всплывать в подобной жидкости, можно определить его удельный вес. Это, в частности, позволяет взвешивать соединения, к которым нельзя прикасаться.

Электрореологические жидкости — довольно несложные композиции из жидкой фазы и диспергированных в ней ультрадисперсных частиц полимерной природы. Не отличаясь в обычных условиях от обычных жидкостей, они, будучи помещенными в электрическое поле, почти мгновенно переходят из жидкого в твердое агрегатное состояние. Снятие электрического поля сопровождается мгновенным обратным переходом из твердого в жидкое состояние. Способность принимать перед отверждением любую требуемую форму, позволяет использовать подобные жидкости в сложнопрофильных гидравлических системах, в том числе в робототехнике, авиационной и автомобильной технике, в принципиально новых системах сцепления, торможения, демпфирования.

Концентрированные ферромагнитные суспензии с успехом применяются для немеханического удержания заготовок в машиностроении. Окунув заготовку в такую жидкость и пропустив через нее электрический ток, ее можно накрепко соединить с подставкой и обрабатывать любыми способами.

Вопросы для самопроверки

1. Жидкости. Сходство и различие тел жидких и твердых.
2. Капельные и газообразные жидкости, их сходство и различие.
3. Плотность, удельный вес жидкости и связь между ними.
4. Динамическая и кинематическая вязкость жидкостей.
5. Какие явления возникают на границах жидкости и несмешивающихся с ией сред.
6. Понятие о кавитации, газонаполнении, кипении и испарении жидкости.
7. Сжимаемость, упругость, температурное расширение жидкостей.
8. Особые физические свойства воды.
9. «Неньютоновские» и аномальные жидкости, их особенности и перспективы практического использования.

Глава 3. ГИДРОСТАТИКА

§ 3.1. Гидростатика и ее приложение. Силы, действующие на покоящуюся жидкость

Гидростатика — раздел гидравлики, в котором изучается равновесие жидкостей и воздействие покоящихся жидкостей на погруженные в них тела и поверхности, ограничивающие жидкости.

Одна из основных задач гидростатики — изучение распределения давления в жидкости и определение на этой основе сил, действующих со стороны жидкости на соприкасающиеся с ней твердые тела.

Знание законов гидростатики позволяет рассчитать силы, действующие на дно и стенки сосудов различной формы и назначения (баки, емкости, цистерны), на поверхность плотины, шпунтовой стенки, подводной лодки, вывести условия плавания тел на поверхности и внутри жидкости. На законах гидростатики основано действие гидравлических подъемников, прессов и тормозов, жидкостных манометров и многих других машин, механизмов и приборов.

Жидкость, в том числе и однородная, представляет собой тело, состоящее из расположенных на некотором, хотя и весьма небольшом, расстоянии друг от друга молекул, то есть имеет, строго говоря, прерывную (дискретную) структуру. Однако при решении различных задач гидравлики мы пренебрегаем указанным обстоятельством и рассматриваем жидкость как сплошную (непрерывную) среду, то есть так же как это принято в теоретической механике для твердых тел или в механике грунта при рассмотрении тел сыпучих.

Заменив при рассмотрении вопросов гидравлики жидкость сплошной средой, мы приписываем этой непрерывной среде те механические свойства, которые находим экспериментальным путем для действительно существующих в реальных условиях жидкостей.

Рассматривая жидкость как сплошную среду, мы получаем право говорить о «*частицах*» жидкости — то есть об элементарных объемах, в которых сосредоточена элементарная масса рассматриваемой жидкости. При этом частицы жидкости, даже бесконечно малые, считают состоящими из большого числа молекул.

Вследствие текучести (подвижности частиц) в жидкости действуют силы не сосредоточенные, а распределенные по ее объему или поверхности. Все они разделяются на внешние и внутренние.

Внешние силы — это силы, приложенные к частицам рассматриваемого жидкого тела со стороны других тел или физических полей

Внутренние силы, именуемые иногда усилиями — силы взаимодействия между частицами жидкости

На находящееся в равновесии жидкое тело действуют две группы внешних сил:

1. *Массовые силы,* действующие на все частицы данного тела и пропорциональные массе частиц. К ним относятся силы тяготения, силы инерции — действующие на жидкость при относительном ее покое. В случае однородной жидкости, то есть жидкости, имеющей всюду одинаковую плотность, массовые силы будут пропорциональны также объему жидкости, поэтому при $\rho = \text{const}$ массовые силы можно называть *объемными силами*.

2. *Поверхностные силы,* приложенные к точкам поверхности тела и пропорциональные ее площади. К ним относятся силы воздействия на данное жидкое тело со стороны соседних объемов жидкости или соприкасающихся с данной жидкостью твердых либо газообразных тел.

В общем случае плотность распределения поверхностной силы, то есть напряжение σ, в различных точках рассматриваемой поверхности может быть различной (напряжение σ, вызываемое внешней поверхностной силой P, постоянно в частном случае равномерного распределения этой силы по рассматриваемой поверхности ω).

Рассматривая жидкость как сплошную среду, ее *напряженное состояние* можно представить следующим образом. Пусть некоторый объем жидкости W напряжен некоторыми сжимающими силами Выделим у произвольной точки A внутри жидкости *элементарный объем* ΔW (весьма малый объем, удовлетворяющий условию, что координаты его точек x, y, z отличаются друг от друга на бесконечно малую величину).

У точки A намечаем *элементарную площадку* $s - s$ (весьма малую, удовлетворяющую условиям, что соответствующие координаты x, y, z ее точек отличаются друг от друга на бесконечно малую величину), называемую *площадкой действия* определенной ориентировки, то есть определенного наклона.

Напряжение в точке A, принадлежащей площадке $s - s$, обозначим через σ. Это напряжение, как известно из курса сопротивления материалов или теоретической механики, представляет собой векторную величину (рис. 3.1), причем эта величина с изменением ориентировки (угла наклона) площадки $s - s$ в общем случае должна менять свое значение (модуль) и свое направление (по отношению к площадке действия). В рассматриваемом общем случае напряжение σ можно разложить на две

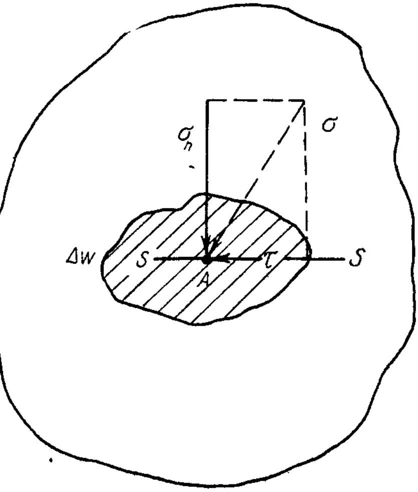

Рис. 3.1

составляющих: нормальную к площадке действия, которую будем называть *нормальным напряжением* σ_n, и касательную к площадке действия, которую будем называть *касательным напряжением* τ.

При отсутствии касательных напряжений, как известно из курсов теоретической механики и сопротивления материалов, зиачение (модуль) полного напряжения в любой точке данного тела не зависит от ориентировки площадки действия.

Ранее было обусловлено, что особые случаи, когда жидкость подвергается растяжению, из рассмотрения в общем курсе гидравлики исключаются, следовательно, исключаются из рассмотрения и растягивающие нормальные напряжения. Сжимающие нормальные напряжения условимся в дальнейшем считать *положительными,* как это делается в курсах механики грунтов и в других случаях, характеризующихся полным отсутствием растягивающих напряжений.

§ 3.2. Гидростатическое давление и его свойства

Рассмотрим какое-либо жидкое тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил. Мысленно рассечем это тело какой-либо плоскостью и, отбросив одну из частей (например, верхнюю), заменим ее действие равнодействующей силой (рис. 3.2).

Если предположить, что эта сила направлена под каким-либо углом к рассматриваемой площадке, то ее можно разложить на две силы — нормальную к секущей плоскости N и касательную к ней T. Однако наличие касательной силы T привело бы к появлению касательных напряжений τ, которые возникают только при движении жидкости. Следовательно, единственная сила, которая может иметь место в покоящейся жидкости — это направленная по внутренней нормали сжимающая сила.

