keltirilgan funktsiyalarni aniqlash va ular o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanishni topish gidrodinamikaning asosiy masalasi hisoblanadi.

Harakat turlari. Harakat vaqtida suyuqlik oqayotgan fazoning hap bir nuqtasida tezlik va bosim vaqt o‘tishi bilan o‘zgarib tursa, bunday harakat *beqaror harakat* deyiladi. Tabiatda daryo va kanallardagi suvning harakatlari, texnikada quvurlardagi suyuqlikning harakati va mexanizmlar qismlaridagi harakatlar asosan boshlanganda va ko‘p hollarda butun harakat davomida beqaror bo‘ladi. Agar suyuqlik oqayotgan fazoning har bir nuqtasida tezlik va bosim vaqt bo‘yicha o‘zgarmay faqat koordinatalarga bog‘liq, ya’ni

$$p = f_{11}(x,y,z)$$
$$u = f_{21}(x,y,z) \qquad (3.2)$$

bo‘lsa, u holda harakat *barqaror* deyiladi. Bu hol quvurlarda va kanallarda suyuqlik ma’lum vaqt oqib turganidan keyin yuzaga kelishi mumkin. Barqaror harakat ikki tur bo‘lishi mumkin: *tekis va notekis harakatlar*. Suyuqlik zarrachasi harakat yo‘nalishi bo‘yicha vaqt o‘tishi bilan harakat fazosining bir nuqtasidan ikkinchi nuqtasiga o‘tganda tezligi o‘zgarib borsa, harakat notekis harakat bo‘ladi. Notekis harakat vaqtida suyuqlik ichida bosim va boshqa gidravlik parametrlar o‘zgarib boradi. Notekis harakatni kesimi o‘zgarib borayotgan shisha quvurda kuzatish juda qulaydir.

Bordiyu suyuqlik zarrachasi harakat yo‘nalishi bo‘yicha vaqt o‘tishi bilan harakat fazosining bir nuqtasidan ikkinchi nuqtasiga o‘tganda tezligini o‘zgartirmasa, bunday harakat tekis harakat deyiladi. Tekis harakat vaqtida suyuqlikning gidravlik parametrlari o‘zgarmaydi. Tekis harakatga kesimi o‘zgarmaydigan quvurlardagi suyuqlikning va qiyaligi bir xil kanallardagi suv oqimi misol bo‘la oladi.

Suyuqlik oqimining naporli va naporsiz harakati, gohida bu tushunchalar shartli bosimli va bosimsiz harakatlar deb ham qabul qilingan.

Naporli harakat vaqtida suyuqlik har tomondan devorlar bilan o‘ralgan bo‘lib, erkin sirt bilan chegarasi bo‘lmaydi. Bunday harakatga naporli idishdan quvurga o‘tayotgan suyuqlik harakati misol bo‘ladi.

Naporsiz harakat vaqtida suyuqlik faqat og'irlik kuchi ta'sirida harakat qilib erkin sirtga ega bo'ladi. Bunday harakatga daryolardagi, kanallardagi suvning va quvurlardagi to'lmasdan oqayotgan suyuqlikning harakatlari misol bo'la oladi.

Struyali harakat. Struyali harakat vaqtida suyuqlik faqat havo bilan chegaralangan buladi.

3.2. Oqimchali harakat haqida asosiy tushunchalar.
Oqim chizig'i, oqim naychasi va oqimcha. Suyuqlik oqimlari

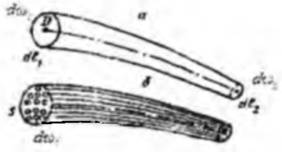
Odatda, biror voqea yoki hodisani tekshirishda uni butunligicha tekshirib bo'lmagani uchun biror soddalashtirilgan sxema qabul qilinadi va ana shu sxema tekshiriladi. Gidravlikada suyuqlik harakati qonuniyatlarining tabiatini eng yaxshi ifodalab beruvchi sxema suyuqlik oqimini elementar oqimchalardan iborat deb qarovchi sxema hisoblanadi. Buni gidravlikada "suyuqlik harakatining oqimchali modeli" deb ataladi. Bu model asosida oqim chizig'i, oqim naychasi va oqimcha tushunchalari yotadi.

a) Oqim chizig'i – suyuqlik harakat qilayotgan fazoda suyuqlikning biror zarrachasining harakatini kuzatsak, uning vaqt o'tishi bilan fazoda oldinma-keyin olgan holatlarini 1, 2, 3... (3.1-rasm, *a*) nuqtalar bilan ifodalash mumkin va bu nuqtalarda harakatdagi zarracha (3.1) va (3.2) ga asosan har xil tezlik va bosimlarga ega bo'ladi. Shu nuqtalarni o'zaro tutashtirsak, suyuqlik zarrachasiniig trayektoriyasi hosil bo'ladi.

Endi, suyuqlik zarrachasining tezligini kuzatamiz. Zarrachaning A nuqtadagi tezlik vektori u_A ni ko'rilayotgan vaqt uchun quramiz, shu vektorning davomida kichik dl_1 masofadagi B nuqtada harakatdagi suyuqlik zarrachasining B nuqtaga tegishli tezlik vektori u_B ni quramiz. Hosil bo'lgan yangi vektorning davomida kichik dl_2 masofadagi C nuqtada shu nuqtaga tegishli zarracha tezligining vektori u_C ni quramiz. u_S vektorining davomida dl_3 masofadagi D nuqtada shu nuqtaga tegishli zarracha tezligining u_D vektorini quramiz va h. k. Natijada $ABCDE$ (3.2-rasm, b) siniq chiziqni hosil qilamiz. Agar dl_1, dl_2, dl_3 larni cheksiz kichraytirib borib, nolga intiltirsak, $ABCDE$ o'rnida biror egri chiziqni olamiz. Bu egri chiziq oqim chizig'i deb ataladi.

Demak, suyuqlik harakatlanayotgan fazoda olingan va berilgan vaqtda har bir nuqtasida unga o'tkazilgan urinma shu nuqtaga tegishli tezlik vektori yo'nalishiga mos keluvchi egri chiziq oqim chizig'i deb ataladi. Beqaror harakat vaqtida tezlik va uning yo'nalishi vaqt davomida o'zgarib turgani uchun trayektoriya bilan oqim chizig'i bir xil bo‘lmaydi. Barqaror harakat vaqtida esa tezlik vektorining nuqtalardagi holati vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmagani uchun trayektoriya bilan oqim chizig‘i ustma-ust tushadi.

3.1-rasm. Oqim chizig‘ini tushuntirishga oid chizma.



3.2- rasm. Oqim naychasi. elementar oqimcha va oqim.

Oqim naychasi va elementar oqimcha. Endi, suyuqlik harakatlanayotgan soha-da,biror *D* nuqta olib, shu nuqta atrofida cheksiz kichik *dl* kontur olamiz va shu konturning har bir nuqtasidan oqim chizig‘i o‘tkazamiz. U holda oqim chiziqlari oqim naychasi, deb ataluvchi naycha hosil qiladi (3.1-rasm, *a*). Oqim naychasi ichida oqayotgan suyuqlik oqimi elementar oqimcha deb ataladi, Elementar oqimchalar barqaror harakat vaqtida quyidagi xususiyatlarga ega.

1. Oqim chiziqlari vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmagani uchun ulardan tashkil topgan elementar oqimcha o‘z shaklini o‘zgartirmaydi.

2. Bir oqimchada oqayotgan suyuqlik zarrachasi boshqa yonma-yon oqimchalarga o‘ta olmaydi. Shuning uchun elementar oqimchalarning yon sirti oqimcha ichidagi zarrachalar uchun ham, tashqaridagi zarrachalar uchun ham o‘tkazmas sirt bo‘ladi.

3. Elementar oqimcha ko‘ndalang kesimi cheksiz kichik bo‘lgani uchun bu ke-simdagi barcha nuqtalarda suyuqlik zarrachalarining tezligi o‘zgarmasdir.

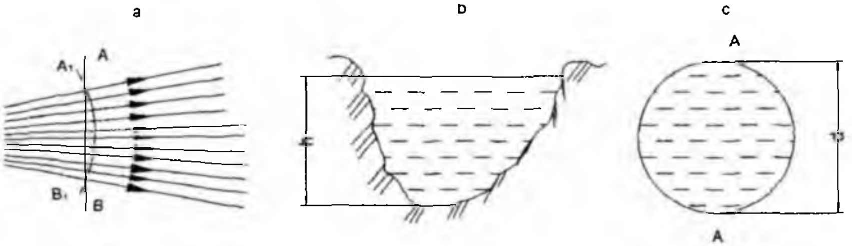
Endi biror ω yuza olib, uni cheksiz ko‘p $d\omega_1$ $d\omega_2$, $d\omega_3$ elementar yuzalarga ajratish mumkin (3.2-rasm, *b*). Shuning uchun yuzadan oqib o‘tayotgan suyuqlik oqmasi cheksiz ko‘p elementar oqimchalardan tashkil topgan bo‘ladi va har bir elementar oqimchada suyuqlik tezligi boshqa elementar oqimchalardagidan farq qiladi.

3.3. Oqimning asosiy gidravlik elementlari

Suyuqlik oqimini tekshirishda oqish qonunlarini matematik ifodalash uchun uni gidravlik va geometrik nuqtai nazardan xarakterlovchi; 1) harakat kesimi; 2) suyuqlik sarfi; 3) o'rtacha tezlik; 4) ho'llangan perimetr; 5) gidravlik radius kabi tushunchalar kiritiladi.

Harakat kesimi deb shunday sirtga aytiladiki, uning har bir nuqtasida oqim chizig'i normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Umumiy holda harakat kesimi egri sirt bo'lib (3.3- rasm *a*), parallel oqimchali harakatlar uchun tekislikning bo'lagidan iborat (ya'ni tekis sirtdir) (3.3-rasm, *b, c*).

Masalan, radial tarqalayotgan suyuqlik oqimi uchun harakat kesimi sferik sirt bo'lsa (3.3-rasm, *a*) o'zanda va quvurda harakat qilayotgan oqimning harakati kesimi tekis sirtdir (3.3- rasm, *b, c*). Shunga asosan parallel oqimchali harakatga ega bo'lgan oqimlarning harakat kesimi uchun quyidagicha ta'rif berish mumkin: *oqimning umumiy oqim yo'nalishiga normal bo'lgan ko'ndalang kesimi harakat kesimi deb ataladi.* Oqim harakat kesimining yuzi ω harfi bilan belgilanadi.



3.3- rasm. Harakat kesimiga oid chizma.

Vaqt birligida oqimning berilgan harakat kesimi orqali oqib o'tayotgan suyuqlik miqdori **suyuqlik sarfi** deb ataladi. Sarf Q harfi bilan belgilanadi va l/s, m^3/s, sm^3/s larda o'lchanadi. Elementar yuza bo'yicha sarfni dq bilan, birlik yuza bo'yicha sarfni q bilan belgilanadi. 3.4-rasmda quvurdagi (*a*) va kanaldagi (*b*) oqimlar uchun tezlik epyuralari keltirilgan. Tezlik suyuqlik oqayotgan idish devorlarida nolga teng bo'lib, devordan uzoqlashgan sari kattalashib borishi rasmdan ko'rinib turibdi. Quvurda tezlikning eng katta qiymati uning o'rtasida bo'lsa, kanalda erkin sirtga yaqin yerda bo'ladi. Ixtiyoriy elementar oqimcha uchun elementar sarf $dQ = u\,d\omega$ ga teng. Oqim cheksiz ko'p elementar oqimchalardan tashkil topgani uchun elementar sarflarning yig'indisi, ya'ni butun oqimning sarfi integral ko'rinishda ifodalanadi:

$$Q = \int_{\omega} u\, d\omega, \qquad (3.3)$$

bu yerda ω – harakat kesimi; $d\omega$ – harakat kesimining elementar oqimchaga tegishli bo‘lagi.

