

**§ 5.1. Характеристика гидравлических сопротивлений**

Как отмечено в § 4.11, важнейшим уравнением гидравлики является уравнение Д. Бернулли для потока вязкой (реальной) жидкости, которое может быть представлено в виде (4.72):

$$\frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + h_w = \text{const.}$$

Изложенное в предыдущей главе показывает, что для применения уравнения Д. Бернулли в решениях прикладных инженерных задач необходимо определять затраты удельной энергии или потери напора на преодоление гидравлических сопротивлений  $h_w$ .

Причина появления в реальных жидкостях гидравлических сопротивлений — физическое свойство этих жидкостей (см. § 2.4) оказывать сопротивление касательным усилиям при движении. Сопротивления могут быть обусловлены вязкостными или инерционными силами. *Вязкостные силы* зависят от внутреннего трения между частицами движущейся жидкости, а *инерционные* — от способности частиц жидкости оказывать сопротивление изменению своего движения.

Потери энергии (напора)  $h_w$  различаются двух видов — по длине  $h_l$  и местные  $h_m$ .

Потери по длине  $h_l$  проявляются равномерно по длине потока и пропорциональны ей. Они возникают при движении жидкости в трубах и открытых руслах.

Местные потери  $h_m$  образуются в результате изменения скоростной структуры потока на каком-то локальном (местном) участке по пути движения жидкости. Они обычно обусловлены резким изменением конфигурации потока (по-

ворот, расширение, сужение, кран, задвижка и др.).

В общем случае имеют место оба вида потерь — по длине и местные, значения которых суммируют:

$$h_w = \Sigma h_l + \Sigma h_m, \quad (5\ 1)$$

где  $\Sigma h_l$  — сумма потерь по длине последовательных участков русла с разными поперечными сечениями;  $\Sigma h_m$  — сумма всех местных потерь.

В конкретных случаях могут преобладать либо одни, либо другие виды потерь. Так как различные виды сопротивлений влияют друг на друга, то общие потери определяют для комбинации ряда сопротивлений.

Потери энергии, как отмечено в § 4.11, обусловлены переходом механической энергии потока в тепловую и этот процесс необратим. Возникновение гидравлических сопротивлений при движении вязкой жидкости связано с работой сил трения внутри жидкости.

Общие законы внутреннего трения в жидких телах были впервые сформулированы И. Ньютоном в 1686 г. Смысл гипотезы Ньютона сводится к тому, что: *«сопротивление, происходящее от недостатка скользкости жидкости, при прочих одинаковых условиях, предполагается пропорциональным скорости, с которой частицы жидкости разъединяются друг от друга»* и далее: *«так как жидкость однородная, то взаимодействия слов друг на друга будут пропорциональны их перемещениям друг по другу и величине поверхностей, по которым взаимодействия происходят»*. Однако И. Ньютон не дал при этом какой-либо опытной проверки своей гипотезы, высказывая ее скорее умозрительно, без аналитической зависимости.

В 1879 г. «отец гидродинамической теории смазки» Н. П. Петров экспериментально доказал гипотезу Ньютона

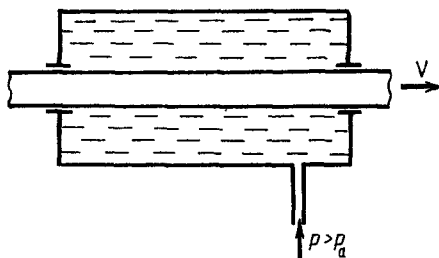


Рис. 5.1

для движущейся слоями жидкости. При этом под *слоем жидкости* понимается геометрическое место частиц жидкости, движущихся с одинаковой местной скоростью.

Опыты Н. П. Петрова состояли в том, что в трубе большего диаметра перемещалась труба меньшего диаметра с разной скоростью (рис. 5.1). Герметичное пространство внутри большой трубы заполнялось жидкостями разного рода и, кроме того, с помощью специального устройства создавалось разное давление.

Эти опыты позволили сформулировать закон о силе внутреннего трения, проявляющейся при перемещении слоев жидкости друг по другу.

При этом под *силой внутреннего трения* или *силой вязкости* в жидкости понимается касательная к поверхности слоев жидкости сила их сопротивления сдвигу относительно друг друга.

Было установлено, что сила внутреннего трения имеет следующие свойства: прямо пропорциональна относительной скорости перемещения слоев жидкости (градиенту скорости); прямо пропорциональна площади поверхности соприкосновения этих слоев; зависит от свойств (рода) жидкости; не зависит от давления.

Таким образом, *закон трения в жидкостях резко отличается от закона трения в твердых телах*, где сила трения прямо пропорциональна давлению и практически не зависит от площади по-

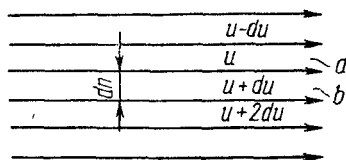


Рис. 5.2

верхности соприкосновения трущихся тел и относительной скорости движения (но зависит конечно от рода материалов).

Под *градиентом скорости* следует понимать приращение скорости на единицу длины нормали  $n$  (рис. 5.2). При этом рассматриваем некоторый элементарный слой  $b$  толщиной  $dn$ . Эту толщину считаем по нормали  $n$  к направлению движения, на верхней границе которого скорость  $u$ , а на нижней ( $u + du$ ). Тогда относительная скорость, или градиент скорости

$$\frac{u + du - u}{dn} = \frac{du}{dn}. \quad (5.2)$$

Выражение (5.2), строго говоря, справедливо только для установившегося плавноизменяющегося движения, ибо в общем случае градиент скорости при неустановившемся движении равен  $\frac{du_x}{dz}$ .

Свойства жидкости определяются динамической вязкостью  $\mu$  (см. § 2.4).

Таким образом, сила внутреннего трения

$$T = -\mu S \frac{du}{dn}, \quad (5.3)$$

где  $S$  — площадь рассматриваемого участка поверхности.

Знак минус в формуле (5.3) принят потому, что каждый верхний слой  $a$  (рис. 5.2) задерживает нижний  $b$ , а сила внутреннего трения направлена против движения.

Если ввести понятие удельной силы трения на единицу поверхности, то так называемое *касательное напряжение*  $\tau$

можно определить по формуле

$$\tau = -\mu \frac{du}{dn} . \quad (5.4)$$

Механизм действия сил сопротивления очень сложен. Аналитически пока не удалось получить универсальные соотношения для их вычисления. Потери энергии (напора) зависят непосредственно от режима движения жидкости, который предопределяет те или иные теоретические или эмпирические зависимости.

### § 5.2. Два режима движения жидкости

То, что движение жидкости может происходить по-разному впервые отметил Г. Хаген (1869 г.).

Д. И. Менделеев в своей работе «О сопротивлении жидкости и о воздухоплавании» (1880 г.) указал на весьма важное обстоятельство, положенное в основу современной гидравлики: *«Несомненно, однако, что в опытах, произведенных в тонких капиллярных трубках, замедляющая сила, или трение, оказалась почти пропорциональной первой степени скорости, а в широких трубках почти квадрату скорости»*. Следовательно, уже Д. И. Менделеев предвидел существование двух режимов движения жидкости.

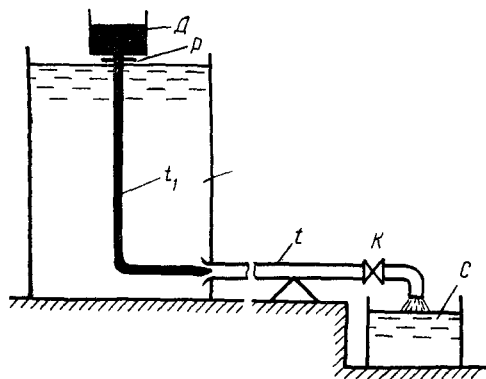


Рис. 5.3

Детальные экспериментальные исследования режимов движения жидкости выполнил английский физик О. Рейнольдс, результаты которых были опубликованы в 1883 г.

Конструкция и принцип действия прибора Рейнольдса следующие (рис. 5.3). Из резервуара В с исследуемой жидкостью и стеклянной горизонтальной трубки t, начало которой находится в резервуаре, а в конце ее имеется кран К для регулирования расхода. Расход измерялся с помощью мерного бака С. Вход из бака в трубу делается плавным для уменьшения возможных возмущений при поступлении жидкости в трубу. Над резервуаром В располагается маленький бачок Д, наполненный раствором краски той же плотности, что и вода. От бачка Д отходит тонкая трубка t<sub>1</sub>, изогнутая внизу так, что ее заостренный выходной конец вдвинут во входной участок стеклянной трубки t. Расход краски регулируется краном Р.

Перед началом опыта жидкость в резервуаре выдерживается в покое в течение нескольких часов для устранения всех начальных возмущений. При незначительном открытии крана К из резервуара начинает вытекать жидкость через трубку t, в которой устанавливается средняя скорость, соответствующая данному расходу. Затем, слегка открывается кран Р и из верхнего бачка выпускается раствор краски. При одновременном открытии двух кранов К и Р внутри трубы движется тонкая окрашенная прямолинейная струйка, не смешиваясь со всей массой жидкости (рис. 5.4, а). При изменении положения тонкой трубки меняется и положение окрашенной струйки относительно стенок стеклянной трубы t, но раствор краски по-прежнему будет двигаться отдельной стружкой. Следовательно, в стеклянной трубе жидкость движется отдельными стружками или слоями. Приоткрыв кран К побольше, то есть несколько

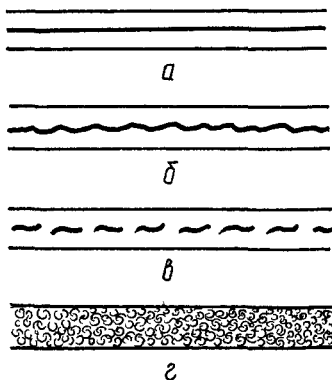


Рис. 5.4

увеличив скорость движения жидкости в трубе, можно наблюдать ту же картину раздельного течения исследуемой жидкости и раствора краски.