Выделим в пределах произвольного жидкого тела, находящегося в равновесии под действием внешних сил

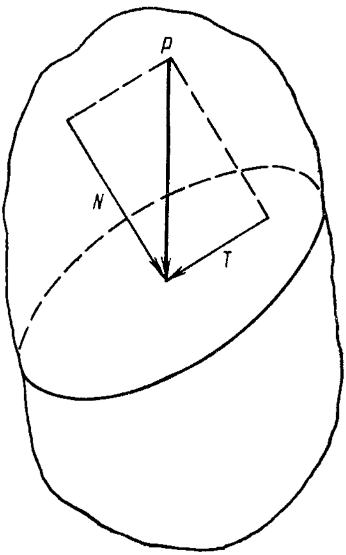

Рис. 3.2

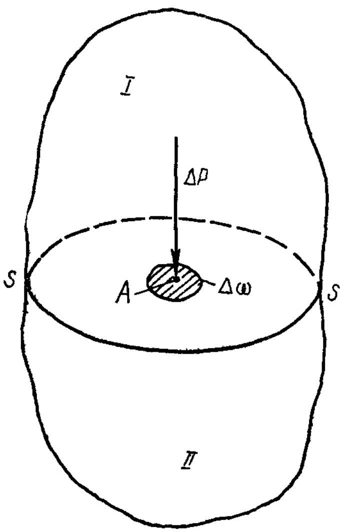

Рис. 3.3

(рис. 3.3), какую-либо точку A и проведем через нее секущую плоскость $s-s$, которая рассечет рассматриваемый объем жидкости на два отсека (I и II). Через плоскость $s-s$ на отсек II со стороны отсека I будет действовать сила P, называемая *силой гидростатического давления* (или *суммарным гидростатическим давлением*).

В соответствии с ранее приведенными рассуждениями, сила P будет нормальной сжимающей силой. Выделим у точки A на поверхности $s-s$ элементарную площадку $\Delta\omega$. Тогда на выделенную площадку будет приходиться часть этой силы ΔP. Мысленно уменьшая размеры площадки $\Delta\omega$ (однако так, чтобы точка A продолжала оставаться внутри контура стремящейся к нулю площадки $\Delta\omega$), мы получим *гидростатическое давление в данной точке покоящейся жидкости* p, для краткости именуемое просто *гидростатическим давлением:*

$$p = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}, \tag{3.1}$$

или

$$p = \frac{dP}{d\omega}. \tag{3.2}$$

Итак, *гидростатическое давление есть предел отношения нормальной сжимающей силы ΔP к элементарной площадке $\Delta\omega$ при уменьшении размеров последней до нуля.*

Сделаем некоторые уточнения, для чего вернемся к началу наших рассуждений. Сила P по отношению к отсеку II является внешней поверхностной силой, по отношению же ко всему рассматриваемому объему жидкости она является силой внутренней. Со стороны отсека II на отсек I будет действовать реакция, равная силе P, которую, следовательно, следует рассматривать как парную силу. Если всю площадь сечения $s-s$ обозначить через ω, то разделив на нее модуль (значение) $|P|$, получим среднее гидростатическое давление

$$p_{\text{ср}} = \frac{|P|}{\omega}, \tag{3.3}$$

приходящееся на плоскость $s-s$.

Тогда и значение p в намеченной точке, являющееся скалярной величиной, можно записать так:

$$p = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{|\Delta P|}{\Delta\omega}. \tag{3.4}$$

Этот предел выражает модуль (значение) гидростатического напряжения σ в намеченной точке A.

Гидростатическое напряжение σ и гидростатическое давление p обладают такими свойствами:

гидростатическое напряжение σ, модулем которого является гидростатическое давление p, сжимающее и направлено по внутренней нормали к площадке действия (то есть оно направлено внутрь объема жидкости, который мы рассматриваем, или перпендикулярно к поверхности твердого тела, ограничивающего жидкость);

гидростатическое давление p в любой данной точке одинаково по всем направлениям (то есть не зависит от угла наклона площадки действия).

В ряде курсов приводится довольно строгое доказательство этого положения. Несколько упрощенно его можно представить так.

Возьмем внутри рассматриваемого объема покоящейся жидкости произвольную точку A и выделим у этой точки элементарный объем жидкости в виде прямой призмы, расположенной нормально к чертежу, в основании которой лежит треугольник ABC (рис. 3.4). Заменим действие жидкости, лежащей вне призмы, соответствующими силами. Тогда выделенная призма будет находиться в равновесии под действием следующих сил: dP_x, dP_z и dP_n — силы гидростатического давления со стороны окружающей жидкости, действующие на боковые грани призмы нормально к ним; dP_y — силы гидростатического давления со стороны окружающей жидкости, действующие на торцевые грани ABC призмы, нормально к плоскости чертежа и взаимно уравновешивающие друг друга (на чертеже не показаны); dG — объемная внешняя сила, под которой, в частности, можно подразумевать собственный вес жидкости в объеме выделенной призмы.

Силой dG можно пренебречь, как величиной третьего порядка малости, в отличие от поверхностных сил dP, которые представляют собой величины второго порядка малости; для получения силы dG ее величину, отнесенную к единице объема приходится умножать на объем призмы, равный $\frac{1}{2}\,dxdydz$, для получения же поверхностных сил средние гидростатические давления умножаются на площади боковых граней, то есть на $dxdy$, $dzdy$ и $dldy$, где dl — длина призмы (см. рис. 3.4, *б*).

Так как призма находится в равновесии, то многоугольник (в данном случае треугольник) этих сил будет замкнут (рис. 3.4, *в*). Треугольник сил подобен треугольнику ABC и из закона подобия следует, что

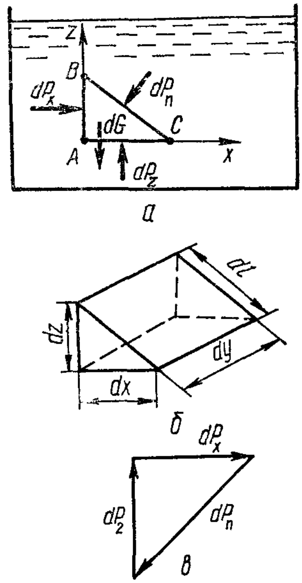

Рис. 3.4

$$\frac{dP_x}{AB} = \frac{dP_n}{BC} = \frac{dP_z}{CA}. \qquad (3.5)$$

Разделим все части этого равенства на длину призмы dy:

$$\frac{dP_x}{dzdy} = \frac{dP_n}{dldy} = \frac{dP_z}{dxdy}. \qquad (3.6)$$

В знаменателе каждого из этих выражений — площади соответствующих граней призмы. Если размеры dx, dy, dz и dl будут стремиться к нулю, то в соответствии с выражением (3.1), можно записать

$$p_x = p_n = p_z = p.$$

Если учесть, что призму (вместе со скрепленными с нею осями координат) можно как угодно располагать в точке A, то следует считать доказанным положение о равенстве давления в одной точке по всем направлениям.

Гидростатическое давление может быть различно в различных точках, то есть является функцией координат $p = f(x, y, z)$, где x, y и z — координаты рассматриваемой точки (однако это вовсе не означает, что в различных точках давление обязательно разное).

В единицах СИ давление выражается в паскалях (Па), килопаскалях (кПа), мегапаскалях (МПа). В изданной до 1980 г. технической литературе давление выражалось в технических атмосферах (кгс/см²), при этом 1 кгс/см² = = 98 100 Н/м² = 98 100 Па = 98,1 КПа = = 0,0981 МПа.

§ 3.3. Основное дифференциальное уравнение равновесия жидкого тела. Поверхности равного давления

Пусть какое-либо жидкое тело массой M и плотностью ρ находится в равновесии под действием внешних сил, равнодействующая которых F. Будем считать, что координатные оси x и y расположены в горизонтальной плоскости, а ось z направлена вертикально вверх. Разложив силу F на три составляющих, параллельных координатным осям F_x, F_y и F_z и поделив их на M, можно найти

$$X = \frac{F_x}{M}; \quad Y = \frac{F_y}{M}; \quad Z = \frac{F_z}{M},$$

где X, Y и Z — проекции ускорений, вызываемых внешними силами, на соответствующие координатные оси.

Выделим у произвольной точки A в пределах жидкого тела бесконечно малый объем в виде прямоугольного параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям. Мысленно отбросив окружающую выделенный объем жидкость, заменим ее действие силами. Это будут сжимающие силы, нормальные к каждой из плоских граней. Например, в точках *1* и *2* (центры тяжести граней, параллельных плоскости yOz) будут приложены

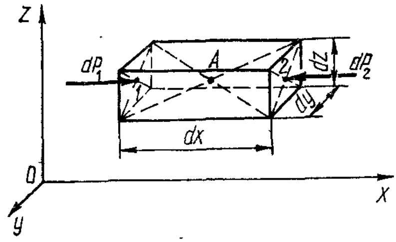

Рис. 3.5

силы dP_1 и dP_2, направленные навстречу друг другу вдоль оси (рис. 3.5).

Поскольку жидкое тело находится в покое, то условия равновесия всех действующих в направлении оси x сил можно записать так:

$$dF_x + dP_1 - dP_2 = 0, \qquad (3.8)$$

где dF_x — проекция на ось элементарной массовой силы,

$$dF_x = dMX. \qquad (3.9)$$

Из зависимости (2.1) элементарная масса

$$dM = \rho dW, \qquad (3.10)$$

где элементарный объем рассматриваемого параллелепипеда

$$dW = dxdydz. \qquad (3.11)$$

Из уравнения (3.2) сила гидростатического давления $dP = pd\omega$,
то есть

$$dP_1 = p_1 dydz; \qquad (3.12)$$

$$dP_2 = p_2 dydz, \qquad (3.13)$$

где p_1 и p_2 — давление в точках *1* и *2*.