Suyuqlik zarrachalarining hammasi bir xil tezlik bilan harakatlanganda bo‘ladigan sarf, haqiqiy harakat vaqtidagi sarfga teng bo‘ladigan tezlik o‘rtacha tezlik deb ataladi. 3.4-rasm, *a, b* larda haqiqiy tezlik epyurasi punktir chiziq bilan chizilib, punktirli strelkalarning uchini birlashtiradi. O‘rtacha tezlik epyurasi tutash chiziqlar

bilan chizilgan bo‘lib, tutash strelkalar uchini birlashtiradi. O‘rtacha tezlik ϑ harfi bilan

belgilanadi va sarfni harakat kesimiga bo‘lish yo‘li bilan topiladi:

$$\vartheta = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega}. \tag{3.4}$$

Bunda suyuqlik sarfi o‘rtacha tezlik orqali quyidagicha ifodalaniladi:

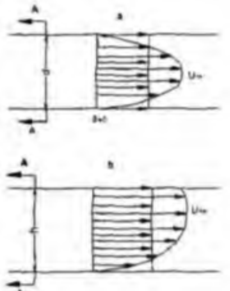
$$Q = \vartheta \omega. \tag{3.5}$$

Oqma ko‘ndalang kesimini (erkin sirtni hisobga olmaganda) uni chegaralovchi devorlar bilan tutashtiruvchi chiziq perimetri ho‘llangan perimetr deb ataladi. Oqim ko‘ndalang kesimining ho‘llanmagan qismi ho‘llangan perimetrga kirmaydi va uni hisoblashda chiqarib tashlanadi. Ho‘llangan perimetr χ harfi bilan belgilanadi.

Turli shakldagi nov (kanal) lar va quvurlar uchun ho‘llangan perimetr quyidagicha hisoblanadi:

to‘g‘ri to‘rtburchak nov uchun (3.4-rasm, *a*):

$$\chi = 2h + b,$$



3.4-rasm. Suyuqlik sarfi va o'rtacha tezlikka doir chizma.

bu yerda h – suyuqlik chuqurligi; b - nov (kanal)ning kengligi: trapetsiadal nov uchun (3.4-rasm, b).

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2},$$

bu yerda m = ctgα – qiyalik koeffitsiyenti;

uchburchak novlar uchun (1.32-rasm, v):

$$\chi = 2h\sqrt{1+m^2}$$

silindrik quvurlar uchun (1.32-rasm g) suyuqlik to'lib oqqanda

$$\chi = \pi d = 2\pi r;$$

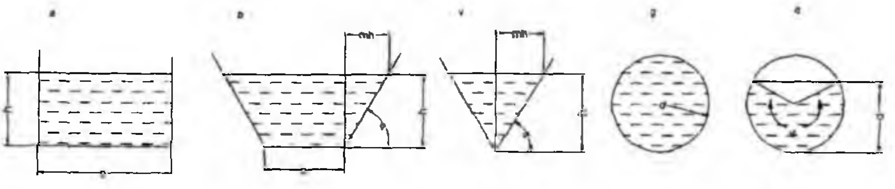
suyuqlik to'lmay oqqanda (1.32-rasm, d)

$$\chi = \frac{\varphi \pi d}{360},$$

bu yerda φ – markaziy burchak; d - quvurning ichki diametri; r - quvurning ichki radiusi.

Oqim harakat kesimi ω ning ho'llangan perimetri χ ga nisbati gidravlik radiusi deb ataladi va R bilan belgilanadi, ya'ni:

$$R = \frac{\omega}{\chi} \qquad (3.6)$$



3.5- rasm. Ho'llangan perimetrga doir chizma.

To'g'ri to'rtburchak novlar uchun:

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{hb}{2h+b}; \qquad (3.7)$$

Trapetsiadal novlar uchun

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{h(mh+b)}{b+2h\sqrt{1+m^2}}. \qquad (3.8)$$

Uchburchak novlar uchun

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{mh^2}{2h\sqrt{1+m^2}} = \frac{mh}{2\sqrt{1+m^2}}. \tag{3.9}$$

Silindrik quvurlar uchun:

suyuqlik to‘lib oqqanda $$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4} : \pi d = \frac{r}{2}, \tag{3.10}$$

suyuqlik to‘lmay oqqanda $$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\frac{d^2}{8}\left(\frac{\varphi\pi}{180} - \sin\varphi\right)}{\frac{\varphi\pi d}{360}} = \frac{d}{4}\left(1 - \frac{180\sin\gamma}{\varphi\pi}\right) \tag{3.11}$$

3.4. Suyuqlikning barqaror harakati uchun uzilmaslik tenglamasi

Yuqorida aytib o‘tilganidek, gidravlikada suyuqliklar tutash muhitlar deb qaraladi (ya’ni harakat fazosining istalgan nuqtasida suyuqlik zarrachasini topish mumkin). Elementar oqimcha va oqim uchun uzilmaslik tenglamasi suyuqlikning tutash oqimi (ya’ni har bir harakatdagi zarrachaning oldida va ketida cheksiz yaqin masofada albatta yana biror zarracha mavjudligi) ning matematik ifodasi bo‘lib xizmat qiladi. Suyuqlikning barqaror harakatini ko‘ramiz.

Elementar oqimcha uchun uzilmaslik tenglamasini chiqaramiz. Oqimda harakat o‘qi *l-l* bo‘lgan elementar oqimcha olamiz va uning 1 - 1 va 2 - 2 kesimlari orasidagi bo‘lagini tekshiramiz (3.6-rasm). 1-1 kesimdagi yuza $d\omega_1$ tezlik u_2, 2-2 kesimdagi yuza

$d\omega_2$, tezlik u_2 bo‘lsin va bu kesimlarda tegishli elementar sarflar $q_1 = u_1\, d\omega_1$ va $q_2 =$

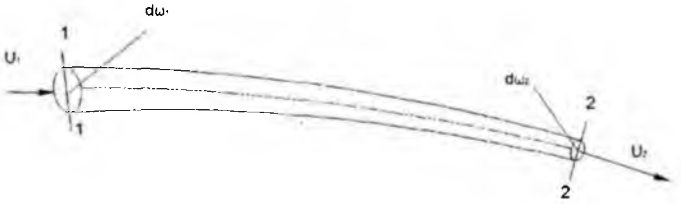
$u_2 d\omega_2$ ga teng bo‘lsin.

Bu holda 1-1 va 2 - 2 kesimlar orqali o‘tuvchi elementar sarflar teng bo‘ladi:

$$q_1 = q_2 \tag{3.12}$$

Buni isbotlash uchun quyidagi ikki holni ko‘ramiz:

1). $q_1 > q_2$ bo‘lsin. Bu holda 1-1 va 2-2 kesimlar o‘rtasida suyuqlik to‘planishi yoki elementar oqimcha devorlari orqali tashqariga chiqishi mumkin degan xulosa chiqadi. Biroq yuqorida aytilganidek, elementar oqimcha devorlaridan suyuqlik o'tmaydi va uning ko'ndalang kesimlari o'tkazmasdir.



3.6. rasm. Elementar oqimcha uchun uzilmaslik tenglamasini chiqarishga oid chizma.

Demak, bunday taxmin noto'g'ri ekanligi ko'rinib turibdi.

2) $q_1 < q_2$ bo'lsin. Bu holda 1-1 va 2-2 kesimlari orasida qayerdandir suyuqlik qo'shilib turishi yoki elementar oqimcha devorlari orqali ichkariga o'tib turishi kerak. Yuqoridagiga asosan bunday taxmin ham noto'g'ri ekanligi ko'rinadi. Shunday qilib, (3.12) tenglik to'g'ri ekanligi isbotlandi.

Elementar sarflar tengligidan quyidagi kelib chiqadi:

$$u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2 \qquad (3.13)$$

1-1 va 2-2 kesimlar ixtiyoriy tanlab olinganligi uchun elementar oqimchaning xohlagan kesimi uchun elementar sarf teng bo'ladi, ya'ni

$$u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2 = u_3 d\omega_3 ... u_n d\omega_n = const$$

(3.13) tenglama elementar oqimcha uchun uzilmaslik tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, elementar oqimchaning barcha kesimlarida elementar sarf bir xildir. (3.13) tenglamani quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{d\omega_2}{d\omega_1}.$$

Bundan elementar oqimchaning ixtiyoriy ikkita kesimidagi tezliklar bu kesimlar yuzasiga teskari proportsional ekanligi kelib chiqadi.

Oqim uchun uzilmaslik tenglamasini chiqaramiz. Buning uchun elementar oqimcha uchun olingan uzilmaslik tenglamasidan foydalanamiz. Oqim sarfi cheksiz ko'p oqimchalar sarfining yig'indisidan iborat ekanligini (3.6-rasm) nazarga olib, (3.13) tenglamaning chap va ung qismini ω_1 va ω_2 yuzalar bo'yicha olingan integrallar bilan

almashtiramiz

$$\int_{\omega_1} u_1 d\omega_1 = \int_{\omega_2} u_2 d\omega_2 .$$

(3.3) tenglamaga asosan

$$\int_{\omega_1} u_1 d\omega_1 = \vartheta_1\omega_1; \quad \int_{\omega_2} u_2 d\omega_2 = \vartheta_2\omega_2$$

bo'ladi. Shuning uchun

$$\vartheta_1\omega_1 = \vartheta_2\omega_2 \qquad (3.14)$$

Tanlab olingan 1–1 va 2–2 kesimlar ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$\vartheta_1\omega_1 = \vartheta_2\omega_2 = \vartheta_3\omega_3 = ... = \vartheta_n\omega_n = const$$

Bu oqim uchun uzilmaslik tenglamasidir. Undan ko'rinadiki, oqimning yo'nalishi bo'yicha ko'ndalang kesimlarning yuzasi va tezligi o'zgarib borishi mumkin. Lekin sarf o'zgarmaydi. (3.14) tenglamani quyidagicha ta'riflash va yozish mumkin, ya'ni *oqimning kesimlaridagi o'rtacha tezliklar tegishli kesimlarning yuzalariga teskari proportsionaldir:*

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

3.5. Ideal suyuqliklar uchun harakat tenglamasi. Suyuqlik harakati uchun Eyler tenglamasi

Yuqorida biz ideal va real suyuqliklar tushunchasi haqida to'xtalib, ularning bir-biridan farqini ko'rsatuvchi asosiy kattalik ichki ishqalanish kuchi ekanligini aytib o'tdik. Keyinchalik ichki ishqalanish kuchi tezlik gradiyentiga bog'liq bo'lishini ta'kidladik.