Однако после определенного открытия крана  $K$  струйка начинает приобретать волнообразное очертание — путь ее становится извилистым и неправильным, хотя струйка продолжает двигаться самостоятельно (рис. 5.4, б). При дальнейшем медленном открытии крана на отдельных участках струйки появляются разрывы и струйка теряет свою отчетливую форму (рис. 5.4, в).

Большее открытие крана  $K$  приводит к тому, что окрашенная струйка разрушается полностью и исчезает, а вся масса исследуемой жидкости в стеклянной трубе оказывается окрашенной, то есть частицы жидкости при движении перемешиваются (рис. 5.4, г) и движутся беспорядочно. Очевидно, что скорость движения исследуемой жидкости в трубе достигла некоторой критической величины, когда ее постепенные количественные изменения привели к качественным изменениям режима движения. Такую скорость называют *верхней критической скоростью*  $V_{в.к}$ . Дальнейшее открытие крана  $K$  и связанное с этим увеличение скорости в стеклянной трубе не приводит к внешнему изменению характера движения: вся масса движущейся жидкости будет оставаться окрашенной, увеличивается только степень беспорядочности движения частиц.

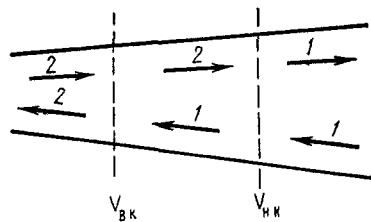


Рис. 5.5

При обратном ходе опыта, то есть при постепенном закрытии крана, явление повторяется в обратном порядке, хотя переход от беспорядочного движения в струйное, упорядоченное, происходит при более низких значениях критической скорости в трубе. Эта скорость называется *нижней критической скоростью*  $V_{н.к}$ .

Режим движения, при котором имеет место слоистое движение жидкости, называется *ламинарным* (от латинского слова *lamina* — слой), и в этом случае частицы жидкости не перемешиваются.

Беспорядочный режим движения, при котором происходит перемешивание частиц жидкости, называют *турбулентным*.

Следовательно, при скорости потока  $V$  меньше  $V_{н.к}$  ( $V < V_{н.к}$ ) всегда будет ламинарный режим движения (1), а при  $V > V_{в.к}$  — турбулентный (2). При скоростях в пределах  $V_{н.к} < V < V_{в.к}$  движение может быть и ламинарным и турбулентным. Оно зависит от изменения скорости движения жидкости. Если скорость уменьшается, то в зоне  $V_{н.к} < V < V_{в.к}$  будет турбулентный режим движения, то есть такой, какой был до этой зоны. И наоборот, при увеличении скорости в этой зоне сохранится ламинарный режим движения (рис. 5.5).

Значения  $V_{н.к}$  и  $V_{в.к}$  были установлены О. Рейнольдсом:

$$V_{н.к} = \frac{Re_{н.к} d}{\nu}; \quad V_{в.к} = \frac{Re_{в.к} d}{\nu}, \quad (5.5)$$

где  $Re_{н.к}$  — нижнее критическое число Рейнольдса;  $Re_{в.к}$  — верхнее критическое число Рейнольдса.

Критические числа Рейнольдса (названные двумя первыми буквами его фамилии) — безразмерные численные параметры, не зависящие от рода жидкости и размеров живого сечения потока. Опытами установлено, что для трубопроводов нижнее критическое число Рейнольдса  $Re_{н.к} = 2320$ . Верхнее критическое число Рейнольдса  $Re_{в.к}$  изменяется в пределах от 4000 до 20 000.

Вопрос о неустойчивости ламинарного режима и его переходе в турбулентный, а также о величине критического числа Рейнольдса подвергался тщательному теоретическому и экспериментальному изучению, но до сих пор не получил еще достаточно полного решения [3].

Сопоставляя верхнее и нижнее критические числа, следует отметить, что они значительно отличаются друг от друга. Между ними имеется зона, в которой, как отмечено выше, в зависимости от условий может быть как ламинарный режим движения, так и турбулентный.

Как отмечает А. Д. Альтшуль [3], выполненные исследования показывают, что критическое число О. Рейнольдса увеличивается в сужающихся трубах и уменьшается в расширяющихся (рис. 5.5). Это явление объясняется тем, что при ускорении движения в сужающихся трубах уменьшается тенденция частиц жидкости к поперечному перемещению, а в расширяющихся трубах при замедленном движении усиливается.

Так как в переходной зоне ламинарный режим неустойчив и легко переходит в турбулентный, то принимают одно расчетное критическое число Рейнольдса  $Re_k = 2320$ .

Для конкретных условий движения жидкости всегда можно установить дей-

ствительное число Рейнольдса:

$$Re = \frac{Vd}{\nu}, \quad (5.6)$$

где  $V$  — средняя в сечении скорость, определяемая при заданном расходе  $Q$  и размере трубопровода  $d$ :

$$V = Q/\omega.$$

Затем полученное число Рейнольдса сравнивается с критическим и определяется режим движения:

при  $Re < Re_k = 2320$  — режим движения ламинарный;

при  $Re > Re_k = 2320$  — режим движения турбулентный.

Для открытых русел, лотков, труб некруглого сечения или труб круглого сечения при безнапорном движении (то есть при неполном заполнении) число Рейнольдса обычно выражается через гидравлический радиус  $R$ :

$$Re_{kR} = \frac{VR}{\nu}. \quad (5.7)$$

В связи с тем, что  $R = \frac{\omega}{\chi}$ , а для труб  $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$  и  $\chi = \pi d$ , то  $R = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}$  и, следовательно, соответствующее критическое число Рейнольдса  $Re_{kR}$  будет в 4 раза меньше  $Re_d$ , то есть  $Re_R = 580$ . Обычно принято считать, что при  $Re_R < 300-580$  — движение ламинарное, а при  $Re_R > 300-580$  — турбулентное.

Ламинарный режим имеет место в тонких капиллярных трубках, при движении воды (фильтрации) в порах грунта, а также при движении очень вязких жидкостей в трубопроводах (нефть, мазут, смазочное масло, сахарный сироп и др.).

В остальных случаях движения воды обычно наблюдается турбулентный режим движения.

Прибор Рейнольдса может быть использован для количественного опре-

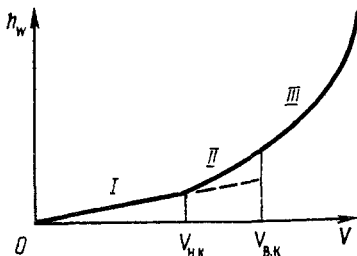


Рис. 5.6

деления потерь напора с помощью пьезометров.

Анализ данных опытов О. Рейнольдса и других исследователей показывает, что потери напора (энергии)  $h_w$  при ламинарном и турбулентном режимах движения резко различны.

При ламинарном режиме движения *потери напора пропорциональны средней скорости потока в первой степени:*

$$h_w = k_n V, \quad (5.8)$$

где  $k_n$  — коэффициент пропорциональности при ламинарном режиме.

Для полностью развитого турбулентного режима движения в шероховатых водоводах *потери напора пропорциональны средней скорости потока во второй степени* (квадратичная область гидравлических сопротивлений)

$$h_w = k_T V^2, \quad (5.9)$$

где  $k_T$  — коэффициент пропорциональности при турбулентном режиме.

В переходной зоне

$$h_w = k_n V^n, \quad (5.10)$$

где  $k_n$  — коэффициент пропорциональности в переходной области;  $n$  — показатель степени;  $n < 2$  даже при полностью развитом турбулентном режиме движения в гладких водоводах (трубы, лотки).

На рис. 5.6 графически показана зависимость потерь от скорости, которая наглядно показывает, что потери напора (энергии) определяются режимом дви-

жения жидкости: участок I — ламинарный режим движения; участок II — переходная зона неустойчивого режима движения; участок III — турбулентный режим движения (квадратичный закон сопротивления).

### § 5.3. Распределение касательных напряжений при равномерном движении

Как отмечено в § 4.3, наиболее простым видом движения является равномерное, когда элементы потока не изменяются ни во времени, ни в пространстве.

Рассмотрим равномерное движение жидкости в трубе (рис. 5.7) на участке  $l$ , ограниченном сечениями 1—1 и 2—2.

Из механики известно: равномерное движение возможно только лишь при условии, что все действующие силы уравновешены.

На отсек жидкости между сечениями 1—1 и 2—2 действуют: сила гидродинамического давления  $P_1$  — слева; сила гидродинамического давления  $P_2$  — справа; сила тяжести  $G$ , под действием которой происходит движение; сила трения  $T$ , сопротивляющаяся движению.

Следовательно,

$$P_1 - P_2 + G \cos \beta - T = 0, \quad (5.11)$$

где  $\beta$  — угол действия силы  $G$  на ось потока;  $P_1$ ,  $P_2$  — силы гидродинамиче-

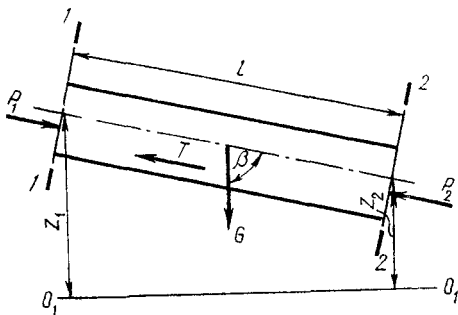


Рис. 5.7

ского давления,

$$P_1 = \rho_1 \omega_1; \quad P_2 = \rho_2 \omega_2$$

Так как диаметр трубы не изменяется, то  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  и, следовательно,

$$P_1 = \rho_1 \omega; \quad P_2 = \rho_2 \omega.$$

Сила тяжести  $G = \gamma \omega l$ , а  $\cos \beta = \frac{z_1 - z_2}{l}$ , где  $z_1$  и  $z_2$  — расстояние от центров тяжести сечений до плоскости сравнения.