Считая давление в точке A (центре тяжести рассматриваемого параллелепипеда) равным p, и учитывая, что изменение гидростатического давления, приходящееся на единицу длины в направлении координатной оси x, может быть представлено частной производной $\frac{\partial p}{\partial x}$, будем иметь

$$p_1 = p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx; \qquad (3.14)$$

$$p_2 = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx. \qquad (3.15)$$

Подставляя полученные выражения в уравнение равновесия (3.8), получим

$$\rho X dx dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx\right) dy dz - $$
$$- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx\right) dy dz = 0 \qquad (3.16)$$

Поскольку $dy \neq 0$ и $dz \neq 0$, то обе части уравнения (3.16) можно разделить на $dydz$, то есть отнести к единице площади.

$$\rho X dx + \left(p - \frac{\partial x}{\partial y} \frac{1}{2} dx\right) -$$
$$- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx\right) = 0. \qquad (3.17)$$

Тогда, раскрывая скобки, будем иметь

$$\rho X dx - \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0. \qquad (3.18)$$

Аналогичным образом с учетом условий равновесия относительно двух других координатных осей, получены дифференциальные уравнения подобного же вида:

$$\left.\begin{aligned} \rho X dx - \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0; \\ \rho Y dy - \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0; \\ \rho Z dz - \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

Учитывая, что не только dy и dz, но и dx и ρ не равны нулю, мы могли бы, как это делается во многих учебниках, обе части уравнения (3.16) разделить на $\rho dx dy dz$, то есть отнести к единице массы, тогда, раскрывая скобки, можно записать

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.20)$$

Эти дифференциальные уравнения равновесия жидкого тела были выведены в 1755 г. действительным членом Российской Академии наук Л. Эйлером и носят его имя. Они получены для произвольно заданных сил и позволяют решать всевозможные задачи, связанные с равновесием жидкостн.

Сложив почленно все три уравнения, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz =$$
$$= \rho (X dx + Y dy + Z dz). \qquad (3.21)$$

Из высшей математики известно, что сумма частных дифференциалов, стоящая в левой части, представляет собой полный дифференциал.

Таким образом,

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz). \qquad (3.22)$$

Если плотность жидкости ρ с достаточной степенью точности может быть принята постоянной, то гидростатическое давление в любой точке жидкости, находящейся в равновесии под действием внешних сил

$$p = \rho \int (X dx + Y dy + Z dz). \qquad (3.23)$$

Чтобы это общее выражение использовать для решения тех или иных задач, в каждом конкретном случае необходимо знать ускорение X, Y и Z.

Геометрическое место точек, имеющих одинаковое давление $p = \text{const}$, $dp = 0$, называется *поверхностью равного давления*, или *поверхностью уровня*.

§ 3.4. Равновесие жидкости под действием силы тяжести. Давление в точке покоящейся жидкости

Если жидкость находится в равновесии под действием собственного веса, то проекции ускорений, вызываемых силой тяжести, для выбранных координатных осей (см. § 3.3): $X = 0$; $Y = 0$;

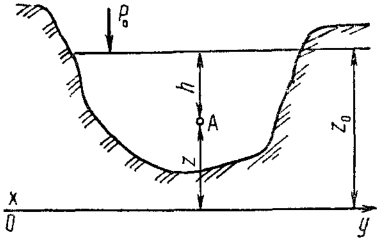

Рис 3 6

$Z = -g$, где g — ускорение свободного падения.

Тогда, подставляя эти значения в выражение (3.23), получим

$$p = \rho \int (-g)\, dz, \qquad (3\ 24)$$

то есть

$$p = -\rho g z + C, \qquad (3\ 25)$$

где C — постоянная интегрирования, или иначе

$$p + \rho g z = C. \qquad (3\ 26)$$

Пусть находящаяся в равновесии жидкость с плотностью ρ заключена в какой-либо сосуд произвольной формы.

На поверхности жидкости (рис. 3.6) имеется давление p_0, называемое *внешним давлением* (если сосуд открыт и жидкость граничит с атмосферой Земли, то это давление равно атмосферному).

Считаем, как и прежде, ось z направленной вертикально вверх, а плоскость xOy — горизонтальной (эта произвольно расположенная горизонтальная плоскость называется *плоскостью сравнения;* на чертеже показан ее след). Расстояние z от плоскости сравнения называют *координатой*, или *отметкой, точки*.

Наша задача — найти зависимость для определения давления в произвольной точке жидкости, например, A, имеющей отметку z и находящуюся на глубине h под поверхностью жидкости.

Воспользовавшись выражением (3.26), можно записать для выбранной точки A и точек на поверхности жидкости (с координатой z_0) равенство

$$p + \rho g z = p_0 + \rho g z_0. \qquad (3\ 27)$$

Тогда

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z). \qquad (3\ 28)$$

Учитывая, что

$$z_0 - z = h, \qquad (3\ 29)$$

получим, что для несжимаемой жидкости, находящейся в равновесии под действием силы тяжести полное гидростатическое давление в точке

$$p = p_0 + \rho g h, \qquad (3\ 30)$$

где p_0 — внешнее поверхностное давление; h — глубина погружения точки под свободной поверхностью жидкости, то есть поверхностью раздела между жидкостью и газообразной средой с постоянным давлением

В формуле (3.30) величина $\rho g h$ или иначе γh может быть названа *весовым давлением,* поскольку она представляет ту часть полного гидростатического давления или, как говорят, *абсолютного давления* в рассматриваемой точке, которая обусловлена весом самой жидкокости.

Из рассмотрения равенства (3.30) заключаем, что *абсолютное давление в точке равно сумме внешнего поверхностного и весового давлений*. Из этого же выражения непосредственно следует, что *внешнее давление на пограничную поверхность находящейся в равновесии жидкости передается одинаково во все точки внутри жидкости (закон Паскаля)*.

Внутри покоящейся жидкости, как это видно из (3.30), во всех точках, погруженных на одну и ту же глубину, абсолютное давление — одинаково. Таким образом, *при равновесии жидкости под действием силы тяжести поверхность равного давления, или поверхность уровня, представляет собой горизонтальную плоскость*.

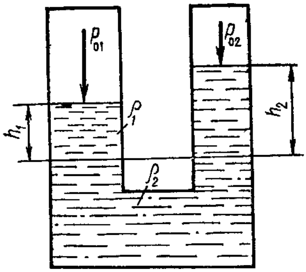

Рис. 3.7

Превышение полного гидростатического давления над атмосферным $p_а$ называется *избыточным* (*сверхатмосферным*) или *манометрическим давлением:*

$$p_м = p - p_а = p_0 + \rho g h - p_а. \quad (3\ 31)$$

Если сосуд открыт и на его свободной поверхности устанавливается атмосферное давление, то есть $p_0 = p_а$, то понятия весового и избыточного давлений совпадают, для закрытого же сосуда, когда давление на свободной поверхности жидкости отлично от атмосферного, весовое и избыточное давления отличаются друг от друга.

Разницу между атмосферным и гидростатическим давлением называют *вакуумом:*

$$p_{вак} = p_а - p. \quad (3\ 32)$$

Условие равновесия двух разнородных несмешивающихся жидкостей (с плотностями ρ_1 и ρ_2) в сообщающихся сосудах (рис. 3.7)

$$p_{01} - p_{02} = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1, \quad (3\ 33)$$

где p_{01} и p_{02} — давление на свободной поверхности жидкостей в первом и втором сосуде.

Если $p_{01} = p_{02} = p_0$, то

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2, \quad (3.34)$$

или

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (3.35)$$

то есть *уровни разнородных несмешивающихся жидкостей в сообщающихся сосудах при одинаковом внешнем давлении в них обратно пропорциональны плотностям этих жидкостей.*

§ 3.5. Основное уравнение гидростатики и его интерпретации

Разделив обе части выражения (3.26) на ρg, получим *основное уравнение гидростатики*

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const}, \quad (3.36)$$

или, учитывая (2.5),

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{const}. \quad (3.37)$$

Рассмотрим, какой физический смысл имеют входящие в основное уравнение гидростатики два его члена, имеющие размерность линейных величин.

В сосуде произвольной формы находится жидкость плотностью ρ. Давление на свободной поверхности жидкости p_0 (рис. 3.8).