Gidrostatika bo'limida suyuqliklar muvozanat holatining tenglamasini chiqarganimizdek, ularning harakati uchun ham umumiylashgan tenglama chiqarishimiz mumkin. Quyida biz ideal suyuqliklar uchun shunday tenglama chiqarish bilan shug'ullanamiz. Suyuqlik harakat qilayotgan fazoda tomonlari *dx, dy, dz* bo'lgan elementar hajm ajratib olamiz (3.6-rasmga qarang). U holda hajmga *Ox, Oy, Oz* o'qlari yo'nalishida ta'sir etuvchi kuchlar gidrostatikada suyuqliklar asosiy tenglamasini chiqarganimizdagidek ifodalanadi. Bu yerda farq suyuqlik harakatda bo'lganligi uchun bosim kuchlaridan tashqari inertsiya kuchlari ham mavjudligidir. Shuning uchun gidrostatikada suyuqlikning muvozanat shartlaridan foydalangan bo'lsak, bu yerda Dalamber printsipidan foydalanamiz. U holda birlik massaga ta'sir etuvchi inertsiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi *x, y* va *z* o'qlariga quyidagi proektsiyalarga ega bo'ladi:

$$\alpha_x = \frac{du_x}{dt}; \ \alpha_y = \frac{du_y}{dt}; \ \alpha_z = \frac{du_z}{dt} \tag{3.15}$$

Birlik massaga ta'sir etuvchi bosim kuchlarining teng ta'sir etuvchilari

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.16}$$

bo'ladi. Shuningdek, og'irlik kuchlari uchun *x, y* va *z* o'qlaridagi proektsiyalar

$$X, \ Y, Z. \tag{3.17}$$

Endi *x, y* va *z* o'qlari bo'yicha Dalamber printsipini qo'llasak quyidagi differentsial tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right| \tag{3.18}$$

Bu tenglamalar sistemasi ideal suyuqliklar harakatining differentsial tenglamasi deyiladi. U birinchi marta Eyler tomonidan suyuqliklar harakatini tekshirish uchun taklif qilingani uchun (1755 y) Eyler tenglamasi deb ham yuritiladi.

Yuqoridagi sistema uchta differentsial tenglamadan iborat bo'lib, noma'lumlar soni to'rtga: u_x, u_y, u_z, p. Matematikada ko'rsatilishicha bunday holda yana bitta tenglama kerak bo'ladi. Ana shu to'rtinchi tenglama sifatida suyuqliklar harakatining uzilmaslik tenglamasini differentsial shaklda yoziladi va u siqilmaydigan suyuqliklar uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \qquad (3.19)$$

Oliy matematika kursidan ma'lumki, ixtiyoriy vektor proyektsiyalarining tegishli koordinatalar bo'yicha hosilalari yig'indisi divergentsiya deyiladi. U holda,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=div\overline{U}$$

Buni nazarga olsak, (3.19) qisqacha quyidagicha yoziladi:

$$div\overline{U}=0$$

Murakkab funktsiyaning to'liq differentsiali haqidagi qoidaga asosan

$$\frac{du_x}{dt}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}, \qquad (3.20)$$

lekin koordinatalardan vaqt bo'yicha hosilalar tezlik proyektsiyalarini beradi, ya'ni

$$\frac{\partial x}{\partial t}=u_x; \quad \frac{\partial y}{\partial t}=u_y; \quad \frac{\partial z}{\partial t}=u_z. \qquad (3.21)$$

Buni nazarda tutgan holda (3.20) ni quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{du_x}{dt}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+U_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}. \qquad (3.22)$$

Shuningdek, u_y, u_z funktsiyalarining vaqt bo'yicha to'liq hosilalarini ham quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{du_y}{dt}=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}, \qquad (3.23)$$

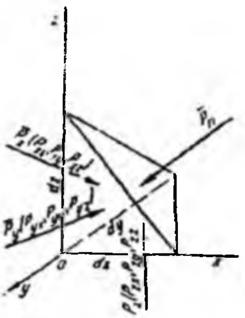
$$\frac{du_z}{dt}=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}. \qquad (3.24)$$

(3.22), (3.23), (3.24) larni (3.18) tenglamaga qo'yib, ideal suyuqliklar differentsial tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \qquad (3.25)$$

3.6. Real suyuqliklarda ichki kuchlar. Nave-Stoks tenglamasi

Real suyuqliklarda gidrodinamik bosim mavjud bo‘lib, harakat yo‘q bo‘lgan holda u gidrostatik bosimga aylanadi. Gidrodinamik bosimning xossalari gidrostatik bosim xossalariga qaraganda umumiyroqdir. Gidrodinamik bosim suyuqlikdagi ichki kuchlarni ifodalovchi va zo‘riqish kuchlari deb ataluvchi kuchlar tarkibiga kiradi.



3.7- rasm. Real suyuqliklarda zo‘riqish tenzorini tushuntirishga doir chizma

Suyuqlik ichida joylashgan biror elementar hajmni kuzatsak, unga tashqaridagi suyuqlik massasi ma’lum bir kuch bilan ta’sir qiladi. Ana shu kuch zo‘riqish kuchi deyiladi. Bu kuchni to‘laroq ko‘z oldimizga keltirish uchun tomonlari *dx, dy, dz* ga teng bo‘lgan tetraedr ko‘rinishidagi elementar hajm ajratib olamiz (3.7-rasm). U holda tetraedrning qiya sirtiga tashqaridagi suyuqlik $\bar{p}_n$ kuch bilan ta’sir qiladi. Olingan elementar hajm harakat vaqtida o‘z holatini saqlashi uchun unga teng ta’sir etuvchisi $\bar{p}_n$ kuchiga teng va qarama-qarshi yo‘nalgan quyidagi uchta kuch ta’sir qiladi: tetraedrning *yOz* tekislikda yotgan yuzasi bo‘yicha $\bar{p}_x$ kuchi, *xOz* tekisligida yotgan yuzasi bo‘yicha p_z kuchi.

Bu kuchlarning har biri *x, y* va *z* o‘qlari bo‘yicha proyektsiyaga ega:

$$\bar{p}_x\{p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}\}$$
$$\bar{p}_y\{p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}\}$$
$$\bar{p}_z\{p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}\}$$

Shunday qilib, *P* kuchni to‘qqizta kuch bilan almashtirish mumkin bo‘ladi. Bunday xususiyatga ega bo‘lgan kattaliklar tenzor deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\bar{p}_n \begin{vmatrix} p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} \\ p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} \\ p_{zx}, p_{zy}, p_{z} \end{vmatrix} \qquad (3.26)$$

Bu kuchlardan uchtasi p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} tetraedr yon sirtlariga normal bo'yicha yo'nalgan bo'lib, ular zo'riqish tenzorining normal tashkil etuvchilari deyiladi. Tenzorning qolgan oltita tashkil etuvchisi sirtlarga urinma bo'yicha yo'nalgan bo'lib, zo'riqish tenzorining urinma tashkil etuvchilari deyiladi. Urinma tashkil etuvchilar quyidagi xossaga ega bo'ladi:

$$p_{xy} = p_{yx}; p_{xz} = p_{zx}; p_{yz} = p_{zy}$$

Shuning uchun, p tenzori simmetrik tenzor deb ataladi. Bu xossaning isboti maxsus kurslarda keltirilgan bo'lib, biz u to'g'risida to'xtalib o'tirmaymiz. Shuningdek, tenzorning komponentlarini tushuntirishlarsiz, tezlik va qovushoqlik koeffitsiyenti orqali ifodasini keltiramiz:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial_x} \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ p_{xy} &= p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \\ p_{xz} &= p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ p_{yz} &= p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \end{aligned} \qquad (3.27)$$

bu yerda p – gidrodinamik bosim.

Bu yerda biz $\bar{p}_n$ tenzori komponentalarini siqilmaydigan suyuqliklar uchun yozdik. Bu ifodalarni ilgari aytib o'tilgan Nyuton gipotezasiga qiyoslab, umumlashgan Nyuton gipotezasi deb ataladi. Bu holda avvalgi paragrafdagi kabi harakat tenglamasini tuzish mumkin bo'ladi. Tomonlari *dx, dy, dz* ga teng bo'lgan parallelepiped ko'rinishida elementar hajm olsak (3.7-rasmga q.) U holda *Ox, Oy, Oz* yo'nalishida og'irlik va inertsiya kuchlarini hisobga olmaganimizda, uchta kuch ta'sir qiladi:

Ox bo'yicha p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}

Ou bo'yicha p_{xy}, p_{yy}, p_{zy}

Oz bo'yicha p_{xz}, p_{yz}, p_{zz}.

Demak, parallelepipedning (3.7-rasmga q.) *Ox* o'qiga tik bo'lgan yon yoqlari bo'yicha ta'sir qiluvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi quyidagiga teng:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}$$

Oy o‘qiga tik bo‘lgan yon yoqlari bo‘yicha

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}$$

Oz o‘qiga tik bo‘lgan yon yoqlari bo‘yicha

$$\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}$$

Endi, oldingi paragrafdagi kabi Dalamber printsipidan foydalanib harakat tenglamasini tuzamiz. U quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{aligned}
\frac{du_x}{dt} &= X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\\
\frac{du_y}{dt} &= Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\\
\frac{du_z}{dt} &= Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Olingan tenglamaga (3.22), (3.23), (3.24) va (3.25) munosabatlarni kiritsak, real suyuqliklarning harakat tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} &= X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)\\
\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} &= Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)\\
\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} &= Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Bu hosil bo‘lgan tenglamalar sistemasi siqilmaydigan suyuqliklar uchun Nave-Stoks tenglamasi deyiladi. (3.29) sistema uchta tenglamadan iborat bo‘lib noma’lumlar soni to‘rtta; u_x, u_y, u_z, p. Shuning uchun real suyuqliklar harakatini tekshirishda bu sistemaga (3.19) tenglamani qo‘shib yechiladi.

Amaliy mashg‘ulotlarni bajarishga doir ko‘rsatma:

Masala. Siqilmaydigan suyuqlikning tezlik maydoni quyidagi potentsialga: $\varphi = 4(x^2 - u^2)$ ega bo‘lishi mumkinmi?

***Yeshimi*:** suyuqlikning tezlik maydoni potentsialga ega bo‘lishi uchun Laplas tenglamasidan foydalanamiz:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

U holda

$$\varphi = 4(x^2 - y^2);\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 8$$

$$\varphi = 4(x^2 - y^2);\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 8$$

Bu yerda $\nabla^2\varphi = 8 - 8 = 0$

Demak, tezlik maydoni berilgan potentsialga ega bo'lishi mumkin.

Mustaqil yechishga doir masalalar:

1. Agar kesimlardagi harakat kesimining yuzasi $\omega_1 = 0{,}5$ m^2; $\omega_2 = 0{,}7$ m^2 va $\omega_3 = 0{,}4$ m^2 bo'lib, $V_3 = 0{,}8$ m/s bo'lganda, oqim sarfi va o'rtacha tezligini aniqlang.

2. To'g'ri burchakli to'rtburchak shaklidagi ketma-ket ulangan quvurlarning gidravlik elementlarini (sarf, o'rtacha tezlik, gidravlik radius, ho'llangan perimetr) aniqlang: $h_1 = 1{,}0$ m; $b_1 = 1{,}5$ m; $h_2 = 1{,}2$ m; $b_2 = 1{,}8$ m, $V_2 = 0{,}5$ m/s bo'lsin.

3. Oqim harakat tezligining proyektsiyasi berilgan: $u_x = 8\ x$; $u_u = -8\ u$. Oqim chizig'ining trayektoriyasini toping.