Сила трения  $T = \tau \chi l$ , где  $\chi$  — длина смоченного периметра, а  $\chi l$  — боковая поверхность отсека, касательное напряжение на единицу которой составляет  $\tau$ .

Подставляя в (5.11) значения сил, получим

$$\rho_1 \omega - \rho_2 \omega + \gamma \omega l \frac{z_1 - z_2}{l} - \tau \chi l = 0$$

Разделив каждый член уравнения на  $\gamma \omega$ , получим

$$\left( \frac{\rho_1}{\gamma} - \frac{\rho_2}{\gamma} \right) + (z_1 - z_2) = \frac{\tau}{\gamma} \frac{\chi}{\omega} l \quad (5.12)$$

Теперь запишем уравнение Д. Бернулли для сечений 1—1 и 2—2 относительно точек живого сечения, находящихся по оси трубы,

$$\frac{\alpha V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{w1-2}. \quad (5.13)$$

Так как движение установившееся, то есть  $Q = \text{const}$ , а  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , то  $V_1 = V_2 = V$ .

Тогда из (5.13) следует

$$\left( \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) + (z_1 - z_2) = h_{w1-2}. \quad (5.14)$$

Так как в уравнениях (5.12) и (5.14) левые части равны, то равны и правые, то есть

$$h_{w1-2} = \frac{\tau}{\gamma} \frac{\chi}{\omega} l. \quad (5.15)$$

В § 4.11 показано, что средний гидравлический уклон на участке  $l$

$$i_e = \frac{h_w}{l}.$$

Величину  $i_e$  часто называют уклоном трения и обозначают  $i_f$ .

Отметим, что  $R = \frac{\omega}{\chi}$  и, следовательно,  $\frac{\chi}{\omega} = \frac{1}{R}$ .

Тогда из (5.15) следует

$$i_e = \frac{h_w}{l} = \frac{\tau}{\gamma} \frac{1}{R},$$

или

$$\frac{\tau}{\gamma} = R i_e. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) является общим выражением для потерь напора на трение при равномерном движении жидкости в трубах и показывает, что отношение напряжений сил трения к единице веса жидкости равно произведению гидравлического радиуса на гидравлический уклон

## § 5.4. Уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье—Стокса)

Условия движения реальной (вязкой) жидкости удобно классифицировать в зависимости от соотношения влияния сил вязкости и динамических (инерционных) сил.

Движение вязкой жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, которые можно получить на основании уравнений Эйлера для движения (4.15), если учесть действие сил вязкости

Рассмотрим нестрогий (иллюстративный) вывод уравнений движения вязкой жидкости исходя из формулы (5.4), выражающей закон трения.

В потоке жидкости выделим бесконечно малый объем жидкости в виде параллелепипеда (рис. 5.8) массой  $dm =$

$= \rho dx dy dz$ . Рассмотрим действие сил вязкости первоначально по оси  $x$ .

Удельная сила трения на единицу поверхности, действующая на нижнюю плоскость, равна  $\tau$ , а сама сила вязкости

$$dT_1 = \tau dx dy.$$

На верхней плоскости удельная сила трения составляет  $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz$ , где  $\frac{\partial \tau}{\partial z}$  — изменение по оси  $z$ , а  $dz$  — расстояние.

Тогда сила вязкости

$$dT_2 = \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \right) dx dy.$$

Результирующая сил трения равна их разности

$$dT_x = dT_2 - dT_1 = \frac{\partial \tau}{\partial z} dz dx dy.$$

Отнесем силу  $dT_x$  к единице массы:

$$\frac{dT_x}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z}. \quad (5.17)$$

В общем случае удельная сила трения в соответствии с § 5.1 может быть записана как

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (5.18)$$

Подставляя значения (5.18) в (5.17), получим

$$\frac{dT_x}{dm} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}. \quad (5.19)$$

Если учесть влияние этой силы по всем направлениям, то получим вязкостный член в уравнении Навье — Стокса

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \quad (5.20)$$

По аналогии можно записать выражения и для других осей  $y$  и  $z$ , заменяя составляющие скорости на  $u_y$  и  $u_z$ .

Добавляя соответствующие вязкостные члены в уравнения Эйлера (4.15),

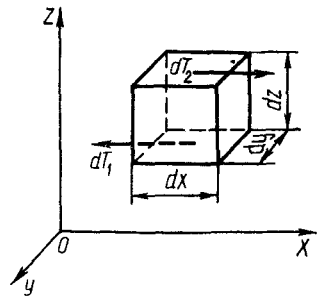


Рис. 5.8

получим

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_x}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_y}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Первые слагаемые в левых частях уравнений выражают *внутренние силы*, вторые — *внешние силы*, а третьи — *силы вязкости*. Правые части уравнений (5.21) выражают *динамические (инерционные) силы*.

Если ввести в рассмотрение оператор Лапласа  $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , то уравнения Навье — Стокса можно представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt} - \nu \nabla u_x; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt} - \nu \nabla u_y; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt} - \nu \nabla u_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$



С учетом развернутой формы уравнений Эйлера (4.17) уравнения Навье — Стокса можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt} + u_x \frac{du_x}{dx} + \\ &+ u_y \frac{du_x}{dy} + u_z \frac{du_x}{dz} - \nu \nabla u_x; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt} + u_x \frac{du_y}{dx} + \\ &+ u_y \frac{du_y}{dy} + u_z \frac{du_y}{dz} - \nu \nabla u_y; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt} + u_x \frac{du_z}{dx} + \\ &+ u_y \frac{du_z}{dy} + u_z \frac{du_z}{dz} - \nu \nabla u_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Система уравнений Навье — Стокса решается также, как и система уравнений Эйлера, то есть совместно с уравнением неразрывности. Обычно для определения искомым функций  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  надо располагать начальными данными и принимать во внимание граничные условия. Следует отметить, что решения уравнений Навье — Стокса существуют лишь для некоторых частных случаев, являющихся самостоятельной задачей. В то же время анализ этих уравнений позволяет правильно понять природу движения жидкости.

### § 5.5. Характеристика ламинарного режима движения жидкости

Характерным признаком ламинарного режима движения является *преобладающее влияние действия сил вязкости*. Правые части уравнений Навье — Стокса (5.21), зависящие от ускорения  $\left( \frac{du_x}{dt}, \frac{du_y}{dt}, \frac{du_z}{dt} \right)$  и выражающие динамические силы при движении жидкости, при этом весьма малы. И до тех пор

пока динамические силы будут малы, движение будет исключительно устойчивым. Такие условия движения характеризуются очень низкими значениями числа Рейнольдса. При таком движении любые мгновенные нарушения движения (колебания гидродинамического давления или местной скорости по тем или иным причинам) будут погашены действием сил вязкости.

Как отмечено в § 5.2, ламинарный режим движения происходит слоями, каждый из которых движется со своей местной скоростью. Так, в круглой цилиндрической трубе эти слои представляют собой концентрические трубки, которые движутся ступенчато вдоль оси трубы и каждая из них скользит по предыдущей. Движение жидкости на прямолинейном участке трубы является плавноизменяющимся и поэтому  $u_x = u$ ,  $u_y = 0$  и  $u_z = 0$ . Градиент скорости относительно радиуса по оси трубы  $r$  составляет  $\frac{du}{dr}$ .

**Распределение касательных напряжений по сечению.** В том случае, когда жидкость движется слоями, справедлива зависимость (5.4), в соответствии с которой касательное напряжение  $\tau$  для градиента скорости  $du/dr$  можно записать в виде

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}. \quad (5.24)$$

Каждый последующий слой скользит по предыдущему, поэтому знак градиента скорости  $\frac{du}{dr}$  отрицательный, так как скорость при удалении от оси трубы (в направлении  $r$ ) уменьшается от максимального значения до нуля на стенках трубы, вследствие прилипания частиц жидкости (при  $r = r_0$ ), где  $r_0$  — геометрический радиус трубы.

*Касательное напряжение  $\tau$  всегда считается положительной величиной.*

В соответствии с § 5.3 закон распределения касательных напряжений выра-

жается зависимостью (5.16)

$$\frac{\tau}{\gamma} = Ri.$$

Для круглой трубы гидравлический радиус

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{r_0}{2},$$

а для выделенного отсека внутри трубы радиусом  $r < r_0$   $R = r/2$ .

Подставляя значение  $R$  в (5.16), получим

$$\frac{\tau}{\gamma} = \frac{r}{2} i, \text{ или } \tau = \frac{\gamma i}{2} r. \quad (5.25)$$

Зависимость (5.25) указывает, что касательное напряжение изменяется по линейному закону (рис. 5.9) и при  $r = 0$  (по оси трубы)  $\tau = \tau_{\min} = 0$ , а при  $r = r_0$  (у стенок трубы)

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{\gamma i}{2} r_0.$$

Здесь следует отметить, что при выводе уравнения (5.16) использованы: гидравлический радиус  $R_0 = \frac{\omega}{\chi}$  (постоянная величина) и  $\tau_0$  — касательное напряжение на стенке. В то же время распределение касательных напряжений  $\tau$  по радиусу трубы  $r$  является функцией  $\tau = f(r)$ . Опуская индекс «0», мы вводим допущение о линейном распределении  $\tau$  по  $r$  и получаем зависимость (5.25). Поэтому, строго говоря, закон распределения касательных напряжений  $\tau$  по радиусу трубы  $\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}$  правильнее будет считать допущением.