Представим себе, что к точке A, находящейся внутри покоящейся жидкости на глубине h, подведена закрытая сверху тонкая, но не капиллярная вертикальная трубка $П_0$, в которой создано полное разрежение (так называемая торричеллиева пустота). Тогда под дав-

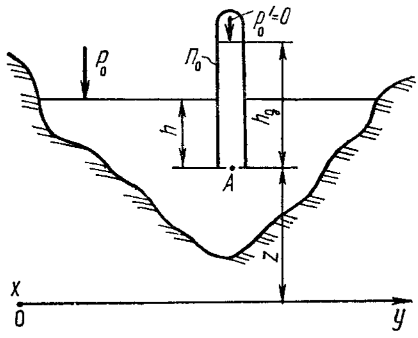

Рис. 3.8

лением p в точке A горизонт жидкости поднимается по этой трубке на некоторую высоту $h_д$ над точкой A, называемую *высотой давления*.

Считая точку A принадлежащей сосуду, из зависимости (3.30) получим

$$p = p_0 + \rho g h. \qquad (3.38)$$

Давление в этой же точке A, но принадлежащей трубке $П_0$,

$$p = p_0' + \rho g h_д. \qquad (3.39)$$

Так как внешнее давление на поверхности жидкости в трубке $П_0$, в которой было создано полное разряжение, $p_0' = 0$ то из (3.39) следует, что высота давления

$$h_д = \frac{p}{\rho g}. \qquad (3.40)$$

Строго говоря, пространство над горизонтом жидкости $П_0$ должно быть заполнено парами жидкости. Но в обычных интервалах температур давление насыщенных паров значительно меньше атмосферного давления и им можно пренебречь, считая давление на свободной поверхности жидкости в трубке равным нулю.

Находящаяся в покое жидкость обладает определенным запасом потенциальной энергии, то есть способностью производить работу. Если считать, что в точке A сосредоточен элементарный объем жидкости весом dG, то он может произвести определенную работу: во-первых, за счет падения на плоскость xOy с высоты z; следовательно, относительно выбранной плоскости сравнения он обладает определенным запасом потенциальной энергии

$$dE_z = dGz; \qquad (3.41)$$

во-вторых, за счет поднятия под давлением p на высоту $h_д$; запас потенциальной энергии, способной произвести эту работу

$$dE_p = dGh_д. \qquad (3.42)$$

Потенциальная энергия элементарного объема жидкости весом dG

$$dE_п = dE_p + dE_z = dG(h_д + z), \qquad (3.43)$$

или

$$dE_p = dG\left(\frac{p}{\rho g} + z\right). \qquad (3.44)$$

В гидравлике принято иметь дело с так называемой *удельной энергией* e, то есть с энергией, отнесенной к единице веса жидкости, находящейся в точке A. Тогда *удельная потенциальная энергия* в рассматриваемой точке

$$e_п = \frac{dE_p}{dG} = \frac{p}{\rho g} + z. \qquad (3.45)$$

Таким образом, с энергетической точки зрения, сумма входящих в основное уравнение гидростатики (3.36) величин $\frac{p}{\rho g} + z$ представляет собой удельную, то есть отнесенную к единице веса, потенциальную энергию жидкости в рассматриваемой точке. При этом $\frac{p}{\rho g}$ — *часть удельной потенциальной энергии — удельная энергия давления, часть удельной потенциальной энергии — удельная энергия положения.*

§ 3.6. Способы выражения давления. Пьезометрическая высота. Потенциальный напор

Из выражения (3.40) следует, что давление в точке покоящейся жидкости может быть выражено высотой некоторого столба жидкости либо измерено в натуре с помощью стеклянных трубочек, называемых *пьезометрами* (от соединения двух греческих слов, одно из которых означает «давление», а второе — «мера»).

Рассмотрим точки A_1 и A_2 (рис. 3.9), находящиеся на одинаковой глубине h под свободной поверхностью жидкости, частично заполняющей закрытый сосуд.

К сосуду подключены тонкие стеклянные трубочки: у точки A_1 трубочка $П_а$, открытая в атмосферу (так называемый *пьезометр открытого типа*), у точки A_2 запаянная сверху трубочка $П_0$ (*пьезометр закрытого типа*).

Будем считать, что давление на свободной поверхности жидкости в рассматриваемом сосуде p_0 больше атмосферного давления $p_а$.

Рассматривая точку A_1 внутри жидкости, можно прийти к выводу, что со стороны жидкости в сосуде на эту точку действует абсолютное давление

$$p = p_0 + \rho g h, \qquad (3.46)$$

а со стороны жидкости в трубке на ту же точку действует равное давление

$$p = p_а + \rho g h_{д1}. \qquad (3.47)$$

Откуда

$$h_{д1} = \frac{p - p_а}{\rho g}. \qquad (3.48)$$

В числителе мы имеем разность абсолютного и атмосферного давления, то есть (см. (3.31)) — избыточное давление в рассматриваемой точке. Величина $h_p = h_{д1}$, отвечающая избыточному давлению в точке, называется *избыточной пьезометрической высотой*, или просто *пьезометрической высотой*.

Считая, что в трубке $П_0$ создано полное разряжение ($p_0 = 0$), может записать, что абсолютное гидростатическое давление в точке A_2 со стороны жидкости в сосуде

$$p = p_0 + \rho g h, \qquad (3.49)$$

а со стороны жидкости в трубке

$$p = 0 + \rho g h_{д2}. \qquad (3.50)$$

Откуда

$$h_{д2} = \frac{p}{\rho g}. \qquad (3.51)$$

Величину ($h_A = h_{д2}$), отвечающую абсолютному давлению в точке, будем на-

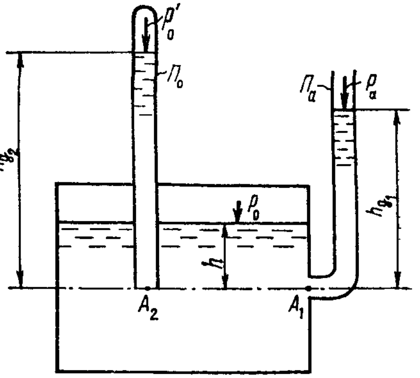

Рис. 3.9

зывать *абсолютной пьезометрической высотой*.

Можно сказать, что *пьезометрическая высота h_p — это высота такого столба жидкости, который своим весом способен создать давление, равное избыточному давлению в рассматриваемой точке; абсолютная пьезометрическая высота h_A — это высота такого столба жидкости, который своим весом способен создать давление, равное абсолютному давлению в рассматриваемой точке.*

Таким образом, мы имеем два разных способа выражения гидростатического давления в точке: единицами силы, отнесенными к площади (например, кН/м², то есть кПа); единицами длины (единицами высоты) вертикального столба жидкости, характеризуемой определенным удельным весом γ (например, метры водяного столба, миллиметры ртутного столба).

Возвращаясь к рассматриваемому примеру (рис. 3.9), легко доказать, что разность высот стояния жидкости в трубках $П_0$ и $П_а$ всегда равна $\frac{p_а}{\rho g}$; в случае открытого в атмосферу сосуда, когда $p_0 = p_а$, величина $h_p = h$, где h — глубина погружения данной точки под свободной поверхностью жидкости.

В случае, если абсолютное давление в точке $p < p_а$, давление в ней можно

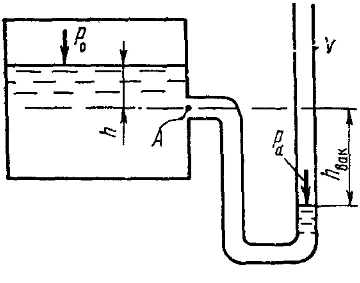

Рис. 3.10

измерить с помощью *обратного пьезометра (вакуумметра)*, представляющего изогнутую в форме буквы U трубку (рис. 3.10).

Очевидно, горизонт жидкости в такой трубке опустится ниже точки A, к которой подведена открытая в атмосферу стеклянная трубка. Можно сказать, что давление в точке A со стороны жидкости в сосуде

$$p = p_0 + \rho g h, \tag{3.52}$$

а со стороны жидкости в вакуумметре

$$p = p_а - \rho g h_{вак}. \tag{3.53}$$

Откуда следует

$$h_{вак} = \frac{p_а - p}{\rho g}. \tag{3.54}$$

Величину $h_{вак}$ называют *вакуумметрической высотой*, или *высотой вакуума*. Она характеризует разность двух давлений: атмосферного и абсолютного в рассматриваемой точке.

В гидравлике меру энергии, принадлежащей единице веса жидкости, то есть удельную энергию, принято называть *напором*.

В соответствии с этим *потенциальный*, или *гидростатический, напор*

$$H = h_p + z, \tag{3.55}$$

при этом величина z (отметка точки) может быть названа *геометрическим напором*, а величина h_p (пьезометрическая высота) — *пьезометрическим напором*, или *напором давления*.