4. Oqim trayektoriyasi tenglama orqali berilgan bo'lsa, uning 10 sekunddan keyingi tezligini aniqlang.

5. Tajribalar asosida olingan tezlik proyektsiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ldi: $u_x = 5xy + 2$; $u_y = 2x - 5xy$. Tajriba to'g'ri o'tkazilganmi?

3.7. Elementar oqimcha uchun Bernulli tenglamasi

Yuqorida keltirilgan Eyler va Nave-Stoks tenglamalar sistemalarini yechish yo'li bilan suyuqlik harakatlanayotgan fazoning har bir nuqtasidagi tezlik va bosimni topish mumkin. Lekin bu sistemalarni yechish katta qiyinchiliklar bilan amalga oshiriladi, ko'p hollarda esa hatto yechish mumkin emas. Shuning uchun gidravlikada, ko'pincha, o'rtacha tezlikni topish bilan chegaralanishga to'g'ri keladi. Buning uchun, odatda, Bernulli tenglamasidan foydalaniladi. Biz bu yerda Bernulli tenglamasini ikki xil usulda chiqarishni ko'rsatamiz.

Birinchi usul Eyler tenglamasidan foydalanish yo'li bilan amalga oshiriladi. Buning uchun (3.18) sistemaning birinchi tenglamasini *dx* ga, ikkinchi tenglamasini *dy* ga, uchinchi tenglamasini *dz* ga ko'paytiramiz va hosil bo'lgan uchta tenglamani qo'shamiz. Natijada quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{du_x}{dt}dx + \frac{du_y}{dt}dy + \frac{du_z}{dt}dz = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) \quad (3.30)$$

(3.21) munosabatdan ko'rinib turibdiki,

$$dx = u_x dt; \;\; dy = u_y dt; \;\; dz = u_z dt$$

Shu munosabatdan foydalanib. (3.30) tenglamaning chap tomonini quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}u_x dt + \frac{\partial u_y}{\partial t}u_y dt + \frac{\partial u_z}{\partial t}u_z dt = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2}d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \quad (3.31)$$

lekin

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

bo'lgani uchun (3.30) tenglama chap tomonining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{1}{2}d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2}d(u^2) \quad (3.32)$$

(3.30) ning o'ng tomonidagi $Xdx + Ydy + Zdz$ biror kuch potentsialining to'liq differentsialidir. Agar shu potentsialni $F = f(x, y, d)$ bilan belgilasak, u holda quyidagiga ega bo'lamiz

$$Xdx + Ydy + Zdz = dF \quad (3.33)$$

Odatda, suyuqlikka ta'sir qiluvchi massa kuch og'irlik kuchidir. Bu holda dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha bo'ladi:

$$F = -gz \quad (3.34)$$

(3.30) tenglamaning o'ng tomonida yana bosim bilan ifodalangan munosabat bo'lib, u bosimning to'liq differentsialini ifodalaydi, ya'ni

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp \quad (3.35)$$

(3.32), (3.33), (3.34) va (3.35) larni (3.30) tenglamaga qo'ysak, u quyidagi ko'rinishga keladi

$$\frac{1}{2}d(u^2)+\frac{1}{\rho}dp+d(gz)=0$$

Hosil bo‘lgan tenglamani elementar oqimchaning 1-1 kesimidan (3.8-rasmga q.) 2-2 kesimigacha integrallasak, quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{u_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2 \tag{3.36}$$

Bu tenglikdagi har bir had massa birligiga keltirilgan. Agar uni kuch birligiga keltirsak, ya’ni g ga ikki tomonini bo‘lib yuborsak, u holda $\rho g=\gamma$ ni hisobga olib, quyidagini olamiz:

$$\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2 \tag{3.37}$$

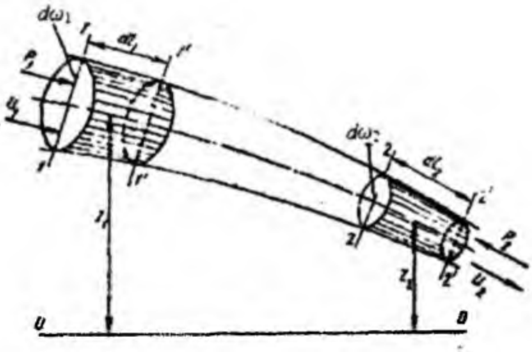
Oxirgi tenglama 1738 y. Bernulli tomonidan olingan bo‘lib, uning nomi bilan ataladi va gidravlikada harakatning asosiy tenglamasi bo‘lib xizmat qiladi. Bu tenglama ixtiyoriy ikkita kesim uchun olingan bo‘lib, bu kesimlarning elementar oqimcha yo‘nalishi bo‘yicha qayerda olinishining ahamiyati yo‘q. Shuning uchun Bernulli tenglamasini quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$\frac{u^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z=const \tag{3.38}$$

Ko‘rinib turibdiki, Bernulli tenglamasida asosan $z,\frac{p}{\gamma},\frac{u^2}{2g}$ kattaliklarning yig‘indisi o‘zgarmas ekan. Shunday qilib, bu tenglama tezlik u, bosim p, zichlik ρ o‘rtasidagi munosabatni ifodalaydi.

D. Bernullining o‘zi yuqoridagi tenglamani kinetik energiyaning o‘zgarishi qonunidan keltirib chiqargan bo‘lib, biz keltirgan usul esa Eyler tomonidan qo‘llanilgan.

Ikkinchi usul kinetik energiyaning o‘zgarish qonunidan foydalanib bajariladi. Harakat o‘qi 1 - 1 bo‘lgan biror elementar oqimchaning 1 -1 va 2-2 kesimlar bilan ajratilgan bo‘lagini olamiz. U holda bu bo‘lak dt vaqtda harakat qilib, 1' – 1` va 2'-2' kesmalari orasidagi holatga keladi (3.8-rasm). 1-1 kesimning yuzasi $d\omega_1$ bu yuzaga ta’sir qiluvchi kuch P_1 va tezlik u_1 bo‘lsin. 2-2 kesimning yuzasi esa $d\omega_2$, unga ta’sir qiluvchi kuch P_2, tezlik esa u_2 bo‘lsin. Kinetik energiyaning o‘zgarish qonunini elementar oqimchaning ana shu harakatdagi bo‘lagiga tatbiq qilamiz.



3.8- rasm. Bernulli tenglamasini keltirib chiqarishga doir chizma.

Bu qonun bo‘yicha biror jism harakati vaqtida uning kinetik energiyasining o‘zgarishi, shu jismga ta’sir qilayotgan kuchlarning bajargan ishlarining yig‘indisiga tengdir. Bu gapning matematik ifodasi quyidagicha bo‘ladi:

$$d\left(\frac{m_1 u_1^2}{2}\right)=\sum Pl \qquad (3.39)$$

bu yerda $d\left(\frac{mu^2}{2}\right)$ – kinetik energiyaning dt vaqtda o‘zgarishi; $\sum Pl$ – barcha kuchlar bajargan ishlarning yig‘indisi. Endi elementar oqimcha bo‘lagining dt vaqt ichida 1-1 va 2-2 kesimlar orasidagi holatdan 1'-1' va 2'-2' kesimlar orasidagi holatga kelgandagi kinetik energiyasining o‘zgarishini ko‘ramiz. Harakat barqaror bo‘lgani uchun bu o‘zgarish 1 - 1 va 1` - 1' orasidagi bo‘lak bilan 2 - 2 va 2' - 2' orasidagi bo‘lak kinetik energiyalari ayirmasiga teng.

1 - 1 va 1` - 1` orasidagi bo‘lakning kinetik energiyasi (uning massasi m_1 bo‘lsa) $\frac{m_1 u_1^2}{2}$ ga teng bo‘ladi. 2-2 va 2'-2' orasidagi bo‘lakning kinetik energiyasi esa $\frac{m_2 u_2^2}{2}$ ga teng. Demak ko‘rilayotgan 1 - 1 va 2 - 2 orasidagi bo‘lakning kinetik energiyasi dt vaqtda quyidagi miqdorga o‘zgarar ekan:

$$\frac{m_2 u_2^2}{2}-\frac{m_1 u_1^2}{2} \qquad (3.40)$$

Ikkinchi tomondan, 1 -1 va 1' - 1` orasidagi bo‘lakning massasi uning hajmi $dS_1 dl_1$ ning zichlikka ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$m_1=\rho d\omega_1 dl_1.$$

Shuningdek, 2-2 va 2' - 2' orasidagi bo‘lakning massasi

$$m_2 = \rho d\omega_2 dl_2.$$

dl_1 va dl_2 – dt vaqt ichida 1 -1 va 2 - 2 kesimlarining yurgan yo‘lini ko‘rsatadi, shuning uchun

$$dl_1 = u_1 dt, \ \ dl_2 = u_2 dt \tag{3.41}$$

u holda m_1 va m_2 uchun quyidagi munosabatni olamiz;

$$m_1 = \rho d\omega_1 u_1 dt, \ \ m_2 = \rho d\omega_2 u_2 dt$$

Bu munosabatni (3.40) ga qo‘ysak va uzilmaslik tenglamasidan $q = u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2$ ekanligini nazarga olsak, kinetik energiyaning o‘zgarishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{m_2 u_2}{2} - \frac{m_1 u_1}{2} = \rho \frac{qdtu_2^2}{2} - \rho \frac{qdtu_1^2}{2} = \rho qdt\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}\right) \tag{3.42}$$

Endi, bajarilgan ishlarni tekshiramiz. Ular 1-1 va 2-2 kesimlarga ta’sir qiluvchi gidrodinamik kuchlarning va og‘irlik kuchining bajargan ishlaridir. Elementar oqimchaning yon sirtlariga ta’sir qiluvchi bosim kuchining bajargan ishi esa nolga teng ekanligi harakatning barqarorligidan ko‘rinadi.

1-1 kesimga ta’sir etuvchi p_1 bosimning bajargan ishini A_1 2-2 kesimga ta’sir etuvchi p_2 bosimning bajargan ishini A_2 bilan belgilaymiz. U holda, 1. 35- rasmdan ko‘rinib turibdiki,

$$A_1 = p_1 d\omega_1 dl_1$$
$$A_2 = p_2 d\omega_2 dl_2$$

(3.41) nazarga olsak va uzilmaslik tenglamasidan foydalansak, quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$A_1 = p_1 qdt; \ \ A_2 = p_2 qdt \tag{3.43}$$

Og‘irlik kuchi bajargan ishni A_3 deb belgilaymiz. Bu ish (1-1 va 2-2 kesimlar orasidagi bo‘lak o‘z holatini saqlagani uchun) 1-1 va 1`- 1` orasidagi bo‘lak bilan 2-2 va 2'-2' orasidagi bo‘laklar og‘irliklarini ular markazlarining vertikal o‘qi bo‘yicha holatlari z_1 va z_2 ning ayirmasiga ko‘paytirilganiga teng, ya’ni

$$A_3 = G(z_1 - z_2),$$

lekin

$$G = \gamma d\omega_1 dl_1 = \gamma d\omega_1 u_1 dt = \gamma qdt$$

bo‘lgani uchun

$$A_3 = \gamma q dt(z_1 - z_2). \tag{3.44}$$

Endi, (3.42), (3.43) va (3.44) larni (3.39) ga qo'ysak, elementar oqimcha uchun kinetik energiyaning o'zgarish qonunini olamiz

$$\rho q dt\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}\right) = p_1 q dt - p_2 1 dt + \gamma q dt(z_1 - z_2)$$

bu yerda p_2 kuch suyuqlik harakatiga teskari yo'nalgan bo'lgani uchun tenglamaning o'ng tomonidagi ikkinchi had (ya'ni A_2) manfiy ishora bilan olindi. Oxirgi tenglamaning ikki tomonini $\gamma q dt$ ga bo'lsak:

$$\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + z_1 - z_2.$$

Bir xil indeksli hadlarni gruppalab joylashtirsak, Bernulli tenglamasi hosil bo'ladi:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2. \tag{3.45}$$

Shunday qilib, elementar oqimcha uchun Bernulli tenglamasi kinetik energiyaning o'zgarish qonunini ifodalar ekan.