**Распределение местных скоростей по сечению.** Рассматривая зависимости (5.24) и (5.25), следует отметить, что при равенстве левых частей уравнений равны и правые, а поэтому

$$\frac{\gamma i}{2} r = -\mu \frac{du}{dr}. \quad (5.26)$$

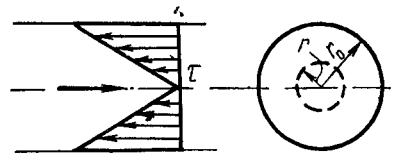


Рис. 5.9

Переносим переменную  $du$  в левую часть и тогда

$$du = -\frac{\gamma i}{2\mu} r dr. \quad (5.27)$$

Проинтегрируем (5.27) при  $\mu = \text{const}$

$$\int_0^u du = -\frac{\gamma i}{2\mu} \int_{r_0}^r r dr.$$

Изменив пределы интегрирования, получим

$$\int_0^u du = \frac{\gamma i}{2\mu} \int_r^{r_0} r dr.$$

Тогда, после интегрирования

$$u = \frac{\gamma i}{4\mu} (r_0^2 - r^2). \quad (5.28)$$

Уравнение (5.28) показывает, что *местные скорости при ламинарном режиме движения распределяются в живом сечении потока по параболическому закону* (рис. 5.10).

Максимальная скорость по оси трубы при  $r = 0$

$$u_{\max} = \frac{\gamma i}{4\mu} r_0^2. \quad (5.29)$$

Минимальная скорость на стенке трубы при  $r = r_0$

$$u_{\min} = 0. \quad (5.30)$$

Скорость  $u$  в любом слое можно выразить через  $u_{\max}$  по (5.29) из (5.28):

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (5.31)$$

или

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}.$$

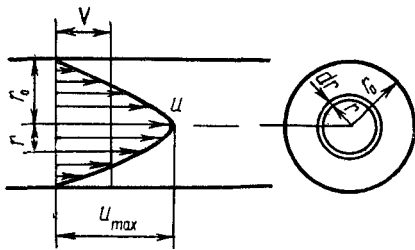


Рис. 5.10

Параболический закон распределения указывает на неравномерность распределения местных скоростей в живом сечении потока.

**Определение расхода и средней в сечении скорости потока.** Первоначально определим элементарный расход  $dQ$  концентрического слоя движущейся жидкости толщиной  $dr$  (рис. 5.10):

$$dQ = u\omega,$$

но  $d\omega = 2\pi r dr$ , тогда

$$dQ = u2\pi r dr. \quad (5.32)$$

Проинтегрируем (5.32):

$$\int_0^Q dQ = \int_0^{r_0} u d2\pi r dr. \quad (5.33)$$

Вместо местной скорости  $u$  подставим ее выражение через  $u_{\max}$  в соответствии с (5.31) и получим

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{r_0} u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) 2\pi r dr = \\ &= \frac{u_{\max} 2\pi}{r_0^2} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \\ &= \frac{u_{\max} \cdot 2\pi}{r_0^2} \left( \int_0^{r_0} r_0^2 r dr - \int_0^{r_0} r^3 dr \right) = \\ &= \frac{u_{\max} \cdot 2\pi}{r_0^2} (r_0^4/2 - r_0^4/4). \end{aligned}$$

Следовательно, расход

$$Q = \frac{\pi r_0^2}{2} u_{\max}. \quad (5.34)$$

Тогда средняя в живом сечении скорость потока

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0^2} u_{\max} = \frac{u_{\max}}{2}. \quad (5.35)$$

Таким образом, при ламинарном режиме движения в круглой трубе *средняя скорость потока равна половине максимальной*, наблюдаемой по оси трубы.

**Определение потерь по длине потока.** Подставляя в (5.35) значение  $u_{\max}$  в соответствии с (5.29), получим

$$V = \frac{\gamma i}{8\mu} r_0^2. \quad (5.36)$$

Из (5.36) следует

$$i = \frac{8\mu}{\gamma r_0^2} V. \quad (5.37)$$

Зная, что  $\gamma = \rho g$ , а  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$  и подставляя диаметр трубы  $d$ , получим

$$i = \frac{32\nu}{gd^2} V. \quad (5.38)$$

Зависимость (5.38), определяющая потерю напора на единицу длины трубы при ламинарном режиме, носит название *формулы Пуазейля* по имени французского физиолога и физика, доктора медицины Ж. Пуазейля, который в 1840 г. получил эту формулу для течения жидкости в тонких трубках (капиллярах), изучая движение крови в кровеносных сосудах. Формула Пуазейля показывает, что *потеря напора при ламинарном режиме пропорциональна средней скорости в первой степени, зависит от рода жидкости ( $\nu$ ), обратно пропорциональна диаметру трубы ( $d^2$ ) и не зависит от вида и состояния стенок*. Таким образом, отмеченная в § 5.2 зависимость (5.8) получена в конкретном виде: (5.38).

Для удобства практического использования зависимости (5.38) при решении практических задач ее можно преобразовать:

$$i = \frac{32\nu}{gd^2} V \frac{2V}{2V} = \frac{64\nu}{Vd} \frac{1}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Учитывая, что  $Re = \frac{Vd}{\nu}$ , получим

$$i = \frac{64}{Re} \frac{1}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Обозначая через  $\lambda = \frac{64}{Re}$  гидравлический коэффициент трения на единицу длины (коэффициент Дарси) и зная, что  $i = \frac{h_l}{l}$ , получим окончательно, что потери по длине

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (5.39)$$

Следует отметить, что для ламинарного режима движения гидравлический коэффициент трения  $\lambda = 64/Re$  получен теоретическим путем.

**Определение коэффициента кинетической энергии потока  $\alpha$ .** Определение этого коэффициента, входящего в уравнение Д. Бернулли производится также теоретическим путем. В § 4.10 показано, что коэффициент  $\alpha$  определяется по зависимости (4.68):

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{V^3 \omega}.$$

Подставляя вместо местной скорости  $u$  ее выражение через  $u_{\max}$  в соответствии с (5.31), а также учитывая, что согласно (5.35)  $V = u_{\max}/2$ , а  $d\omega = 2\pi r dr$  и  $\omega = \pi r_0^2$ , получим

$$\alpha = \frac{\int_0^{r_0} u_{\max}^3 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 2\pi r dr}{\left(\frac{u_{\max}}{2}\right)^3 \pi r_0^2} =$$

$$= \frac{8 \cdot 2\pi u_{\max}^3 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 r dr}{u_{\max}^3 \pi r_0^2} =$$

$$= \frac{16}{r_0^8} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2)^3 r dr. \quad (5.40)$$

Распишем подробнее интеграл

$$\int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2)^3 r dr = \int_0^{r_0} r_0^6 r dr - \int_0^{r_0} 3r_0^4 r^3 dr +$$

$$+ \int_0^{r_0} 3r_0^2 r^5 dr - \int_0^{r_0} r^7 dr = \frac{r_0^8}{2} - \frac{3r_0^8}{4} +$$

$$+ \frac{3r_0^8}{6} - \frac{r_0^8}{8} = \frac{r_0^8}{8}.$$

Подставляя полученное значение интеграла в зависимость (5.40), убеждаемся, что

$$\alpha = \frac{16/r_0^8}{r_0^8/8} = 2. \quad (5.41)$$

Такое отличие коэффициента кинетической энергии  $\alpha$  от единицы объясняется, как было указано выше, неравномерностью распределения местных скоростей по живому сечению в соответствии с параболическим законом.

**Начальный участок ламинарного движения.** Приведенные выше зависимости, основанные на параболическом законе распределения (5.31), справедливы для развитого ламинарного режима движения, который устанавливается на участке, называемом *начальным* и расположенном на определенном расстоянии от входа в трубу. При входе в трубу жидкость поступает почти с одинаковой скоростью по всему поперечному сечению (рис. 5.11) и только непосредственно около стенок в очень тонком слое происходит почти внезапное уменьшение скорости до нуля вследствие прилипания частиц жидкости к стенкам трубы. Затем по мере удаления от входа под влиянием внутреннего трения начинают

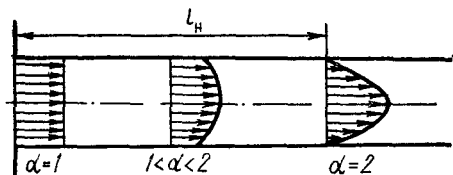


Рис. 5.11

тормозиться слой жидкости, расположенные ближе к стенкам трубы. При дальнейшем удалении замедление движения пристеночных слоев вызывает увеличение скорости центральных слоев. Этот процесс заканчивается, когда максимальная скорость по оси трубы станет в два раза больше средней скорости по сечению. Таким образом, в пределах начального участка происходит переформирование эпюры скоростей от равномерной ( $\alpha = 1$ ) до параболической ( $\alpha = 2$ ).

Теоретически длина начального участка  $l_n$  бесконечна, но при практических расчетах она принимается по рекомендации Л. Шиллера:

$$l_n = 0,29d \operatorname{Re}. \quad (5.42)$$

В связи с наличием начального участка важным является вопрос определения коэффициентов  $\alpha$  и  $\lambda$  для расчета коротких труб, длина которых меньше длины начального участка.

По рекомендации Н. З. Френкеля, значения коэффициента  $\alpha$  принимаются в зависимости от отношения  $\frac{x}{d \operatorname{Re}}$ , где  $x$  — расстояние от закругленного входа до искомого сечения начального участка:

$\frac{x}{d \operatorname{Re}}$	0	0,0025	0,005	0,01	0,015	0,02	0,029
$\alpha$	1	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	2

Гидравлический коэффициент трения  $\lambda$  для коротких труб, по рекомендации Н. З. Френкеля,

$$\lambda = \frac{\Phi}{\operatorname{Re}}, \quad (5.43)$$

где коэффициент  $\Phi$  определяется по следующим данным:

$\frac{x}{d \operatorname{Re}}$	0,0025	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,029
$\Phi$	122	105	88	79	74	72	70

Следовательно, для начального участка потери энергии больше, чем для участка развитого ламинарного режима, где  $\lambda = 64/\operatorname{Re}$ .