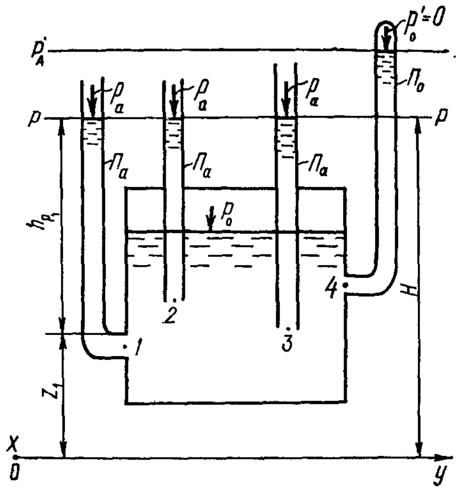

Рис. 3 11

Напоры имеют размерность длины и выражаются соответствующими отрезками H, z, h_p.

С геометрической точки зрения потенциальный напор H в данной точке (например, в точке A) по отношению к какой-либо горизонтальной плоскости сравнения xOy представляет собой сумму двух линейных величин: отметки данной точки z и соответствующей ей пьезометрической высоты h_p. *Для всех точек покоящейся жидкости величина H одинакова.*

Действительно:

$$H = h_p + z = \frac{p - p_а}{\rho g} + z =$$

$$= \frac{p_0 + \rho g h - p}{\rho g} + z =$$

$$= (h + z) + \frac{p_0 + p_а}{\rho g} = \text{const}. \tag{3.56}$$

Возьмем закрытый сосуд (рис. 3.11) и к произвольным точкам в жидкости *1*, *2*, *3* подключим пьезометры $П_а$ открытого типа. Горизонт жидкости во всех этих пьезометрах установится на одной и той же высоте. По горизонтам жидкости в пьезометрах можно провести не-

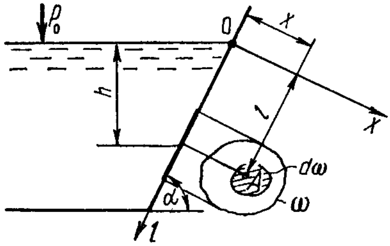

Рис. 3.12

которую линию $P - P$, называемую *пьезометрической линией,* которая в покоящейся жидкости горизонтальна и возвышается на величину потенциального напора H над плоскостью сравнения.

При использовании закрытого пьезометра Π_0, подведенного к какой-либо точке *4*, вместо потенциального напора H получим *абсолютный потенциальный напор*

$$H_A = h_A + z, \qquad (3.57)$$

который выражает абсолютную потенциальную энергию в рассматриваемой точке, без учета противодействия со стороны атмосферы.

Пьезометрическая линия $P_A - P_A$, определяемая напором H_A, будет возвышаться над пьезометрической линией $P - P$ на высоту, равную $\frac{p_a}{\gamma}$.

§ 3.7. Сила гидростатического давления на плоские поверхности. Эпюры нормальных напряжений

Пусть в сосуде, боковая стенка которого плоская и наклонена под углом α к горизонту (рис. 3.12), заключена находящаяся в равновесии жидкость, плотность которой ρ. Давление на свободной поверхности жидкости p_0.

В пределах боковой стенки имеется плоская фигура произвольной формы, силу давления на которую и необходимо определить.

Для удобства рассуждений мысленно повернем боковую стенку сосуда и совместим ее с плоскостью чертежа. Выберем начало координат в месте пересечения поверхности жидкости со стенкой, а ось x будем считать направленной нормально к плоскости чертежа.

Рассмотрим в пределах интересующей нас плоской фигуры произвольную точку A, находящуюся на глубине h под поверхностью жидкости, имеющую координату x и отстоящую от оси x на расстоянии l.

Выделим у этой точки элементарную площадку площадью $d\omega$. Тогда (см. § 3.2) элементарная сжимающая сила, действующая на эту площадку,

$$dP = p d\omega, \qquad (3.58)$$

где p — абсолютное гидростатическое давление (см. (3.30)) в точке A,

$$p = p_0 + \rho g h, \qquad (3.59)$$

или

$$p = p_0 + \rho g l \sin\alpha. \qquad (3.60)$$

Искомая сила абсолютного гидростатического давления, действующая на рассматриваемую плоскую поверхность,

$$P = \int_\omega p d\omega = \int_\omega (p_0 + \rho g l \sin\alpha)\, d\omega. \qquad (3.61)$$

Считая, что в рассматриваемых условиях $\rho g = \text{const}$, получим

$$P = p_0\omega + \rho g \sin\alpha \int_\omega l d\omega. \qquad (3.62)$$

Как известно из теоретической механики,

$$\int_\omega l d\omega = S_x = l_ц \omega, \qquad (3.63)$$

где S_x — статический момент плоской фигуры относительно оси x.

Следовательно,

$$P = p_0\omega + \rho g l_ц \sin\alpha\omega. \qquad (3.64)$$

Учитывая, что

$$l_ц \sin\alpha = h_ц, \qquad (3.65)$$

где $h_ц$ — глубина погружения центра тяжести смоченной части плоской поверхности, получим

$$P = p_0\omega + \rho g h_ц \omega, \qquad (3\ 66)$$

или вынося за скобки площадь рассматриваемой фигуры ω, окончательно будем иметь

$$P = (p_0 + \rho g h_ц)\,\omega. \qquad (3.67)$$

Таким образом, *сила абсолютного гидростатического давления жидкости на погруженную в нее плоскую поверхность равна произведению площади этой поверхности на давление в ее центре тяжести.*

При этом *сила внешнего гидростатического давления*

$$P_0 = p_0\omega \qquad (3\ 68)$$

Поскольку внешнее гидростатическое давление p_0 распределено равномерно по всей площади смоченной части поверхности, его равнодействующая P_0 приложена в центре тяжести этой поверхности.

Сила избыточного гидростатического давления

$$P_1 = \rho g h_ц \omega. \qquad (3\ 69)$$

Поскольку сила весового давления жидкости на плоское горизонтальное дно сосуда, в который она заключена, зависит только от плотности этой жидкости, площади дна и глубины его погружения под свободной поверхностью, то вес жидкости, налитой в сосуд, может отличаться от силы давления, оказываемого ею на дно.

Так, в расширяющихся кверху сосудах (3.13) сила весового давления на дно меньше веса жидкости, в цилиндрических — они одинаковы, а в сужающихся кверху — сила давления больше веса заключенной в сосуд жидкости.

Это явление, парадоксальное с точки зрения житейских представлений, впервые подмеченное французским физиком Б. Паскалем, носит название *«гидростатический парадокс»*.

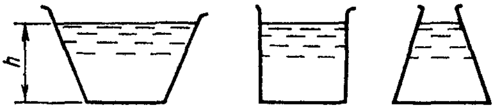

Рис 3 13

При анализе действующих на гидротехнические сооружения сил и гидравлических расчетах весьма удобно использовать эпюры нормальных гидростатических напряжений.

Эпюрой нормальных гидростатических напряжений σ_n называется графическое изображение закона распределения нормального гидростатического напряжения по рассматриваемой поверхности.

Поскольку гидростатическое давление p является модулем гидростатического напряжения σ, эпюры нормального гидростатического напряжения могут быть построены с использованием зависимости (3 30) и применены для определения величины σ_n в любой точке рассматриваемой поверхности. При этом следует помнить, что это напряжение направлено по нормали к площадке действия.

Рассмотрим порядок построения эпюры нормальных гидростатических напряжений на вертикальную стенку (рис. 3.14, *а*), уровень жидкости перед которой H.

Внешнее гидростатическое давление p_0 равномерно передается жидкостью по всему ее объему. Отложив в масштабе на перпендикулярах к рассматриваемой плоской стенке в ее верхней и нижней части p_0 и соединив концы векто-

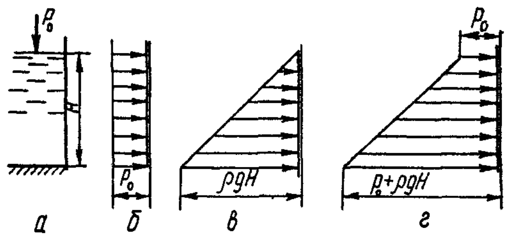

Рис 3 14

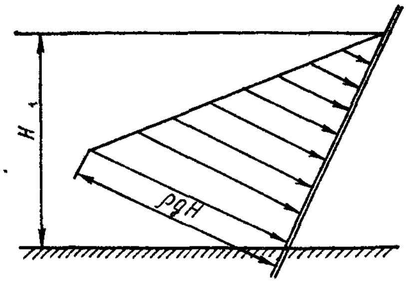

Рис. 3.15

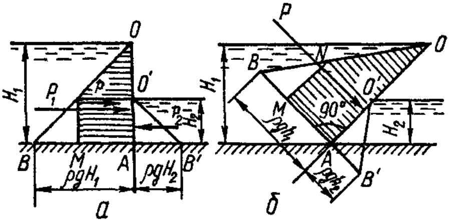

Рис. 3.16

ров прямой линией, получим прямоугольник-эпюру нормальных напряжений, вызываемых внешним давлением (рис. 3.14, *б*).