3.8. Bernulli tenglamasining geometrik, energetik va fizik mazmunlari

Bernulli tenglamasining har bir hadi o'zinnng geometrik va energetik mazmunlariga ega. Buni aniqlash uchun biror elementar oqimcha olib, uning 1-1, 2- 2 va 3 - 3 kesimlarini ko'ramiz (3.9-rasm). Bu kesimlarning og'irlik markazi biror 0-0 tekislikdan z_1, z_2 va z_3 masofalarda bo'lsin. Bular qiyosiy tekislik 0-0 dan elementar oqimchaning geometrik balandliklarini ko'rsatadi. Endi olingan 1-1, 2 - 2 va 3 - 3 tekisliklar markazida pezometr (to'g'ri shisha naycha) va uchi egilgan shisha naychalar o'rnatamiz. Bu holda pezometrlarda suyuqlik kesimlar og'irlik markaziga nisbatan ma'lum balandliklarga ko'tariladi. Bu ko'tarilish gidrostatika qismida ko'rganimizdek kesimlarda

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma}, \quad h_2 = \frac{p_2}{\gamma}, \quad h_3 = \frac{p_3}{\gamma}$$

ga teng bo'ladi.

h_1, h_2, h_3 lar pezometrik balandliklar deb ataladi. Odatda, pezometrlar yordamida quvurlar va suyuqlik harakat qilayotgan boshqa idishlarda gidrodinamik bosim o'lchanadi.

Uchi egilgan shisha naychalarda suyuqlik pezometrlardagiga qaraganda balandroqqa ko‘tariladi. Buning sababi shundaki, uchi egilgan shisha naylarda uning egilgan uchi suyuqlik harakati yo‘nalishida bo‘lib, gidrodinamik bosimga qo‘shimcha suyuqlik tezligiga bog‘liq bo‘lgan, bosim paydo bo‘ladi. Bunda suyuqlik zarrachalarining inertsiya kuchi qo‘shimcha bosimga sabab bo‘ladi. Uchi, egilgan shisha naychalardagi balandlik quyidagilarga teng:

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g}; \quad h_2 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}; \quad h_3 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{u_3^2}{2g}$$

Pezometrdagi suyuqlik balandligi bilan uchi egilgan shishalardagi balandlik farqi

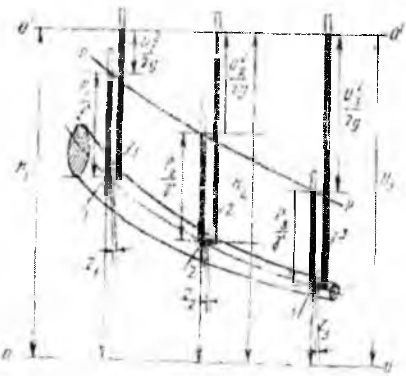
$$h_1' - h_1 = \frac{u_1^2}{2g}; \quad h_2' - h_2 = \frac{u_2^2}{2g}; \quad h_3' - h_3 = \frac{u_3^2}{2g}$$

larga teng bo‘ladi va tezlik napori (balandligi) deyiladi.

Shunday qilib, geometrik nuqtai nazardan Bernulli tenglamasining hadlari quyidagicha ataladi:

$\frac{u_1^2}{2g}, \frac{u_2^2}{2g}, \frac{u_3^2}{2g}$ – suyuqlikning tegishli kesimlaridagi tezlik napori (balandligi):

$\frac{p_1}{\gamma}, \frac{p_2}{\gamma}, \frac{p_3}{\gamma}$ – pezometrik balandliklar;



3.9-rasm. Bernulli tenglamasining geometrik, energetik va fizik mazmunlariga doir chizma.

z_1, z_2, z_3 – geometrik balandliklar, tegishli kesimlarning og‘irlik markazi 0-0 – tekisligidan (taqqoslash tekisligidan) qancha balandlikda turishini ko‘rsatadi.

$\frac{u^2}{2g}, \frac{p}{\gamma}, z$ larning birliklari uzunlik birliklariga tengdir.

Pezometrlardagi suyuqlik balandliklarini birlashtirsak, hosil bo'lgan chiziq, **pezometrik chiziq** deyiladi.

Bernulli tenglamasidan tezlik (napori) balandligi, pezometrik va geometrik balandliklarining umumiy yig'indisi o'zgarmas miqdor bo1lib, u 1.36-rasmda 0'-0' shizig'i bilan belgilanadi va suyuqlikning napor (dam) tekisligi deb ataladi.

Gidrodinamikada bu uchta balandliklar $\frac{u^2}{2g}, \frac{p}{\gamma}, z$ ning yig'indisi suyuqlikning to'liq napori (dami) deb ataladi va H bilan belgilanadi:

$$H = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = const.$$

Bular ideal elementar oqimchalar uchun Bernulli tenglamasining geometrik ma'nosini bildiradi. Uning energetik ma'nosi kinetik energiyaning o'zgarish qonuni bo'yicha chiqarilishiga asoslangan. Boshqacha aytganda, Bernulli tenglamasi suyuqliklar uchun energiyaning saqlanish qonunidir. Bernulli tenglamasi (3.45) ning chap tomoni elementar oqimchaning 1-1 kesimidagi to'liq solishtirma energiya bo'lib, u 2-2 kesimdagi to'liq solishtirma energiyaga teng yoki umuman o'zgarmas miqdordir.

Bu yerda *solishtirma energiya* deb og'irlik birligiga to'g'ri kelgan energiya miqdoriga aytamiz. Bu aytilganlarga asosan Bernulli tenglamasi hadlarining energetik yoki fizik ma'nosi quyidagicha bo'ladi:

$\frac{u_1^2}{2g}, \frac{u_2^2}{2g}, \frac{u_3^2}{2g}$ – elementar oqimchaning 1-1, 2-2, 3-3 kesimlarga tegishli solishtirma kinetik energiyasi;

$\frac{p_1}{\gamma} + z_1, \frac{p_2}{\gamma} + z_2, \frac{p_3}{\gamma} + z_3$ – elementar oqimcha kesimlari uchun solishtirma potentsial energiya;

$\frac{p_1}{\gamma}, \frac{p_2}{\gamma}, \frac{p_3}{\gamma}$ – kesimlarga tegishli bosim bilan ifodalanuvchi solishtirma energiya;

z_1, z_2, z_3 - 1-l, 2-2, 3-3 kesimlarga tegishli og'irlik bilan ifodalanuvchi solishtirma energiya.

Suyuqlik harakati vaqtida mexanikaning qonunlariga asosan, ish bajariladi. Shu bajarilgan ishlar bo'yicha Bernulli tenglamasini quyidagicha sharhlash mumkin: ikkita kesim uchun yozilgan Bernulli tenglamasi (3.45) shu ikki kesimda tegishli hadlarining ayirmalaridan tashkil topadi:

$\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}$ – kinetik energiyaning birlik og'irlik uchun o'zgarishi;

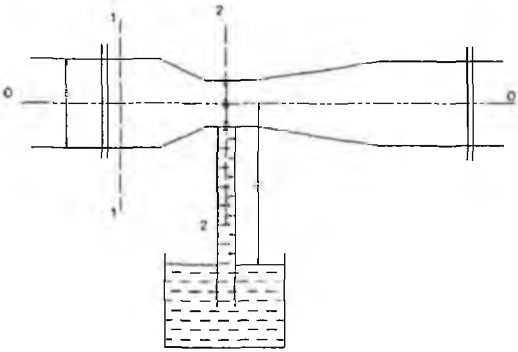
$\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ – bosim kuchi bajargan ishning birlik og'irlikka tegishli qismi.

$z_1 - z_2$ – og'irlik kuchi bajargan ishning birlik og'irlikka tegishli qismi.

Demak, suyuqlik harakat qilayotganda solishtirma kinetik va solishtirma potentsial energiyalar harakat davomida o'zgarib boradi, lekin to'liq solishtirma energiya o'zgarmas bo'ladi.

Amaliy mashg'ulotlarni bajarishga doir ko'rsatma

Masala. Struyali nasos yordamida suv $h = 0,5$ m chuqurlikdan ko'tarilmoqda. Agar quvur diametri $d = 100$ mm, 1-1 kesimdagi bosim $P_M = 40$ kPa, suv tezligi $\vartheta_1 = 1,12$ m/s bo'lsa, kameradagi quvur diametrini d_2 aniqlang Suv ideal deb qaralsin.(3.10-rasm).



3.10-rasm.

Yeshimi: 1-1 va 2-2 kesimlar uchun Bernulli tenglamasini yozamiz. Taqqoslash tekisligini quvur o'qi bo'ylab o'tkazamiz.

U holda d_2 ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$d_2 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V^2}} = 0,05 \text{ m}$$

Mustaqil yechishga doir masalalar:

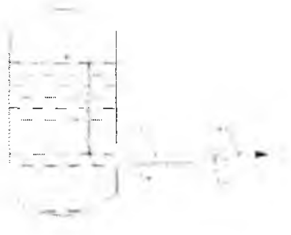
1. Rezervuardan suv diametri $d = 30$ mm bo'lgan quvur orqali atmosferaga oqib chiqmoqda, agar rezervuardagi manometrik bosim $P_M = 0{,}2$ atmosfera bo'lib, dam (napor)i $H = 1{,}5$ bo'lsa, quvurdagi suv sarfini aniqlang (3.11-rasm).

2. Suyuqlik ketma-ket ulangan har xil diametrli quvurlar orqali atmosferaga chiqmoqda. Agar ikkinchi quvurdagi tezlik $\vartheta_2 = 0{,}8$ m/s bo'lsa, birinchi quvurdagi tezlik $\vartheta_1 = 2$ m/s bo'lishi uchun, birinchi quvurdagi bosim qanday bo'lishi kerak (3.12-rasm).

3. Quvurdagi suv sarfini aniqlash uchun Venturi naychasidan foydalaniladi.

Agar quvurga o'rnatilgan pezometrlar farqi $h = 16$ sm bo'lib, quvur diametri $D = 20$ sm, naychaning diametri $d = 14$ sm bo'lganda quvurdan o'tayotgan sarfni aniqlang (3.13-rasm).

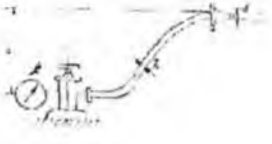
4. Agar naychaning diametri $d = 5$ sm, quvurning diametri $D = 100$ mm va quvurdagi bosim $P_1 = 0{,}4$ at bo'lsa, naychaga ulangan quvurda suv qaysi balandlikka ko'tariladi? (3.14-rasm)



3.11-rasm.

3.12-rasm.

3.13-rasm.