Если длина трубы  $l$  больше длины начального участка  $l_n$ , то потери энергии будут складываться из потерь на начальном участке и на остальной части трубы (см. (5.39)):

$$h_l = \left[ \frac{\Phi}{\operatorname{Re}} \frac{l}{d} + \frac{64}{\operatorname{Re}} \frac{(l - l_n)}{d} \right] \frac{V^2}{2g}. \quad (5.44)$$

Принимая с учетом рекомендации Л. Шиллера (5.49) при  $\frac{l_n}{d \operatorname{Re}} = 0,029$  значение  $\Phi = 70$ , получим

$$h_l = \left( 0,16 + \frac{64}{\operatorname{Re}} \frac{l}{d} \right) \frac{V^2}{2g}. \quad (5.45)$$

По рекомендации Ю. М. Константинова, зависимость (5.45) при  $\operatorname{Re} = \frac{Vd}{\nu}$  приводится к виду

$$h_l = \frac{32\nu}{gd^2} V l \left( 1 + \frac{\operatorname{Re} d}{400l} \right). \quad (5.46)$$

Если длина трубы  $l > 0,05 \operatorname{Re} d$ , то величиной  $\frac{\operatorname{Re} d}{400l}$  можно пренебречь ввиду ее относительной малости, и расчет производится с использованием зависимости (5.39) при  $\lambda = \frac{64}{\operatorname{Re}}$ .

## § 5.6. Характеристика турбулентного режима движения жидкости

Потеря устойчивости движения и переход к турбулентному режиму движения. Один из современных ведущих исследователей турбулентности П. Брэдшоу отмечает, что исследование турбу-

лентности можно назвать искусством понимания уравнений Навье — Стокса (5.21) без фактического их решения. Характерным признаком турбулентного режима движения является *преобладающее действие динамических сил*, которые во много раз превосходят силы вязкости. Это имеет место при больших числах Рейнольдса, когда движение становится неустойчивым. С увеличением скорости слоистое движение нарушается и на основное (первичное) движение накладываются случайные во времени и в пространстве флуктуации (колебания) скорости и давления. Эти мгновенные нарушения движения уже не могут быть погашены силами вязкости, которые становятся относительно малыми по сравнению с динамическими силами. Последние и обуславливают неупорядоченное, хаотичное, весьма сложное в деталях течение жидкости, называемое *турбулентным*. Наглядное представление о подобном движении дает наблюдение за кружащимися при падении снежинками. Сам термин «турбулентность» был введен в механику жидкости физиком Дж. Дж. Томсоном (лордом Кельвином).

Различают пристеночную и свободную турбулентности. *Пристеночная турбулентность* возбуждается силами трения вблизи неподвижных стенок (течения в трубах, в открытых руслах) — во внутренней задаче и в пограничных слоях во внешней задаче (то есть при обтекании тел).

*Свободная турбулентность* возникает при течении слоев жидкости с различными скоростями. Например, в потоке позади местных сопротивлений.

Первоначально рассмотрим потоки с пристеночной турбулентностью, основные источники которой: трение  $\tau_0$  о стенки русла, характер изменения давления, условия входа в трубу, степень турбулентности внешнего течения при обтекании тела или входящего в трубу потока, геометрия передней кромки об-

текаемого тела, теплопередача от стенки в поток.

В свое время еще О. Рейнольдс отмечал, что ламинарное движение в трубах переходит в турбулентное не внезапно и не по всей трубе. Вначале на некоторых участках появляются отдельные турбулентные «пятна», не занимающие все поперечное сечение трубы. Эти «пятна» либо растут и занимают все поперечное сечение, образуя турбулентные «пробки», либо уменьшаются в размере и исчезают.

Образование турбулентных «пробок» характеризуется тем, что на таких участках потока имеет место (рис. 5.12) турбулентный режим движения жидкости (2), а вне их — ламинарный (1). При возрастании скорости турбулентные «пробки» занимают все большие участки по длине трубы, пока не сольются в единый турбулентный поток. Если же скорости будут уменьшаться, то «пробки» исчезают и весь поток становится ламинарным. Такой вид движения, характеризующийся локальными турбулентными возмущениями, когда скорость движения уже не носит регулярного характера, называют *перемежающейся турбулентностью*. Он характеризуется коэффициентом перемежаемости  $\gamma$ , который равен отношению промежутка времени, в течение которого в определенном месте трубы наблюдается турбулентное движение, ко всему времени наблюдения. Если режим ламинарный, то  $\gamma = 0$ , если турбулентный, то  $\gamma = 1$ .

Таким образом, при больших числах Рейнольдса наступает полностью развитый турбулентный режим движения жидкости.

Одно из важнейших свойств турбулентности — *неупорядоченность движения*. Но в то же время турбулентное движение поддается описанию с помощью *законов теории вероятности*. При этом оказывается возможным указать



Рис. 5.12

точные статистически средние характеристики движения (скорость, давление и др.). По И. О. Хинце \* определено турбулентности может быть сформулировано так: «*турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченности течения, в котором различные величины претерпевают хаотическое изменение во времени и в пространственных координатах и при этом могут быть выделены их статистически точные осредненные значения.*»

К настоящему времени накоплен обширный экспериментальный материал, позволяющий в общих чертах представить механизм зарождения и поддержания турбулентности. Предложены также полуэмпирические теории, удовлетворяющие во многих случаях практические инженерные расчеты.

**Модель турбулентного потока.** В настоящее время модель турбулентного потока представляют (рис. 5.13) состоящей из трех зон (областей): вязкого подслоя 1, переходной области 2 и области развитого турбулентного течения (ядра турбулентного потока — 3).

*Вязкий подслой* располагается в непосредственной близости от стенок, в нем наблюдаются турбулентные пульсации, но они заглушаются силами вязкости. Поэтому в весьма тонком вязком подслое характер течения обуславливается в основном вязким трением. Средняя толщина вязкого подслоя в такой модели турбулентного движения может быть больше или меньше средней высоты бугорков (выступов) шероховатости стенок. В этом подслое на твердых и не-

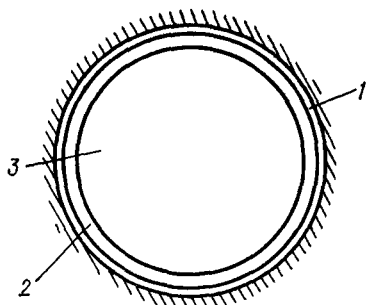


Рис. 5.13

подвижных стенках скорость равна нулю, а с удалением от них скорость течения резко возрастает.

В *переходной области* силы вязкости соизмеримы с инерционными силами. Эта область располагается между вязким подслоем и областью развитого турбулентного течения, называемой *ядром турбулентного потока*.

Пристеночное турбулентное течение, например в гладком канале или гладкой трубе, (см. § 5.7), состоит из вязкого подслоя с близким к линейному распределением скоростей, переходной области и турбулентного ядра потока, в котором нижняя (примыкающая к переходной) область имеет логарифмический закон распределения скоростей, а над ней (см. зависимость (5.69)), где логарифмический закон нарушается, расположена внешняя область. В пристеночной зоне потока наблюдается максимальное порождение турбулентности.

Отдельные исследования последних лет указывают на увеличение интенсивности турбулентности в тонком приповерхностном слое при движении воды в открытых руслах. В связи с этим высказывается мнение, что дополнительным источником возникновения турбулентности в открытых руслах является касательное напряжение воздушного потока, особенно при его большой скорости.

\* И. О. Хинце Турбулентность.— М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963.— 680 с.

**Пульсация скорости и давления.** Наблюдения за скоростью и давлением в какой-либо точке турбулентного потока указывают на их колебания (пульсацию). Скорость изменяется по времени беспорядочно, непериодически, отклоняясь от некоторого устойчивого среднего положения (рис. 5.14). Турбулентное движение, как отмечено выше, является неустановившимся. Определенный порядок может быть наведен, если разделить переменную величину — мгновенную местную скорость  $u$  — на две части:  $\bar{u}$  — осредненную по времени и  $u'$  — скорость пульсации (пульсационная добавка), которая может быть как со знаком плюс, так и со знаком минус.

В общем случае можно записать

$$u_i = \bar{u}_i + u_i \quad (5.47)$$

где  $\bar{u}_i$  — местная осредненная скорость, относящаяся к основному (первичному) движению; это скорость с которой водоворот (вихрь) увлекается общим течением мимо наблюдаемой точки;  $u_i$  — скорость пульсации (пульсационная добавка или составляющая), относящаяся ко вторичному течению и отражающая колебание (пульсацию) скорости, то есть это схематически выраженная относительная скорость внутри водоворота (вихря) в наблюдаемой точке пространства.

Для примера рассмотрим изменение во времени проекции скорости  $u_x$  на ось  $x$ , которая, следуя общей закономерности (рис. 5.14), также отклоняется от некоторого устойчивого значения  $\bar{u}_x$ , определяемого зависимостью

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t) dt, \quad (5.48)$$

где  $T$  — время осреднения.

Время осреднения  $T$  выбирается так, чтобы от него не зависела величина  $\bar{u}_x$ . По аналогии найдем  $\bar{u}_y$  и  $\bar{u}_z$ , а затем

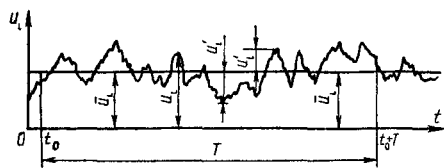


Рис. 5.14

определим и осредненную местную скорость

$$\bar{u} = \sqrt{\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2 + \bar{u}_z^2}. \quad (5.49)$$

Введя понятие местной осредненной скорости, турбулентное движение в области, на границах которой условия не изменяются с течением времени (при осреднении скорости), можно считать установленным.