Избыточное гидростатическое давление (3.69) изменяется по глубине по закону прямой, причем оно равно 0 на свободной поверхности жидкости и максимально — у дна ($\rho g H$).

Таким образом, эпюры нормального избыточного гидростатического напряжения имеют форму прямоугольного треугольника (рис. 3.14, *в*).

Эпюра нормального абсолютного гидростатического напряжения получается в результате сложения предыдущих двух эпюр и имеет форму трапеции (рис. 3.14, *г*).

Аналогично строятся эпюры нормального гидростатического напряжения в случае наклонной стенки (рис. 3.15).

С помощью подобных эпюр можно графически суммировать нормальное гидростатическое напряжение при действии однородных или разнородных

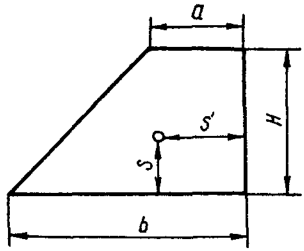

Рис. 3.17

жидкостей с двух сторон плоской стенки (рис. 3.16).

С помощью эпюры нормального гидростатического напряжения может быть подсчитана сила гидростатического давления на плоскую поверхность, поскольку объем такой эпюры численно равен величине этой силы. Сила давления на плоскую поверхность проходит через центр тяжести эпюры, положение которого для трапецеидальной эпюры нормального гидростатического напряжения на прямоугольную стенку может быть определено графически или по формулам

$$S = \frac{2a + b}{3(a + b)} H; \qquad (3.70)$$

$$S' = \frac{b^3 - a^3}{3(b^2 - a^2)}, \qquad (3.71)$$

где S и S' — координаты центров тяжести эпюры трапецеидальной формы (рис. 3.17); a и b — соответственно вершина и основание трапеции.

При треугольной эпюре нормального гидростатического напряжения иа прямоугольную стенку, то есть при рассмотрении вопроса о точке приложения силы избыточного давления, сила проходит на расстоянии $^2/_3\,H$ от вершины эпюры.

§ 3.8. Центр давления и определение его местоположения

Центром давления называется точка приложения равнодействующей силы избыточного давления.

Как и прежде, рассмотрим произвольную плоскую фигуру, лежащую внутри жидкости в пределах боковой, наклонной под углом α к горизонту, стенке (рис. 3.18). Выберем начало координат на свободной поверхности жидкости в месте ее пересечения с боковой стенкой; ось x считаем горизонтальной и направленной нормально к плоскости чертежа. Для удобства рассмотрения мысленно совместим боковую стенку с плоскостью чертежа. Выделим в пределах рассматриваемой плоской фигуры произвольную точку A с координатой x, находящуюся на глубине h под свободной поверхностью жидкости и отстоящую от оси x на расстоянии l.

Поскольку избыточное гидростатическое давление в рассматриваемой точке p_1, элементарная сила избыточного давления, действующая на элементарную площадку $d\omega$, выделенную вокруг этой точки,

$$dP_1 = p_1 d\omega = \rho g h d\omega. \qquad (3.72)$$

Элементарный момент этой силы относительно оси x

$$dM = dP_1 l = \rho g l \sin \alpha d\omega l. \qquad (3.73)$$

Тогда суммарный момент силы избыточного давления, действующей на рассматриваемую плоскую поверхность,

$$M = \int_\omega \rho g l^2 \sin \alpha d\omega = \rho g \sin \alpha \int_\omega l^2 d\omega. \qquad (3.74)$$

Из теоретической механики известно, что

$$\int_\omega l^2 d\omega = I_x, \qquad (3.75)$$

где I_x — момент инерции плоской фигуры относительно оси x.

Но тот же момент силы

$$M = P_1 l_д, \qquad (3.76)$$

где $l_д$ — расстояние от оси x до точки приложения силы избыточного давле-

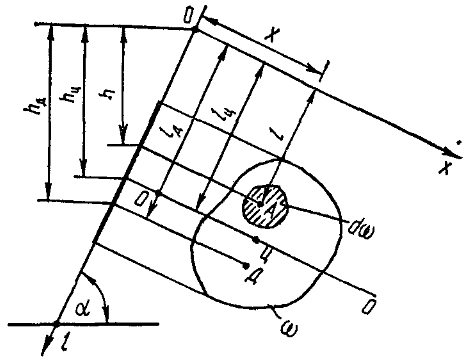

Рис. 3.18

ния, то есть искомая координата центра давления.

Сила избыточного давления

$$P_1 = \rho g h_ц \omega = \rho g l_ц \sin \alpha \omega. \qquad (3.77)$$

Подставляя в (3.76), с учетом (3.74) и (3.75), получим

$$\rho g \sin \alpha I_x = \rho g l_ц \sin \alpha \omega l_д. \qquad (3.78)$$

Откуда

$$l_д = \frac{I_x}{l_ц \omega}. \qquad (3.79)$$

Момент инерции относительно горизонтальной оси, параллельной оси, проходящей через центр тяжести фигуры,

$$I_x = I_ц + \omega l_ц^2, \qquad (3.80)$$

где $I_ц$ — момент инерции относительно центральной оси.

Подставляя (3.80) в (3.79), получим

$$l_д = l_ц + \frac{I_ц}{l_ц \omega}. \qquad (3.81)$$

Таким образом, центр давления лежит ниже центра тяжести плоской фигуры на величину

$$\frac{I_ц}{l_ц \omega}. \qquad (3.82)$$

Центр тяжести и центр давления могут совпадать только тогда, когда рассматриваемая плоская поверхность лежит в горизонтальной плоскости (в этом случае $I_ц = 0$).

Зная силы P_0 и P_1 и координаты точек их приложения $l_ц$ и $l_д$, по правилу сложения параллельных сил нетрудно определить равнодействующую этих сил $P = P_0 + P_1$ и точку приложения.

Напомним выражения для определения момента инерции $I_ц$ для наиболее распространенных плоских фигур:
для квадрата со стороной a

$$I_ц = \frac{a^4}{12}; \qquad (3.83)$$

для прямоугольника шириной b и высотой H

$$I_ц = \frac{bH^3}{12}; \qquad (3.84)$$

для круга диаметром d

$$I_ц = \frac{\pi d^4}{64}. \qquad (3.85)$$

Для примера найдем координату центра давления для плоской вертикальной стенки шириной b при уровне воды перед стенкой H (рис. 3.14, *а*).

Поскольку в этом случае

$$l_ц = h_ц = \frac{H}{2}; \qquad (3.86)$$

$$\omega = bH, \qquad (3.87)$$

то с учетом (3.84) из (3.81) получим

$$l_д = h_д = \frac{H}{2} + \frac{bH^3 \cdot 2}{12HbH} = \frac{2}{3} H \qquad (3.88)$$

(что и отмечалось при рассмотрении эпюры избыточного гидростатического давления на плоскую стенку).

§ 3.9. Сила гидростатического давления на криволинейные цилиндрические поверхности

Напомним, что *криволинейной цилиндрической поверхностью* называется поверхность, полученная при перемещении образующей параллельно самой себе по криволинейной направляющей.

Пусть какая-то криволинейная цилиндрическая поверхность находится

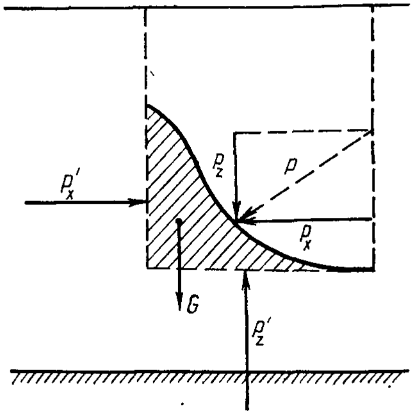

Рис. 3.19

внутри покоящейся жидкости с плотностью ρ.

Для нахождения силы избыточного давления на эту поверхность (силы внешнего давления равны с обеих сторон этой поверхности и не принимаются во внимание) выделим внутри жидкости некоторый ее объем, проведя вертикальную и горизонтальную секущие плоскости по крайним образующим (рис. 3.19), и мысленно отбросив окружающую жидкость, заменим ее действие соответствующими силами (силы P_{y1} и P_{y2}, поскольку поверхность цилиндрическая, будут равны между собой и во внимание не принимаются): горизонтальной P'_x, вертикальной P'_z, весом отсека G и искомой силой P, действующей на рассматриваемую криволинейную поверхность, которую разложим на две составляющие P_x и P_z.