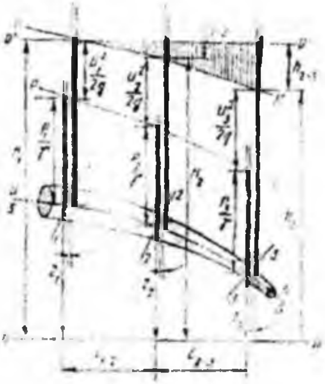
3.14-rasm

3.9. Real suyuqliklar elementar oqimchasi uchun Bernulli tenglamasi

Endi real suyuqlik elementar oqimchasi uchun Bernulli tenglamasining grafigini chizamiz Buning uchun harakat o'qi S - S, 1 - 1, 2 - 2 va 3 - 3 kesimlardagi tezliklar u_1, u_2, u_3, bosimlari p_1, p_2, p_3 bo'lgan elementar oqimcha olamiz. Bu oqimcha uchun kesimlarda pezometr va uchi egilgan shisha naycha olamiz. Pezometrlardagi suyuqlik balandliklarini tutashtirib, pezometrik chiziq (*P-P*) ni hosil qilamiz. Uchi egik naychalarda suyuqlik balandliklarini tutashtirib, suyuqlik bosimi (dami) shizig'i (*H-H*) ni hosil qilamiz. Qurilgan grafikni ideal suyuqlik elementar oqimchasi uchun olingan grafik (3.15-rasm) bilan solishtiramiz. Natijada ideal suyuqliklar uchun oqimchaning birinchi kesimidagi gidrodinamik bosimi H_1 ikkinchi va uchinchi kesimlardagi gidrodinamik bosimlarga tengligini, ya'ni $H_1 = H_2 = H_3 = const$ ekanligini real suyuqlik uchun birinchi kesimdagi gidrodinamik bosim H_1 ikkinchi va uchinchi kesimlardagi bosimlarga tengmasligini, ya'ni $H_1 \neq H_2 \neq H_3$ ekanligini ko'ramiz. 3.15-rasmga muvofiq bu tengsizlik quyidagicha ifodalanadi:

$$H_1 > H_2 > H_3$$

Demak, real suyuqlikning elementar oqimchasi harakat qilganda solishtirma energiyaning ma'lum bir qismi yo'qotilar ekan; birinchi va ikkinchi kesimlar orasidagi bu yo'qotishni h_{1-2} bilan belgilaymiz. Bunda indeks orasida yo'qotish bo'layotgan kesimlar nomerini ko'rsatadi. Masalan, ikkinchi va uchinchi kesim orasida yo'qotish h_{2-3} birinchi va uchinchi kesim orasidagi yo'qotish h_{1-3} va hokazo. Aytilgan yo'qotishning mohiyatini quyidagicha izohlash mumkin. Real suyuqlik elementar oqimchasi harakat qilayotganda ichki ishqalanish kuchi natijasida gidravlik qarshilik paydo bo'ladi va uni yengish uchun albatta ma'lum bir miqdorda energiya sarflash kerak.



3.15-rasm. Real suyuqliklar uchun Bernulli tenglamasining geometrik manosi.

Bu sarflangan energiya ko'rilayotgan harakat uchun tiklanmaydi. Yuqorida keltirilgan tengsizlik ana shu yo'qotilgan energiya hisobiga bo'ladi. Birinchi va ikkinchi kesimlar orasidagi yo'qotilgan solishtirma energiya gidravlik bosimlar farqiga teng:

$$h_{1-2} = H_1 - H_2.$$

Yuqorida ko'rilganga asosan

$$H_1 = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1; \quad H_2 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2,$$

bundan

$$h_{1-2} = \left(\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right).$$

natijada quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{1-2}. \qquad (3.46)$$

Olingan tenglama real suyuqliklar elementar oqimchasi uchun Bernulli tenglamasidir. Bu tenglama ideal suyuqlik elementar oqimchasidan o'ng tomondagi to'rtinchi hadi h_{1-2} bilan farq qiladi. Bu had 1-1 va 2-2 kesimlar orasida bosimning kamayishini ko'rsatadi. Ideal suyuqliklarda ichki ishqalanish kuchi hisobga olinmagani uchun yuqorida aytilgan had bo'lmaydi.

3.10. Real suyuqliklar oqimi uchun Bernulli tenglamasi. Koriolis koeffitsiyenti

Oqim cheksiz ko‘p elementar oqimchalardan tashkil topganligidan shu oqimchalar energiyalarining harakat kesimi bo‘yicha integralini olish yo‘li bilan oqim uchun Bernulli tenglamasini hosil qilish mumkin:

$$\int_{\omega_1}\frac{u_1^2}{2g}d\omega+\int_{\omega_1}\frac{p_1}{\gamma}d\omega+\int_{\omega_1}z_1d\omega=\int_{\omega_2}\frac{u_2^2}{2g}d\omega+\int_{\omega_2}\frac{p_2}{\gamma}d\omega+\int_{\omega_2}z_2d\omega+\int_{\omega_2}h_{1-2}d\omega. \qquad (3.47)$$

Oqimning har bir elementar oqimchasida tezlikni hisoblash qiyin bo‘lgani uchun (3.47) tenglamadagi integrallarni hisoblash ham juda qiyinlashadi. Shuni nazarga olib,

oqim uchun Bernulli tenglamasida tezliklarni o‘rtacha tezlik ϑ bilan almashtiriladi. Bu

esa Bernulli tenglamasi foydalaniladigan hisoblash ishlarida katta qulaylik tug‘diradi. Bu holda elementar oqimcha geometrik balandligi bo‘yicha integral oqimning harakat kesimi og‘irlik markazining geometrik balandligiga, bosim bo‘yicha integral esa ana shu geometrik balandlikdagi nuqtaga qo‘yilgan bosimga aylanadi. Elementar oqimchaning 1-1 va 2-2 kesimlarida bosimning kamayishi bo‘yicha integral ham oqim uchun bosimning o‘rtacha kamayish miqdoriga aylanadi. Solishtirma kinetik energiyaning integralini tezlikning o‘rtacha qiymati bo‘yicha kinetik energiya bilan almashtirsak, uning miqdori kamayib qoladi. Integral cheksiz ko‘p miqdorlarning yig‘indisi bo‘lgani uchun buni yig‘indilar kvadratlarining misolida ko‘ramiz. Masalan, u_1 = 10 m/s, u_2 = 11 m/s, u_3 =9 m/s, u_4 = 12 m/s, u_5 = 8 m/s bo‘lsin. U holda o‘rtacha tezlik:

$$\vartheta=\frac{u_1+u_2+u_3+u_4+u_5}{5}=10m/s,$$

tezliklar kvadratlarining o‘rtacha qiymati

$$\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2}{5}=\frac{510}{5}=102m^2/s^2,$$

o‘rta tezlikning kvadrati esa v^2 =100 m^2/s. Bundan ko‘rinib turibdiki, tezliklar kvadratlarining yig‘indisi o‘rtacha tezlik kvadratidan katta ekan. Shunday qilib, quyidagi tengsizlik to‘g‘ri ekanligini ko‘rish mumkin:

$$\int_{\omega}\frac{u^2}{2g}d\omega > \frac{u^2}{2g}\omega .$$

Bu tengsizlikni integrallash yo'li bilan ham isbotlash mumkin. (Bunday isbotni talabalarning o'zlari bajarishini taklif qilamiz). Bu xatoni tuzatish uchun Bernulli tenglamasining birinchi hadiga α koeffitsiyentini kiritamiz. Bu koeffitsiyent tezlikning bir tekis miqdorda bo'lmasligini ifodalaydi va Koriolis koeffitsiyenti deb ataladi. U holda

$$\alpha = \frac{\int_{\omega}\frac{u^2}{2g}d\omega}{\frac{v^2}{2g}\omega}.$$

Shunday qilib, yuqorida aytilganlarga asosan (3.47) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{\alpha_1 u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + H_{1-2}, \qquad (3.48)$$

bu yerda α_1, α_2 – birinchi va ikkinchi kesimlarda tezlikning notekis tarqalganini hisobga oluvchi koeffitsiyent; $H_{1\text{-}2}$ – birinchi va ikkinchi kesimlar orasida naporning (bosimning) kamayishi.

Oqim uchun Bernulli tenglamasida qolgan boshqa hadlar elementar oqimcha uchun Bernulli tenglamasida qanday atalsa, bu yerda ham shunday ataladi. Bu tenglama gidrodinamika masalalarini hal qilishda eng muhim tenglama bo'lib, u barqaror harakatlar uchun yozilgan va tezlik harakat kesimi bo'yicha qancha kam o'zgarsa, shuncha kam xatolik beradi.

3.11. Real gazlar oqimi uchun Bernulli tenglamasi

Odatda, harakat yo'nalishi bo'yicha bosim kamayib boradi. Suyuqliklarda hajmiy siqilish koeffitsiyenti β_p juda kichik bo'lgani uchun bu o'zgarish suyuqlikning fizik xossalariga ta'sir qilmaydi. Lekin gazlarda bosimning ozgina o'zgarishi ham uning parametrlariga ta'sir qiladi. Bundan tashqari, gazlarda suyuqliklarga qaraganda tezlik bir necha o'n baravar katta bo'ladi. Bu esa bosimga va gazning fizik xossalariga, birinchi galda uning solishtirma og'irligiga ta'sir qiladi. Ammo gaz oqimining ko'ndalang kesimi bo'yicha tezlik deyarli o'zgarmaydi. Shuning uchun gazlarda

$\alpha \approx 1$ bo‘ladi. Gazlar uchun tezlik, bosim, solishtirma og‘irlik tez o‘zgaradi uchun birinchi va ikkinchi kesim (3.16-rasm) orasidagi masofani cheksiz kichik Δl deb olamiz. U holda Bernulli tenglamasi differentsial ko‘rinishda quyidagicha yoziladi:

$$d\left(\frac{\vartheta^2}{2g}\right) + \frac{dp}{\gamma} + dz - dh_{1-2} = 0 \qquad (3.49)$$

bu yerda

$$d\left(\frac{\vartheta^2}{2g}\right) = \lim_{\Delta l \to 0}\left(\frac{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}{2g}\right),$$

$$d\left(\frac{p}{\gamma}\right) = \lim_{\Delta l \to 0}\left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right),$$

$$dz = \lim_{\Delta l \to 0}(z_1 - z_2).$$

Endi (3.49) tenglamadan integral olamiz. U holda (3.49) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\int d\left(\frac{\vartheta^2}{2g}\right) + \int d\frac{p}{\gamma} + \int dz - \int dh_{1-2} = const \qquad (3.50)$$

Bu tenglikda birinchi, uchinchi va to‘rtinchi integrallarni hisoblash oson:

$$\int d\left(\frac{\vartheta^2}{2g}\right) = \frac{\vartheta^2}{2g}; \quad \int dz = z; \quad \int dh_{1-2} = h_{1-2}.$$

Uchinchi integralni hisoblashda solishtirma og‘irlik bosimga bog‘liq ekanligini nazarga olish kerak bo‘ladi. Jarayonni politropik deb qarasak, u holda

$$\frac{p}{\gamma^n} = \frac{p_0}{\gamma_0^n}$$

bo‘ladi. Bu tenglikdan

$$\gamma = p^{\frac{1}{n}} \frac{\gamma_0}{p_0^{\frac{1}{n}}}, \qquad (3.51)$$

bu yerda n - politropiya ko‘rsatkichi; γ_0 – boshlang‘ich holatdagi solishtirma og‘irlik; p_0 – boshlang‘ich holatdagi bosim. Oxirgi munosabatdan foydalanib va γ_0, p_0 o‘zgarmas ekanligini hisobga olib, ikkinchi integralni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\int \frac{dp}{\gamma} = \int \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\gamma_0} = \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\gamma_0} \int \frac{dp}{p^{\frac{1}{n}}} = \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\gamma_0} \frac{p^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}.$$

(3.51) dan yana bir marta foydalansak, quyidagini olamiz:

$$\int \frac{dp}{\gamma} = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{\gamma} \frac{p^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}.$$

Natijada (3.40) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{\vartheta^2}{2g} + \frac{n}{n-1}\frac{p}{\gamma} + z - h_w = const \tag{3.52}$$

Tenglamani ikkita kesim uchun yozamiz:

$$\frac{\vartheta_1^2}{2g} + \frac{n}{n-1}\frac{p_1}{\gamma_1} + z_1 = \frac{\vartheta_2^2}{2g} + \frac{n}{n-1}\frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 + h_{1-2}. \tag{3.53}$$

Bu tenglama real gazlar oqimi uchun Bernulli tenglamasidir. Suyuqlik uchun Bernulli tenglamasi uchta qiymat ϑ, p, z ni bog'lagan bo'lsa, bu tenglama to'rtta qiymat ϑ, p, z, γ ni bog'laydi. Shuning uchun gazlar harakati tekshirilganda Bernulli tenglamasi (3.21) bilan birgalikda foydalaniladi.