Отклонение мгновенной местной скорости от осредненной, как отмечено выше, называется пульсационной скоростью:

$$u_x' = u_x - \bar{u}_x. \quad (5.50)$$

Так как пульсация  $u_x'$  не ограничена ни числовым значением, ни знаком, то в соответствии с (5.48) получим

$$\bar{u}_x' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_x'(t) dt = 0. \quad (5.51)$$

Точно также  $\bar{u}_y' = 0$  и  $\bar{u}_z' = 0$ , но в то же время  $(u_x')^2 \neq 0$ ,  $(u_y')^2 \neq 0$  и  $(u_z')^2 \neq 0$ , так как при такой записи суммируются величины только со знаком плюс. В общем случае также не равны нулю выражения  $\overline{u_x' u_y'}$ ,  $\overline{u_x' u_z'}$  и  $\overline{u_y' u_z'}$ , так как величины  $u_x'$ ,  $u_y'$  и  $u_z'$  разные как по величине, так и по знаку.

Величины  $\overline{(u_i')^2}$  и  $\overline{u_i' u_j'}$  позволяют понять характер турбулентности и произвести его анализ. Следует отметить, что при движении жидкости в трубах, прямых линейных руслах основное внимание уделяется изучению продольной составляющей пульсации, так как попереч-



ная  $u'_y$  и вертикальная  $u'_z$  значительно меньше.

Как отмечено выше, в турбулентном потоке имеет место и пульсация гидродинамического давления  $p$ , осредненное значение которого по аналогии с (5.48),

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt. \quad (5.52)$$

Вводя понятия осредненных скоростей  $\bar{u}(x, y, z)$  и давление  $\bar{p}(x, y, z)$ , вместо реального турбулентного потока рассматривают его осредненную модель (модель Рейнольдса — Буссинеска), которая представляет собой фиктивный поток с осредненными значениями характеристик.

Замена действительных беспорядочных движений частиц жидкости фиктивным слоистым требует введения некоторых фиктивных сил взаимодействия между воображаемыми струйками. Благодаря этому появляется новый вид турбулентных напряжений, связанных с самой природой движения, и осредненный поток характеризуется наличием *дополнительных турбулентных касательных напряжений* (выражаемых через  $u_i u_j$ ) и *турбулентных нормальных напряжений* (выражаемых через  $(\bar{u}_i)^2$ ). Часто их называют *касательными и нормальными напряжениями Рейнольдса*.

Осредненная модель турбулентного потока нашла широкое применение в инженерной гидравлике. Для такой модели справедливы все результаты и зависимости, полученные раньше. Это относится к уравнениям Д. Бернулли и неразрывности движения, к распределению касательных напряжений при равномерном движении и т. п.

В частности, расход определяется с учетом закона распределения местной осредненной скорости по живому сечению:

$$Q = \int_{\omega} \bar{u}(\omega) d\omega, \quad (5.53)$$

а соответствующая средняя в сечении скорость

$$V = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \bar{u}(\omega) d\omega. \quad (5.54)$$

**Структура турбулентного потока.** Значительный прогресс в области средств измерения и вычислительной техники позволил получить более полное представление о турбулентной структуре потока. Достаточно простым и эффективным средством изучения турбулентности структуры оказался фотокинеметод, который широко использовал А. Б. Клавен. Методика его исследований состояла в следующем. В водный поток, движущийся в стеклянном лотке, добавлялись частицы с плотностью, близкой к плотности воды. Для выделения в потоке узкой плоскости он в затененных условиях освещался целевым источником света («световым ножом»). При снятии освещенной плоскости кинокамерой, перемещаемой со скоростью, близкой к осредненной в потоке, обнаруживалась сложная вихревая структура. Наиболее крупные вихри имели удлиненную форму и заполняли большую часть глубины потока. Внутри наиболее крупных вихрей располагались меньшие, которые, в свою очередь, делились на совсем малые.

С помощью фотокинеметода была также изучена турбулентная структура потока в придонном слое. Исследованиями И. К. Никитина удалось установить закономерности течения в тонком, порядка нескольких миллиметров, слое, прилегающем ко дну.

Дополнение рассмотренного метода непосредственным измерением скоростей различными приборами (микровертушкой, термоанемометром и т. д.) позволило получить достаточно полное представление о турбулентной структуре потока. При этом значительный прогресс в исследованиях был достигнут благодаря использованию корреляционного

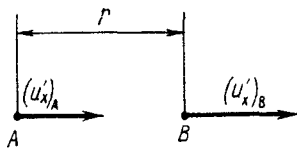


Рис. 5.15

и спектрального анализом. Их применение дало возможность оценивать пространственные и временные характеристики.

Вначале остановимся на пространственной корреляции. Рассмотрим в потоке точки  $A$  и  $B$  с расстоянием  $r$  между ними (рис. 5.15). Осредненное произведение продольных пульсационных скоростей в этих точках  $(u'_x)_A (u'_x)_B$  является двухточечным моментом корреляции. Если турбулентность (вихревые образования) крупномасштабная, то связь  $(u'_x)_A (u'_x)_B$  будет сохраняться на сравнительно большом расстоянии и наоборот — при мелкомасштабной турбулентности на малом расстоянии.

Для анализа турбулентного движения удобно пользоваться коэффициентом пространственной корреляции  $R(r)$ , понимая под ним выражение

$$R(r) = \frac{(u'_x)_A (u'_x)_B}{(u'_x)_A^2} \quad (5.55)$$

Расстояние  $r$  от точки  $A$  к точке  $B$  (по направлению движения) будет со знаком плюс  $(+r)$ , а от точки  $B$  к точке  $A$  со знаком минус  $(-r)$ .

Можно отметить такие три свойства коэффициента пространственной корреляции:

1) если  $r = 0$ , то  $R(0) = 1$ , так как в этом случае  $(u'_x)_A = (u'_x)_B$ , а значение  $R(0) = 1$  — максимальная величина;

2) если  $r = \infty$ , то  $R(\infty) = 0$  — минимальная величина;

3)  $R(r) = R(-r)$ .

Общий вид корреляционных кривых между двумя точками представлен на

рис. 5.16, при этом кривая 1 относится к более крупномасштабным вихрям, а кривая 2 — к более мелкомасштабным.

Для анализа вводится интегральный пространственный масштаб корреляции

$$L = \int_0^{\infty} R(r) dr, \quad (5.56)$$

при определении которого исходят из равенства площадей прямоугольника  $LR(r)$  при  $R(r) = 1$  и криволинейной фигуры  $\int R(r) dr$ .

Интегральный пространственный масштаб корреляции отражает размер вихрей и поэтому  $L_1 > L_2$  (рис. 5.16)

При развитой турбулентности в потоке существуют вихри разных размеров, каждый из которых обладает разной энергией; в совокупности они представляют энергетический спектр турбулентности.

Физический смысл спектра можно понять, если представить турбулентность как скопление вихрей разных размеров, проносимых относительно фиксированной точки пространства осредненным потоком (первичным движением). При этом пульсации скорости, соответствующие вихрям меньшего масштаба, будут происходить гораздо быстрее, чем пульсации, вызванные вихрями больших размеров.

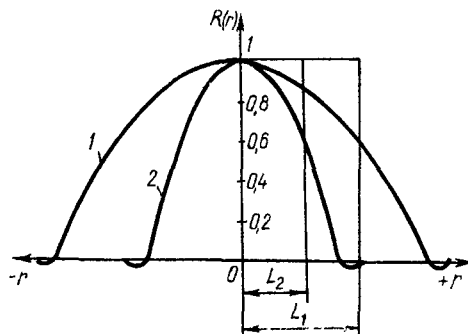


Рис. 5.16

Таким образом, установлено, что в потоке жидкости существуют вихри различных размеров, которые условно можно разделить на три группы: крупномасштабные (макротурбулентные); среднемасштабные (мезотурбулентные), мелкомасштабные (микротурбулентные)

Диапазон изменения макротурбулентных вихрей в открытых руслах  $10h < L < 10B$ , где  $h$  — глубина, а  $B$  — ширина потока. Считается, что в указанном диапазоне турбулентные образования обусловлены геометрией русла. Диапазон изменения мезотурбулентных вихрей  $h < L < 10h$ .

Пульсацию скорости в любой точке потока можно рассматривать как результат взаимодействия макро-, мезо- и микротурбулентности.

Наряду с пространственной корреляцией для анализа природы турбулентности и ее энергетического спектра рассматривают также *временную корреляцию*. При этом вводят понятие *временной корреляционной функции*, которая показывает насколько скоро по мере увеличения интервала времени убывает статистическая связь между значениями пульсационной скорости. По аналогии с предыдущим вводится *коэффициент временной корреляции*  $R(\tau)$ :

$$R(\tau) = \frac{\overline{u'_x(\tau) u'_x(t + \tau)}}{[\overline{u'_x(\tau)}]^2}.$$

Эти понятия характеризуют изменчивость пульсационной скорости во времени. С их помощью можно оценивать, например, продолжительность времени, в течение которого пульсационная скорость сохраняет свой знак.

По аналогии с интегральным пространственным масштабом корреляции  $L$  (см. 5.56) вводится *интегральный временной масштаб турбулентности*  $T$ , который отражает время (период) существования вихря определенной направленности (определенного знака).

Таким образом, при турбулентном режиме на первоначальное основное движение жидкости (однородное и упорядоченное) накладывается вторичное (неоднородное и беспорядочное). Вторичное течение характеризуется тем, что скорость изменяется во всех точках пространства по величине и направлению во времени. Его можно представить в виде бесчисленного количества вихрей различных форм, размеров и скорости вращения, переносимых первичным потоком

Зарождаясь в пристеночной области, пульсация затем распространяется до большей части глубины потока, который заполняется вихрями с поперечными размерами от сотых долей глубины потока до полной (в трубах и открытых руслах малых размеров).