Запишем условия равновесия в направлении каждой из координатных осей:

в направлении оси x

$$P'_x - P_x = 0, \qquad (3.89)$$

откуда следует, что горизонтальная составляющая

$$P_x = P'_x; \qquad (3.90)$$

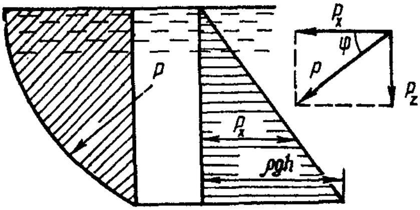

Рис. 3.20

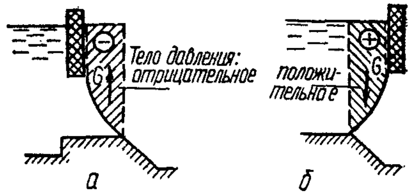

Рис. 3.21

в направлении оси z

$$P'_z - P_z - G = 0, \qquad (3.91)$$

откуда вертикальная составляющая

$$P_z = P'_z - G. \qquad (3.92)$$

Таким образом, *для цилиндрической криволинейной поверхности сила избыточного гидростатического давления*

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}. \qquad (3.93)$$

Горизонтальная составляющая силы избыточного давления P_x равна силе давления на вертикальную проекцию криволинейной цилиндрической поверхности P'_x. Следовательно,

$$P_x = \rho g h_ц \omega_z, \qquad (3.94)$$

где $h_ц$ — глубина погружения центра тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности; ω_z — площадь вертикальной проекции криволинейной поверхности.

Вертикальная составляющая P_z численно равна весу жидкости в объеме *тела давления,* то есть тела, ограниченного вертикальными плоскостями, проходящими через крайние образующие цилиндрической поверхности, самой цилиндрической поверхностью и свободной поверхностью жидкости или ее продолжением (рис. 3.20).

Направление силы P определяется углом φ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_z}{P_x}. \qquad (3.95)$$

Если криволинейная поверхность не цилиндрическая, то горизонтальную составляющую P_y определяют аналогично силе P_x.

Тело давления может «нагружать» и «разгружать» криволинейную поверхность, то есть тело давления может быть действительным, или положительным (если оно заполнено жидкостью), и мнимым, или отрицательным (если оно не заполнено жидкостью). Знак тела давления приведен на рис. 3.21.

§ 3.10. Простейшие гидравлические мвшины

То обстоятельство, что жидкости, будучи практически не сжимаемыми, равномерно передают по всему своему объему внешнее давление, широко используется в различных отраслях техники (в гидроприводах, гидроавтоматике, гидравлических тормозах и усилителях и т. п.). Это свойство жидкости эффективно применяется в таких простейших машинах, как гидравлические домкраты (подъемники) и прессы.

Принцип их работы основан на следующем: имеются два сообщающиеся между собой цилиндра разного диамет-

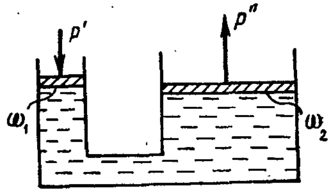

Рис. 3.22

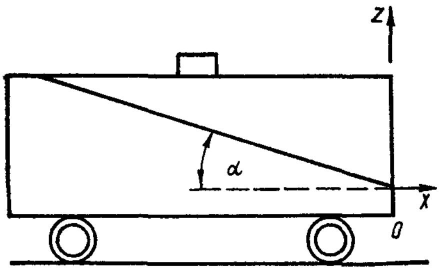

Рис. 3.23

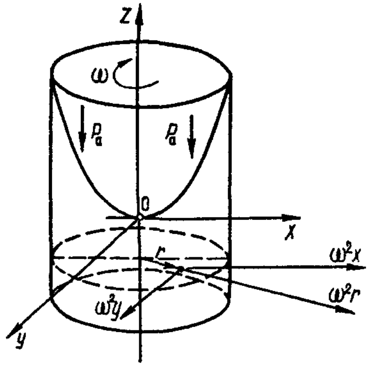

Рис. 3.24

ра (рис. 3.22). Прилагая к поршню меньшего из цилиндров какую-то внешнюю силу P', мы тем самым создаем на поверхности жидкости в этом цилиндре внешнее давление

$$p' = \frac{P'}{\omega_1}, \tag{3.96}$$

которое равномерно передается во все точки пространства, заполненного жидкостью. Тогда на поршень большего из цилиндров (без учета потерь) будет действовать подъемная сила

$$P'' = p'\omega_2, \tag{3.97}$$

или

$$P'' = p' \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{3.98}$$

Таким образом, чем больше разняться между собой площади поперечного сечения цилиндров, тем большую (подъемную, сжимающую, перемещающую) силу мы получаем в таких гидравлических устройствах.

§ 3.11. Относительное равновесие жидкостей

Жидкость, заключенная в неподвижный резервуар и находящаяся в равновесии под действием силы тяжести, пребывает в *абсолютном покое* относительно земли.

Жидкость может быть в равновесии и при действии, помимо собственного веса, других внешних сил, в том числе и сил инерции. Жидкое тело в таком случае будет находиться в *относительном покое*. Следует при этом иметь в виду, что жидкость, начавшая двигаться из состояния абсолютного покоя, приходит в состояние относительного покоя не сразу. Переход из одного состояния в другое происходит под влиянием сил трения; в самом состоянии относительного покоя силы трения отсутствуют.

В качестве примера рассмотрим равновесие жидкости в движущейся с постоянным ускорением j_x цистерне (рис. 3.23).

Выбрав подвижную систему координат с началом в точке пересечения свободной поверхности жидкости с передней стенкой цистерны и подставив в уравнение (3.22) $X = -j_x$, $Y = 0$, $Z = -g$ (где j_x — горизонтальное ускорение при движении), получим

$$dp = -\rho(j_x dx + g dz). \tag{3.99}$$

Тогда, поделив обе части выражения на ρ, для поверхности равного давления ($dp = 0$) получим

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{j_x}{g}, \tag{3.100}$$

или

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{j_x}{g}\right), \tag{3.101}$$

то есть свободная поверхность в вагоне-цистерне при равноускоренном движении представляет собой плоскость, наклоненную под углом α к горизонту.

Жидкость, заключенная в открытый сверху цилиндрический сосуд, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω (рис. 3.24), находится в покое относительно сосуда. Для решения вопроса о форме поверхности жидкости в этом случае выберем начало координат в точке пересечения свободной поверхности жидкости с осью сосуда.

Тогда проекции ускорений на координатные оси

$$X = \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y; \quad Z = -g.$$

Подставляя в (3.23)

$$p = \rho \int (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz), \quad (3\ 102)$$

после интегрирования получим

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz \right) + C. \quad (3\ 103)$$

Для начала координат, лежащего на оси вращения на свободной поверхности, координаты $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. Следовательно, постоянная интегрирования $C = p_a$.

Поскольку $x^2 + y^2 = r^2$, где r — расстояние от оси до рассматриваемой точки, из выражения (3.103) получим

$$\frac{p - p_a}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{2} - gz. \quad (3\ 104)$$

Тогда

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \frac{p - p_a}{\rho g}. \quad (3\ 105)$$

Для свободной поверхности жидкости манометрическое давление

$$p_м = p - p_a = 0$$

и ее уравнение примет вид

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (3\ 106)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае свободная поверхность жидкости представляет собой параболоид вращения.

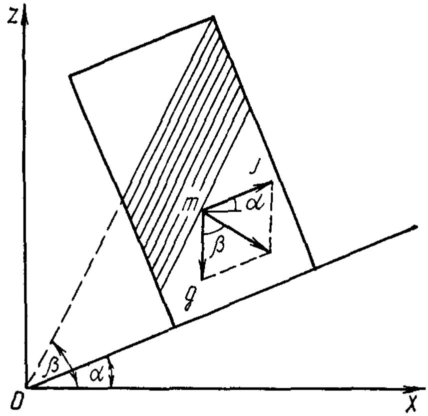

Рис 3 25

Рассмотрим еще один случай Жидкость находится в покое относительно резервуара, движущегося с постоянным ускорением j по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (рис. 3 25).

При этом $X = -j$, $Y = 0$. Подставляя эти значения в (3 23), получим

$$dp = \rho(-j dx - g dz). \quad (3.107)$$

Отнеся обе части выражения к ρ, установим, что поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность жидкости ($dp = 0$), представляют собой семейство параллельных плоскостей, наклоненных к горизонту под углом

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{j \cos \alpha}{g - j \sin \alpha}. \quad (3\ 108)$$

Если резервуар движется с постоянной скоростью ($j = 0$), то $\operatorname{tg} \beta = 0$, угол $\beta = 0$, и поверхности равного давления представляют собой горизонтальные плоскости.

Если резервуар спускается только под действием силы тяжести (сила трения резервуара о плоскость равна нулю), то $j = g \sin \alpha$, $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$, $\beta = \alpha$, то есть поверхности равного давления образуют семейство плоскостей, параллельных плоскости скатывания.

§ 3.12. Закон Архимеда. Плавание тел

Закон Архимеда, известный из школьного курса физики, обычно формулируется так: *на всякое тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вверх и равная весу вытесненной им жидкости* (см., например, СЭС, 2-е изд., с. 81). Зная основные законы гидростатики, установим за счет чего эта сила образуется и уточним, на всякое ли тело в жидкости она действует.