3.12. Gidravlik va pezometrik qiyaliklar haqida tushuncha

Gidravlikada hisoblash ishlarini bajarishda gidravlik I va pezometrik I_p qiyaliklardan foydalaniladi.

Bosim chizig'ining uzunlik birligiga to'g'ri kelgan pasayishi gidravlik qiyalik deb ataladi.

1.38-rasmda oqim uchun bosim va pezometrik chiziqlar keltirilgan. Bu chiziqlar umumiy holda egri chiziq bo'lib, rasmda to'g'ri chiziq ko'rinishda tasvirlangan. Gidravlik qiyalikning ta'rifidan ko'rinib turibdiki, uning o'rtacha qiymati 1-1 va 2-2 kesimlar orasidagi qiyalik orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$I_{1-2} = \frac{\left(\frac{\alpha_1\vartheta_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{\alpha_2\vartheta_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right)}{l_{1-2}} = \frac{H_{1-2}}{l_{1-2}} \tag{3.54}$$

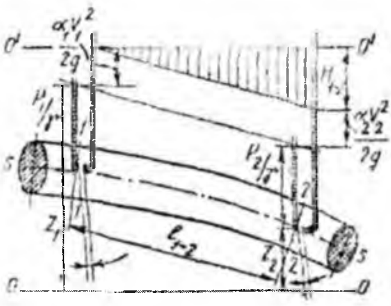
bu yerda l_{1-2} – birinchi va ikkinchi kesimlar orasidagi masofa; H_{1-2} – shu masofa orasida dam (bosim) ning pasayishi.

Agar bosim chizig‘i egri chiziq bo‘lsa, u holda gidravlik qiyalik differentsial ko‘rinishda yoziladi:

$$I = \frac{dH}{dl} = -\frac{d\left(\frac{\alpha\vartheta^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z\right)}{dl}$$

Pezometrik chiziqning uzunlik birligiga to‘g‘ri kelgan pasayishi pezometrik qiyalik deb ataladi. Birinchi va ikkinchi kesim orasidagi (3.15-rasm) o‘rtacha pezometrik qiyalik quyidagicha aniqlanadi:

$$I_{p_{1-2}} = \frac{\left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2\right)}{l_{1-2}} \quad (3.55)$$



3.16-rasm Gidravlik va pezometrik nishabliklar.

Pezometrik qiyalik I_p pezometrik chiziq egri chiziq bo‘lganda differentsial ko‘rinishda aniqlanadi:

$$I_p = -\frac{d\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)}{dl}.$$

Tekis harakat vaqtida tezlik o‘zgarmaganligi ($\vartheta_1 = \vartheta_2$) uchun gidravlik va pezometrik

qiyaliklar teng bo‘ladi.

Gidravlik yo'qotish haqida tushuncha. Gidravlik yo'qotishning turlari

Real suyuqliklarda ikki kesim orasida energiya yo'qotilishini $H_{1\text{-}2}$ bilan belgiladik. Bu yo'qotish suyuqliklardagi qovushoqlik kuchi hisobiga bo'ladi, ya'ni u shu kuchni yengishga sarf bo'ladi.

Quvurlardagi harakatni tekshirganimizda masala asosan ishqalanish kuchini yengish uchun sarf bo'lgan yo'qotishni hisoblashga keladi. Bu holda quvurning 1-1 va 2- 2 kesimlarining sirti teng bo'lgani uchun tezliklari ham teng bo'ladi (3.17-rasm), ya'ni harakat tekis bo'ladi. 1-1 va 2-2 kesimlar orasidagi suyuqlik ustuniga ta'sir qiluvchi kuchlar:

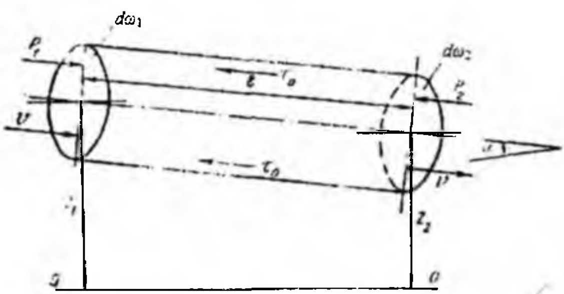
1) $P_1 = p_1$ va $P_2 = p_2\omega$ - bosim kuchlari;

2) $G = \gamma\omega_1$ – og'irlik kuchi;

3) $T = \tau\pi Dl$ – ishqalanish kuchidir.

1-1 va 2-2 kesimlar orasidagi suyuqlikning muvozanat holati tenglamasi unga ta'sir qilayotgan kuchlar orqali quyidagicha yoziladi:

$$P_1 - P_2 + G\sin\alpha - T = 0.$$



3.17- rasm. Gidravlik yo'qotish tushunchasiga doir.

$\sin\alpha = \frac{z_1 - z_2}{l}$ ekanligini hisobga olsak, yuqoridagi tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$p_1\omega - p_2\omega + \gamma\omega l \frac{z_1 - z_2}{l} + \tau\pi Dl = 0$$

Bundan tekis harakat uchun Bernulli tenglamasi kelib chiqadi:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{\tau}{\gamma}\frac{\pi Dl}{\omega}.$$

Bu tenglamani (3.48) tenglama bilan solishtirsak va uni tekis harakat ($v_1 = v_2$) uchun qo‘llasak, gidravlik yo‘qotish uchun quyidagi munosabatni olamiz:

$$h_{1-2} = \frac{\tau}{\gamma}\frac{\pi Dl}{\omega} \tag{3.56}$$

bu yerda l – oqim uzunligi; D – quvur diametri. Gidravlik yo‘qotish, odatda, ikki turga ajratiladi:

1. **Uzunlik bo‘yicha** (ishqalanish kuchiga sarf bo‘lgan) **yo‘qotish** oqim uzunligi bo‘yicha harakat hisobiga vujudga keladi, va uning uzunligiga bog‘liq bo‘ladi. Bu yo‘qotish (3.56) formula ko‘rinishida ifodalanadi.

2. **Mahalliy qarshilik** oqimning ayrim qismlarida notekis harakat hisobiga vujudga keladi. Notekis harakatni vujudga keltiruvchi qismlar quvur yoki o‘zanning kesim shakllari, o‘zgargan joylari (tirsaklar, to‘siqlar, keskin kengayishlar, keskin torayishlar, kranlar va h.) bo‘lib, bu yerdagi gidravlik yo‘qotish uzunlikka bog‘liq emas.

Umumiy gidravlik yo‘qotish bu ikki yo‘qotishning yig‘indisiga teng

$$H_n = H_l + H_m \tag{3.57}$$

bu yerda H_l – uzunlik bo‘yicha yo‘qotish; H_m – mahalliy qarshilik.

Gidravlik yo‘qotish suyuqlikning kinetik energiyasiga bog‘liq bo‘lib, energiya ortishi bilan ortadi, kamayishi bilan esa kamayadi. Shuning uchun gidravlik yo‘qotishni suyuqlik kinetik energiyasiga proportsional qilib olinadi.

3.14. Tezlik va sarf o‘lchash usullari hamda asboblari

Suyuqlik sarfini va tezligini o‘lchashning eng oson usuli hajmiy va og‘irlik usullaridir.

1. **Hajmiy usulda** tekshirilayotgan oqimdan suyuqlik maxsus darajalangan idish (menzurka) ga tushadi. Idishning to'lish vaqti sekundomer yordamida aniq o'lchanadi. Agar idishning hajmi V, o'lchangan vaqt T bo'lsa, hajmiy sarf quyidagiga teng bo'ladi:

$$Q = \frac{V}{T}.$$

Oqimning harakat kesimi ma'lum bo'lsa, uning tezligi (3.4) formula bilan aniqlanadi.

2. **Og'irlik usulida** biror idishga oqimdan suyuqlik tushiriladi. Tarozida o'lchash yo'li bilan idishdagi suyuqlikning og'irligi topiladi. Idishning to'lish vaqti T bo'lsa, og'irlik sarfi quyidagiga teng:

$$G = \frac{GV}{T}$$

Suyuqlikning hajmiy sarfi og'irlik bo'yicha sarfini solishtirma og'irlikka bo'lish yo'li bilan aniqlanadi:

$$Q = \frac{G}{\gamma}$$

Bu usullar, albatta, kichik miqdordagi sarflarni o'lchash uchun qo'llaniladi. Katta sarf-larni o'lchash uchun esa juda katta o'lchov idishlari kerak bo'ladi. Ikkinchidan, quvur va kanallarda sarfni yuqoridagi usul bilan o'lchaganda oqimning tuzilishi o'zgaradi va o'lchash natijasi katta xatolar bilan chiqadi. Shuning uchun ko'pincha quvurlar va kanallardagi sarf boshqa usullar bilan o'lchanadi.

3. **Venturi suv o'lchagichi** maxsus quvurdan suv o'tishiga asoslangan bo'lib, tuzilishi sodda va harakatlanuvchi qismlari yo'qdir (3.18-rasm). Bu asbob talabga qarab vertikal yoki gorizontal joylashtiriladi. Uning gorizontal holdagisini ko'ramiz.