**Каскадная теория передачи энергии турбулентного потока академика А. Н. Колмогорова.** Так как спектральное распределение и корреляция непосредственно связаны с пульсацией, то они являются весьма ценным источником информации о механизме образования и рассеяния турбулентной энергии.

Среди ряда теорий, объясняющих механизм турбулентности, наиболее физически наглядна и обоснованна каскадная теория турбулентности А. Н. Колмогорова. Она исходит из условия, что турбулентность во временном и пространственном объеме общего потока будет всегда существенно изотропна, если объем достаточно мал, а число Рейнольдса достаточно велико

Понятие об *изотропной*, или *однородной*, турбулентности было введено Гэйлором, как о частом и наиболее простом ее случае. Под изотропной турбулентностью понимают такую, которая не зависит от ориентации координатных осей и расположения их начала. При таком условии любые характеристики турбулентности не зависят от положения рассматриваемой точки и направления

скорости, а следовательно,

$$\overline{(u_x')^2} = \overline{(u_y')^2} = \overline{(u_z')^2} \quad \text{и} \quad \overline{u_x' u_y'} = \overline{u_x' u_z'} = \overline{u_y' u_z'}$$

Обычно рассматривают турбулентность как изотропную, а затем вносят те или иные поправки. Основой теории А. Н. Колмогорова является то, что граничные условия потока не влияют непосредственно ни на какие детали поля скоростей, за исключением тех, которые характеризуются теми же длинами, что и размеры границ, то есть турбулентность возникает за счет энергии осредненного потока.

Крупномасштабные вихри турбулентности образуются самим осредненным потоком по преодолению вязких и рейнольдсовых напряжений. Под *рейнольдсовыми напряжениями* понимают величины  $(u_i')^2$  и  $u_i' u_j'$ , то есть дополнительные напряжения от турбулентной пульсации. Таким образом, энергия затрачивается не только на преодоление вязких напряжений, но и тех дополнительных, которые характерны для турбулентного потока и связаны с преодолением сопротивлений пульсации скорости. Схематически каскадная теория передачи энергии турбулентного потока по А. Н. Колмогорову представлена на рис. 5.17. Энергия осредненного (однородного) движения 1 передается пульсационному через крупномасштабные вихри первого порядка 2. Незначительные различия в энергии макровихрей свидетельствуют о возможности обмена ею между ними.

В свою очередь, крупномасштабные вихри первого порядка 2 по инерции, вследствие их неустойчивости, распадаются на вихри второго порядка 3, передавая им энергию, которая также вызывает пульсации более мелкого масштаба. Вихри второго порядка распадаются на среднемасштабные (или вихри третьего порядка) 4 и т. д.

Каскад пульсаций (появление все более и более мелких вихрей) происходит

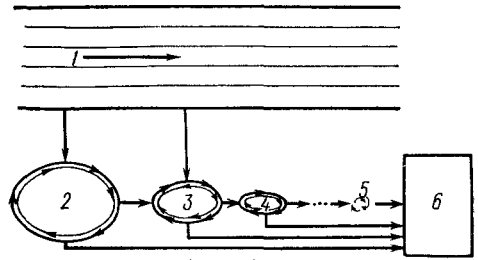


Рис. 5.17

до тех пор, пока размер микромасштабных (мельчайших) вихрей  $n$ -го порядка 5 становится настолько малым, что они не могут противостоять вязкости и вязкие напряжения становятся преобладающими, а механическая энергия потока начинает переходить в тепловую энергию 6. Это явление перехода энергии движения в тепло называют *диссипацией энергии*.

Следует отметить, что даже при самых крупномасштабных вихрях имеются потери и часть энергии диссипирует. С уменьшением масштаба вихрей диссипация энергии увеличивается, особенно при приближении от центра ядра турбулентности к пристеночному слою. Именно в пристеночном слое наблюдается зона максимальной диссипации энергии.

Следовательно, масштаб диссипации зависит от числа Рейнольдса осредненного потока и тем больше диссипация, чем больше Re, ибо при этом, как показывают эксперименты, изменения в турбулентности сводятся к образованию все меньших вихрей.

Исходя из таких предпосылок можно сделать вывод, что приток кинетической энергии (рис. 5.17) осредненного движения передается пульсации, а затем диссипирует, то есть эта энергия не может быть восстановлена. Следовательно, энергия, переданная первичным движением вторичному, не может быть восстановлена.

Работа, совершаемая внутри жидкости, состоит из двух частей: одна

затрачивается на изменение энергии жидкости, а другая требуется для выполнения линейных и угловых деформаций элементов жидкости (то есть для изменения объема и формы частицы жидкости). Так как непрерывная деформация движущейся жидкости встречает сопротивление сил вязкости, которые изменяются в прямой зависимости от скорости деформации, то турбулентное движение возможно только в том случае, когда оно характеризуется непрерывным процессом преобразования механической энергии в тепловую.

Следует подчеркнуть, что энергия потока превращается в тепло только вследствие линейной и угловой деформаций, так как из-за сплошности (неразрывности) жидкой среды, потеря энергии вследствие так называемого удара невозможна.

Если учитывать, что действие вязкости единственная причина преобразования энергии потока в тепло, то можно объяснить и увеличение количества рассеянной энергии при возрастании турбулентности. Это объясняется тем, что каждый из бесчисленных водоворотов (вихрей) в каждый момент времени сам становится источником дополнительного вязкого напряжения. Это явление носит название *вихревой вязкости*.

Наличие вихрей разных размеров приводит к тому, что в результате вторичного течения движение одних частиц будет ускоряться, а движение других замедляться. В связи с этим появляются дополнительные, так называемые *турбулентные касательные напряжения*, обусловленные самой природой движения. Ж. Буссинеск ввел специальное понятие коэффициента «молярной» (вихревой) вязкости, с помощью которого можно выразить это добавочное напряжение от пульсации в функции от среднего градиента скорости.

С учетом этого можно записать, что в общем случае для турбулентного ре-

жима движения

$$\tau_{xz} = \bar{\tau}_{xz} + \tau'_{xz} \quad (5.57)$$

и соответственно

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \eta_T \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (5.58)$$

где

$$\bar{\tau}_{xz} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad \text{и} \quad \tau'_{xz} = \eta_T \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Величина  $\eta_T$  называется *динамической турбулентной вязкостью*, а ее размерность такая же, как у динамической (молекулярной) вязкости  $\mu$ , которая, как известно зависит от рода (свойств) жидкости. Значение  $\eta_T$  выражает вихревую (молярную) вязкость и зависит от характера движения. Динамическая турбулентной вязкости также соответствует кинематическая турбулентная вязкость  $\nu_T = \frac{\eta_T}{\rho}$ , с учетом которой

$$\tau'_{xz} = \nu_T \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (5.59)$$

В 1897 г. Ж. Буссинеск, используя аналогию между турбулентным движением жидкости и тепловым движением молекул газа, принял, что турбулентные касательные напряжения

$$\tau'_{xz} = -\rho \overline{u_x u_z}. \quad (5.60)$$

Тогда

$$\frac{\tau'_{xz}}{\rho} = -\overline{u_x u_z} = \nu_T \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

и, следовательно,

$$\nu_T = -\frac{\overline{u_x u_z}}{\frac{\partial u_x}{\partial z}}, \quad (5.61)$$

то есть кинематическая турбулентная вязкость определяется пульсационными характеристиками, которые выражают природу турбулентного режима движения.

При любом числе Re меньше критического динамическая турбулентная вяз-

кость равна нулю и тогда для ламинарного режима движения

$$\tau_{xz} = \overline{\tau_{xz}} = \mu \frac{du_x}{dz}, \quad (5.62)$$

то есть потери на трение пропорциональны скорости в первой степени.

Как отмечалось выше, в вязком подслое турбулентного потока течение обуславливается вязким трением и поэтому для него справедлива зависимость (5.62).

Для числа  $Re$  более критического вихревая вязкость значительно возрастает, а при весьма больших значениях  $Re$  (вполне развитое турбулентное движение) она возрастает настолько, что полностью уменьшает значение молекулярной вязкости. Другими словами для турбулентного ядра напряжения, вызываемые молекулярной вязкостью и зависящие от градиента осредненной скорости, ничтожны по сравнению с добавочными турбулентными (вихревыми) напряжениями.

В связи с этим для полностью развитой турбулентности первым слагаемым в зависимостях (5.57) и (5.58) можно пренебречь и тогда

$$\tau_{xz} = \tau'_{xz} = \eta_T \frac{du_x}{dz}. \quad (5.63)$$

Если принять связь между турбулентными характеристиками и скоростью осредненного потока по Л. Прандтлю, то динамическая турбулентная вязкость может быть представлена в виде

$$\eta_T = \rho l^2 \frac{du_x}{dz}. \quad (5.64)$$

Величина  $l$  называется *длиной пути смещения*, или *перемешивания*, под которой понимается проекция на ось  $z$  пути, достаточного, чтобы частицы, попадающие из одного слоя в другой полностью приобретали его кинематические характеристики.

Длина пути смещения

$$l = \kappa z, \quad (5.65)$$

где  $\kappa$  — универсальная постоянная Кармана, равная 0,4 для круглой трубы;  $z$  — расстояние от границы (в площади живого сечения) до той точки, где измеряется касательное напряжение.

С учетом значения  $\eta_T$ , по Л. Прандтлю, зависимость (5.63) можно представить в виде

$$\tau_{xz} = \tau'_{xz} = \rho l^2 \left( \frac{du_x}{dz} \right)^2. \quad (5.66)$$

Таким образом, *потери на трение при турбулентном режиме движения пропорциональны скорости во второй степени*.