Рассмотрим три цилиндрических тела, вес которых G_1, G_2 и G_3 и сечение ω: одно из них частично погружено в жидкость, второе плавает внутри жидкости и третье покоится на дне (рис. 3.26). В первом и втором случае силы внешнего давления по верхней и нижней плоскостям цилиндра равны и противоположны по направлению. Равнодействующие силы избыточного давления, действующие по этим плоскостям:

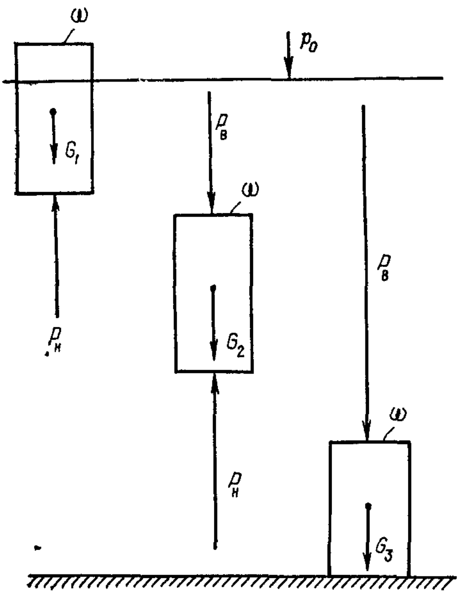

Рис. 3.26

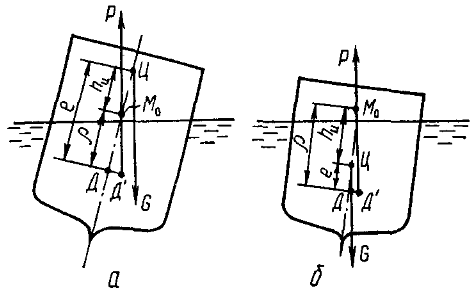

Рис. 3.27

при плавании на поверхности

$$P_1 = P_н = \rho g h_н \omega = \rho g W_1, \quad (3.109)$$

где W_1 — объем погруженной части цилиндра (в этом случае $P_1 > G$).

При состоянии безразличного равновесия (тело плавает внутри жидкости, окружающей его со всех сторон)

$$P_2 = P_н - P_в = \rho g h_н \omega - \rho g h_в \omega = \\ = \rho g W, \quad (3.110)$$

где W — объем полностью погруженного в жидкость тела (в этом случае $P_2 = G$).

В третьем же случае, если цилиндр стоит на водонепроницаемом дне и плотно прилегает к нему (отсутствует доступ жидкости к нижней поверхности цилиндра) сила гидростатического давления $P_н = 0$ и никакой выталкивающей силы не будет, наоборот, тело, под действием собственного веса, веса вышележащего столба жидкости и внешнего давления, будет прижиматься ко дну.

Рассмотрим некоторые общие вопросы, связанные с плаванием тел.

Объем жидкости W, вытесняемый полностью или частично погруженным в нее телом, называется *объемным водоизмещением.*

Центр тяжести $Д$ вытесненного объема жидкости (центр давления при плавании) называется *центром водоизмещения* (рис. 3.27).

Подъемная (архимедова) сила имеет в качестве линии действия вертикальную прямую, проходящую через центр водоизмещения.

Плоскость сечения плавающего тела, совпадающая со свободной поверхностью жидкости, называется *плоскостью плавания,* а линия пересечения плавающего тела со свободной поверхностью жидкости — *ватерлинией.*

Прямая, проходящая через центр тяжести плавающего тела *Ц* н центр водоизмещения в положении устойчивого равновесия тела (когда сила его веса и сила тяжести действуют по одной вертикальной прямой), называется *осью плавания.*

Глубина погружения самой низкой точки смоченной поверхности тела называется *осадкой.*

Если тело выведено из положения равновесия на какой-то угол α относительно вертикали, называемый *углом крена,* то объем водоизмещения изменяет свою первоначальную, обычно симметричную форму, а центр водоизмещения переместится в новую точку $Д'$, через которую и пройдет подъемная сила P.

Точка пересечения подъемиой снлы P при наклонном положении тела с осью плавания называется *метацентром.* Расстояние между центром тяжести тела *Ц* и метацентром *М* обозначается через $h'_м$ и называется *метацентрической высотой.* Метацентрическая высота может быть определена по формуле

$$h_м = \frac{I_0}{W} - e, \qquad (3.111)$$

где I_0 — момент инерции площади плоскости плавания относительно продольной оси $S' - S'$; W — водоизмещение тела; e — расстояние между центром тяжести *Ц* и центром водоизмещения *Д*.

Плавучесть тела — его свойство плавать при заданной нагрузке, имея заранее установленное погружение. Запас плавучести — добавочная нагрузка, которая соответствует весу жидкости в объеме надводной части плавающего тела.

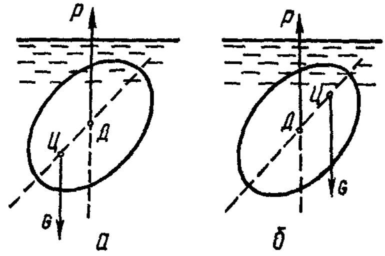

Рис. 3.28

Остойчивость — способность плавающего тела восстанавливать после крена свое исходное положение в жидкости.

Для того, чтобы плавающее в подводном состоянии тело обладало статической остойчивостью, центр тяжести его *Ц* должен лежать на оси плавания иижe центра водоизмещения *Д* (рис. 3.28, *а*). В противном случае (рис. 3.28, *б*) тело не обладает остойчивостью.

Если часть плавающего тела возвышается над свободной поверхностью жидкости (надводное плавание) при соблюдении приведенного выше условия, то тело, безусловно, остойчиво. При подводном плавании центр водоизмещения *Д* может лежать на оси плавания ниже центра тяжести *Ц*. Если последиий будет располагаться не выше предельного метацентра M_0 (при малых углах крена), тело будет оставаться остойчивым (рис. 3.27).

Чем выше расположен метацентр над центром тяжести тела, то есть чем больше метацентрическая высота $h_м$, тем больше остойчивость тела (способность из крена переходить в положение равновесия), так как момент пары сил P и G, стремящийся восстановить равновесие тела, прямо пропорционален метацентрической высоте. Если метацентр лежит ниже центра тяжести тела, то есть метацентрическая высота отрицательна, то тело неостойчиво.

Вопросы для самопроверки

1. Нормальные напряжения в покоящейся жидкости и их свойства.
2. Что такое гидростатическое давление и его свойства?
3. Основное уравнение гидростатики, его энергетический смысл и геометрическая интерпретация.
4. Определение гидростатического давления в произвольной точке покоящейся жидкости. Какова размерность давления и его единицы?
5. Полное (абсолютное) и манометрическое (избыточное) давление, вакуум. Что такое пьезометрическая и вакуумметрическая высота?
6. Сила давления жидкости на плоскую стенку.
7. Эпюры нормальных напряжений и их использование.
8. Центр давления и определение его местоположения.
9. Сила давления жидкости на криволинейные цилиндрические поверхности.
10. Определение подъемной силы при плавании тел.

Глава 4. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

§ 4.1. Основные виды и формы движения жидкости

Гидродинамикой называется раздел гидравлики, изучающий движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами при их относительном движении. Исходя из этого вводят понятие о внутренней и внешней задачах механики жидкости.

К внутренней задаче относится движение жидкости в трубах, каналах и т. п., а к внешней задаче относится обтекание потоком твердых тел.

Кинематикой жидкости называется раздел гидродинамики, в котором рассматриваются виды и формы движения жидкости без учета сил, под действием которых происходит движение.

Динамикой жидкости называется раздел гидродинамики, который изучает законы движения жидкости в зависимости от действующих сил.

В гидродинамике так же, как и в гидростатике (см. § 2.4), рассматриваются две модели жидкостей: идеальные (или невязкие) и реальные (вязкие).

При изучении принимается, что жидкость является сплошной средой даже при бесконечно малых объемах. Поэтому гидродинамику можно считать в общем случае разделом механики сплошных сред. Предположение о сплошности позволяет считать все параметры движущейся жидкости непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и времени.

Жидкость состоит из бесконечно большого числа частиц, которые при рассмотрении уравнений движения физически представляются как очень малая масса жидкости, занимающая соответственно малый объем. В процессе движения жидкости изменяются во времени взаимные положения ее частиц и их форма. Деформируемость частицы жидкости является ее главной кинематической особенностью как элемента сплошной среды.

Под *точкой пространства* понимают геометрический образ, не имеющий размеров, положение которого в пространстве определяется тремя координатами x, y, z. Таким образом, через данную точку пространства проходят разные частицы жидкости, а положение движущейся жидкой частицы определяется координатами.

Частица жидкости при движении характеризуется плотностью, местной скоростью и гидродинамическим давлением.

Плотность жидкости ρ (см. § 2.2) принимается постоянной.