Venturi suv o'lchagichi ikkita bir xil d_1 diametrli 1 va 2 quvur bo'laklaridan tashkil topgan bo'lib, ular 3 va 4 diffuzorlar hamda kichik d_2 diametrli quvur bo'lagi (patrubok) orqali tutashtirilgandir. Uning 1-1 va 2-2 kesimlariga pezometrik naychalar o'rnatilgan bo'lib, ular shu kesimlardagi bosimlar farqi h ni ko'rsatadi. Quvur gorizontal bo'lgani uchun ($z_1 = z_2$), 1-1 va 2- kesimlariga Bernulli tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\vartheta_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{\vartheta_2^2}{2} + \frac{p_2}{\gamma},$$

bundan

$$\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=\frac{u_2^2}{2g}-\frac{u_1^2}{2g}$$

lekin $\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=h$ bo'lgani uchun

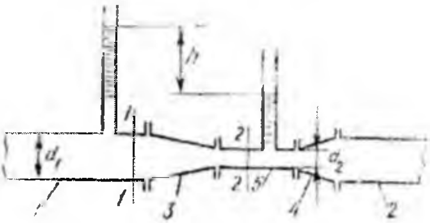
$$h=\frac{\vartheta_2^2}{2g}-\frac{\vartheta_1^2}{2g}$$

Uzilmaslik tenglamasi (3.14) ga asosan

$$\vartheta_1=\vartheta_2\frac{\omega_2}{\omega_1},$$

u holda

$$h=\frac{\vartheta_2^2}{2g}\left[1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right].$$



3.18- rasm. Venturi suv o'lchagichi

bundan 2-2 kesimdagi tezlikni topamiz:

$$\vartheta_2=\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}} \tag{3.58}$$

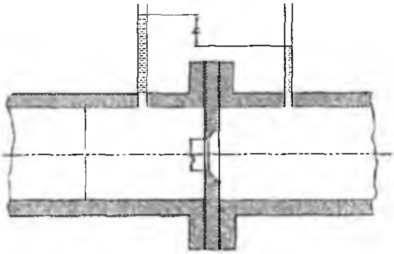
U holda suyuqlik sarfi quyidagicha aniqlanadi:

$$Q=\vartheta_2\omega_2=\omega_2\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}} \tag{3.59}$$

Bu formula ideal suyuqlik uchun chiqarilgan. Haqiqatda ikki kesim o'rtasida bosim pasayishi va tezliklarning kesim bo'yicha bir tekis tarqalmaganligi uchun yuqoridagi formula bo‘yicha olingan natija haqiqiy sarfdan farq qiladi. Shuning uchun sarf formulasiga tuzatma koeffitsiyent m ni kiritamiz:

$$Q = m\omega_2 \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}.$$

m koeffitsiyentining qiymati turli suv o‘lchagichlar uchun har xil bo‘lib, ular tegishli suv o‘lchagich uchun tajribada aniqlab



3.19- rasm Suv o‘lchagich shayba.

qo‘yiladi. Hisoblash ishlarida sarf, odatda, quyidagi soddalashtirilgan formula bilan hisoblanadi:

$$Q = c\sqrt{h}, \tag{3.60}$$

bu yerda

$$c = m\omega_2 \sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}$$

koeffitsiyent *suv o‘lshagich doimiysi* deb ataladi va har bir berilgan suv o‘lchagich uchun hisoblab qo‘yiladi.

4. **Suv o‘lchagich shayba (diafragma)** ikki quvur bo‘lagi o‘rtasiga o‘rnatilgan halqadan iborat bo‘lib (3.19- rasm) uning ichki aylanma teshigining chekkalari 45° burchak ostida qiyalangan yoki oqib o‘tuvchi oqimcha shaklida silliqlashgan (soplo ko‘rinishda) bo‘ladi. Halqaning ikki tomoniga ikki pezometr yoki differentsial manometr o‘rnatilgan bo‘lib, ular diafragmaning ikki tomonidagi bosimlar farqini aniqlashga yordam beradi.

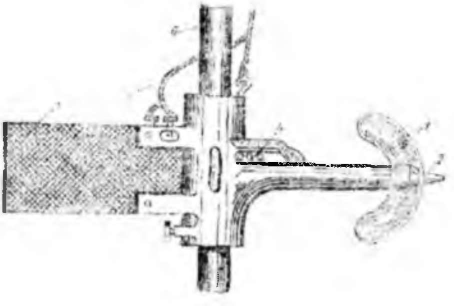
Sarf pezometrlardagi suyuqlik sathlarining farqi orqali, quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$Q = c_1\sqrt{h}. \tag{3.61}$$

s_1 koeffitsiyent har bir diafragma uchun tajriba asosida aniqlanadi.

5. Vertushka (pirildoq) va 1 2 ga o'rnatilgan aylanma kurakchalar 1 ga ega bo'lgan g'ildirak bo'lib, asosiy korpusga mahkamlanadi (3.20-rasm). Vertushka suv oqimiga to'g'ri yo'naltirilishi uchun korpus 4 ga qanotcha o'rnatilgan. Vertushkadan o'tkazgichlar 3 elektr qo'ng'iroq tortilgan bo'lib, kurakchalar aylanganda elektr zanjirini tutashtiradi va qo'ng'iroq jiringlaydi yoki maxsus schyotchik aylanish sonini avtomatik hisoblaydi. Suvga tushirilgan vertushkalarning kurakchalari suvning tezligiga qarab sekinroq yoki tezroq aylanadi. Shuning uchun suyuqlikning tezligi schyotchikning ko'rsatkichi yoki vaqt birligida qo'ng'iroqning jiringlash soniga qarab aniqlanadi. Kanallarda suyuqlik sarfini topish uchun ularning ko'ndalang kesimini $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega_3....$ elementar yuzalarga bo'lib chiqamiz (3.20-rasm). Bu yuzalarning geometrik markazlarida tezliklarni vertushka yordamida o'lchab, ularni yuzalarga ko'paytirsak, har bir kesim bo'yicha sarf kelib chiqadi:

$$q_1 = \Delta\omega_1\vartheta_1;\ \ q_2 = \Delta\omega_2\vartheta_2;........q_n = \Delta\omega_n\vartheta_n$$



3.20- rasm. Pirildoq

Kanalda oqayotgan suyuqlik sarfi bu sarflarning yig'indisiga tengdir;

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i - \Delta\omega_1\vartheta_1 + \Delta\omega_2\vartheta_2 + \Delta\omega_3\vartheta_3 + ... + \Delta\omega_n\vartheta_n \qquad (3.62)$$

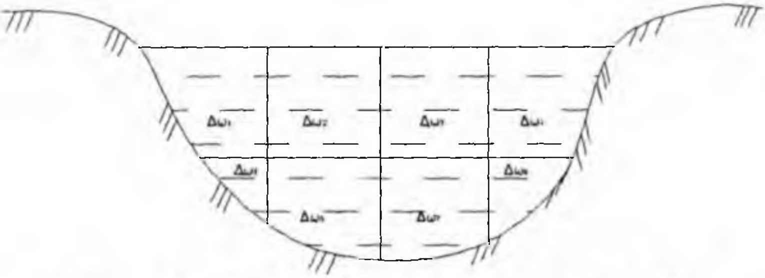
Bu usul gidrometrik o'lchashlarda eng ko'p qo'llaniladigan usuldir.

6. Pito naychasi uchi to'g'ri burchak hosil qilib egilgan naycha bo'lib, uning egilgan uchi suyuqlik oqimi yo'nalishiga qarama-qarshi qilib qo'yiladi. Naychaning ikkinchi uchi suyuqlikdan tashqariga chiqib turadi. (3.21-rasm a). Bu holda ozod sirtda va naychadagi suyuqlik sathida bosim atmosfera bosimga teng. Shuning uchun naychadagi suyuqlikning balandligi h oqimning tezlik bosimini beradi, ya'ni

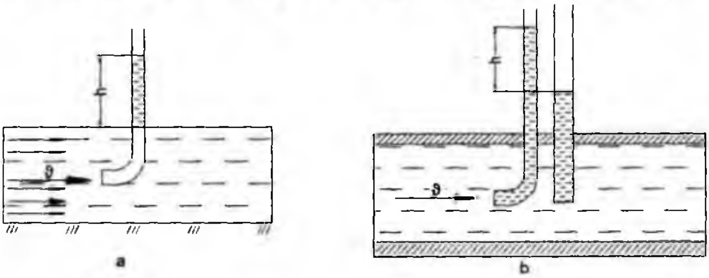
$$h = \frac{\vartheta^2}{2g}$$

Bundan tezlikni topish formulasi kelib chiqadi:

$$\vartheta = \sqrt{2gh} \qquad (3.63)$$



3.21-rasm. Kanallarning kesimini elementar yuzalarga bo'lish.



3.22- rasm. Tezlik o'lchagich naychalar.

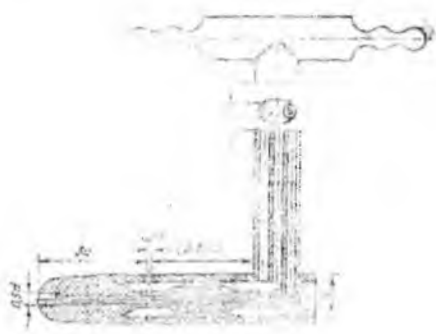
Tezlikning haqiqiy miqdori (suyuqlik tushirilgan naycha harakat tartibini buzganligi uchun) oxirgi formula bilan hisoblangan miqdorga to'g'ri kelmaydi. Shuning uchun bu formulaga tuzatish koeffitsiyenti α kiritiladi:

$$\vartheta = \alpha\sqrt{2gh} \qquad (3.64)$$

bu yerda α – koeffitsiyent; u har bir naycha uchun tajriba yo'li bilan aniqlab qo'yiladi.

Pito naychasi ochiq sirtli oqimlarda tezlikni o'lchach uchun qo'llaniladi.

Prandtl naychasi Pito naychasining qulaylashtirilgani bo'lib, u quvurlardagi tezliklarni o'lchash uchun qo'llaniladi (3.22-rasm, b) va ikkita naychadan iborat bo'ladi. Ulardan biri Pito naychasi va ikkinchisi pezometrdir.



3.23- rasm. Prandtl naychasi

Pezometrdagi suyuqlik balandligi pezometrik bosimni bersa, Pito naychasidagi suyuqlik balandligi to'liq bosim $\frac{p}{\gamma}+\frac{\vartheta^2}{2g}$ ni beradi. Shuning uchun bu ikki naychadagi balandliklar farqi tezlik bosimini beradi va uning yordamida tezlik topiladi:

$$\vartheta=\alpha\sqrt{2gh} \tag{3.65}$$

Hozirgi mavjud asboblarda bu ikkita naycha bitta katta naycha ichiga joylashtirilgan (3.23-rasm) bo'lib, ularning uchlari mikromanometr yoki differentsial manometrlarga tutashtirilgan. Agar manometrlardagi suyuqlik oqayotgan suyuqlikdan farq qilsa, Prandtl naychasining uchi tushirilgan nuqtadagi tezlik quyidagi formula bilan topiladi:

$$\vartheta=\alpha\sqrt{2gh\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}-1\right)} \tag{3.66}$$

bu yerda h – difmanometr naychalaridagi sathlar farqi; γ_1 va γ – difmanometrdagi va tekshirilayotgan (oqayotgan) suyuqliklar solishtirma og'irliklari; α – tajribadan topiladigan qiymati 1 dan 1,04 gacha o'zgaruvchi koeffitsiyent. Prandtl naychasi yordamida suyuqlik oqimi kesimining har xil nuqtalarida tezlikni o'lchab, bu kesim bo'yicha tezlikning o'zgarishini va sarfini topish mumkin.

III bob bo'yicha nazorat savollari

1. Bosimi teng sirtning tenglamasini ko'rsating.
2. Qanday kuch zo'riqish kuchi deyiladi?
3. Tezlik va sarf o'lchash usullarining qanday turlari mavjud?
4. Gidravlik yo'qotishning turlari.
5. Tezlik va sarf o'lchash usullari
6. Pitonaychasi.