Для переходной области влияние обоих видов вязкости соизмеримо и поэтому

$$\tau_{xz} = \mu \frac{du_x}{dz} + \rho l^2 \left( \frac{du_x}{dz} \right)^2. \quad (5.67)$$

**Распределение местных осредненных скоростей.** Это распределение можно получить из (5.66) с учетом зависимости (5.65):

$$\tau = \rho \kappa^2 z^2 \left( \frac{du_x}{dz} \right)^2, \quad (5.68)$$

где  $z$  — расстояние точки от стенки трубы.

Принимая осредненное (первичное) движение установившимся и плавно-изменяющимся, запишем

$$\tau = \rho \kappa^2 z^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2,$$

или

$$\frac{\tau}{\rho} = \kappa^2 z^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2.$$

Выражение  $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = u_*$  имеет размерность скорости, которую называют *динамической*.

Тогда

$$u_*^2 = \kappa^2 z^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2,$$

или

$$u_* = \kappa z \frac{du}{dz}.$$

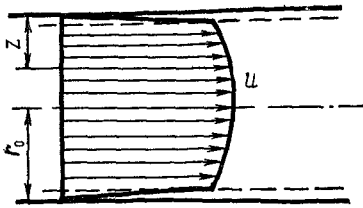


Рис 5 18

Разделяя переменные, получим

$$du = \frac{u_*}{\kappa} \frac{dz}{z}.$$

Интегрируя, с учетом, что  $u_*$  и  $\kappa$  постоянные величины, получим

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln z + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определяем из начальных условий. Для трубы максимальная осредненная скорость  $u_{\max}$  находится в ее центре, то есть при  $z = r_0$ .

Тогда

$$C = u_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln r_0,$$

или

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln z + u_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln r_0$$

и окончательно

$$u = u_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{r_0}{z}. \quad (5.69)$$

Таким образом, в ядре развитого турбулентного потока *местные осредненные скорости изменяются по логарифмическому закону*, что подтверждается экспериментально.

Эпюра осредненных скоростей, представленная на рис. 5.18, характеризуется следующими закономерностями:

скорости на поверхности стенки трубы равны нулю вследствие прилипания частиц жидкости;

на весьма малом расстоянии от стенок (в пристеночном слое) скорости до-

стигают значительной величины, мало отличающейся от значений скорости в других точках живого сечения потока, поэтому наибольшие градиенты скорости наблюдаются у стенок,

в точках живого сечения, более отдаленных от поверхности стенок, скорости изменяются относительно мало, а поэтому мал и градиент скорости, более равномерное движение можно объяснить турбулентным перемешиванием (переносом) частиц жидкости.

В связи с вышеизложенным коэффициент кинетической энергии при турбулентном режиме движения принимается  $\alpha = 1,1$ . Иногда его приближенно принимают  $\alpha \approx 1$  в отличие от ламинарного режима, где  $\alpha = 2$  (см § 5.5, зависимость (5.41)).

### § 5.7. Определение потерь напора по длине при турбулентном режиме движения

**Влияние твердых границ.** Л Прандтль считал, что безотрывное обтекание потоком твердой стенки позволяет считать весь поток невязким, за исключением тонкого слоя непосредственно у самой стенки. В этом слое силы молекулярной вязкости имеют по меньшей мере тот же порядок, что и силы инерции и именно в этом слое сконцентрировано тормозящее действие стенки. Как показывают исследования, *вблизи стенки имеет место 80—90 % общего количества потерь энергии от молекулярной вязкости*. Это обусловлено тем, что на сравнительно малом расстоянии скорость изменяется от нуля у стенок до конечных значений, близких к средней скорости. В связи с этим получаются относительно большие градиенты скорости  $\frac{du_x}{dz}$ , что обуславливает большие касательные напряжения  $\bar{\tau}_{xz}$ . По мере удаления от стенки  $\frac{du_x}{dz}$  и соответственно  $\bar{\tau}_{xz}$  умень-

шаются и на некотором расстоянии от нее оказываются пренебрежимо малыми.

Слой жидкости в пределах которого величины  $\frac{du_x}{dz}$  и  $\bar{\tau}_{xz}$  являются еще практическими ощутимыми называют, как отмечено выше, *пристеночным*. За его пределами, в соответствии с гипотезой Прандтля, вязкость жидкости можно вовсе не учитывать, то есть считать ее идеальной.

Кроме того, большие значения градиента скорости у стенки указывают на существование слоя интенсивной завихренности, распространяющейся в толще потока.

Анализ движения потока в пристеночном слое указывает на то, что потери энергии зависят от состояния стенки — степени ее шероховатости. В зависимости от соотношения между толщиной вязкого подслоя  $\delta_{в.п}$  и средней высотой выступов шероховатости  $\Delta$  различают гидравлически гладкие и гидравлически шероховатые поверхности. Если толщина вязкого подслоя  $\delta_{в.п}$  больше абсолютной высоты выступов шероховатости  $\Delta$ , то такие поверхности (рис. 5.19, а) называются *гидравлически гладкими*. В этом случае выступы шероховатости покрываются вязким подслоем и потери энергии по длине практически не зависят от шероховатости стенок.

Если толщина  $\delta_{в.п}$  меньше высоты  $\Delta$ , то поверхности называют *гидравлически шероховатыми* (рис. 5.19, б). При таких поверхностях обтекание выступов шероховатости происходит с отрывом от них.

Если  $\delta_{в.п}$  соизмеримо с  $\Delta$  (рис. 5.19, в), то такие поверхности называют *переходными*.

Толщину вязкого подслоя  $\delta_{в.п}$  можно определить из условия, что турбулентные касательные напряжения в нем пренебрежимо малы по сравнению с вязкими напряжениями. В этом случае

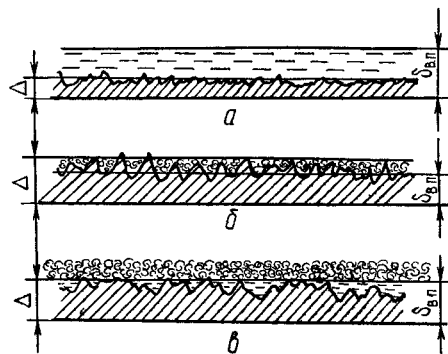


Рис. 5.19

$\tau = \mu \frac{du}{dz}$ . Если принять  $dz = \delta_{в.п}$ , то  $du$  будет равно предельной скорости на границе вязкого подслоя  $u_{гр}$ , так как скорость на стенке равна нулю. Следовательно,

$$\tau = \mu \frac{u_{гр}}{\delta_{в.п}}, \quad (5.70)$$

или

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{гр}}{\delta_{в.п}}. \quad (5.71)$$

Используя понятие динамической скорости  $u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$  и вводя кинематическую вязкость  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  в (5.71), получим  $u_*^2 = \nu \frac{u_{гр}}{\delta_{в.п}}$ , откуда *толщина вязкого подслоя*

$$\delta_{в.п} = \frac{\nu}{u_*} \frac{u_{гр}}{u_*}.$$

Отношение  $\frac{u_{гр}}{u_*} = N$  является постоянным и называется *числом Никурадзе* (обычно  $N = 10,5 \dots 11$ ).

Учитывая число Никурадзе, можно записать

$$\delta_{в.п} = \frac{N\nu}{u_*}. \quad (5.72)$$

Толщина вязкого подслоя  $\delta_{в.п}$  постоянна и зависит от числа Рейнольдса



Re. Разделим левую и правую части зависимости (5.72) на линейный размер, например на диаметр  $d$ , и получим

$$\frac{\delta_{вп}}{d} = \frac{Nv}{u_* d}, \quad (5.73)$$

но  $Re_* = \frac{u_* d}{\nu}$  и тогда окончательно

$$\frac{\delta_{вп}}{d} = \frac{N}{Re_*}. \quad (5.74)$$

Величина  $Re_*$  характеризуется динамической скоростью  $u_*$ . При возрастании средней скорости турбулентного потока увеличиваются касательные напряжения  $\tau$  и поэтому возрастают значения динамической скорости  $u_*$  и соответственно величина  $Re_*$ .

Таким образом, толщина вязкого подслоя  $\delta_{вп}$  уменьшается с возрастанием числа Рейнольдса. Следовательно, с увеличением скорости турбулентного потока толщина  $\delta_{вп}$  может уменьшиться настолько, что выступы шероховатости «прорежут» этот вязкий подслей. Тогда движение потока будет происходить уже в переходной зоне, в которой сопротивления движению жидкости еще зависят от числа  $Re_*$ , но уже начинает сказываться и влияние высоты выступов шероховатости  $\Delta$ .

При дальнейшем увеличении  $Re_*$  толщина  $\delta_{вп}$  еще больше уменьшается (теоретически даже может исчезнуть) и вязкий подслей не оказывает влияние на сопротивления, так как движение жидкости происходит по шероховатой поверхности. В этом случае потери на трение зависят от шероховатости стенок  $\Delta$  и не зависят от числа  $Re_*$ , то есть наступает состояние полностью развитой турбулентности.

Отсюда ясно, что понятия гладкой и шероховатой поверхности относительные, так как одна и та же поверхность при малых числах  $Re_*$  будет гидравлически гладкой, а при больших — уже гидравлически шероховатой.

**Потери напора по длине.** Знание закона распределения местных осредненных скоростей в плоскости живого сечения позволяет перейти к определению потерь на трение  $\tau_{xz}$ , которые, как показано выше, пропорциональны квадрату скорости при турбулентном режиме движения. При этом отношение  $\tau/\gamma$  удобно представить в долях скоростного напора  $V^2/2g$ :

$$\frac{\tau}{\gamma} = k_r \frac{V^2}{2g}, \quad (5.75)$$

где  $k_r'$  — коэффициент пропорциональности.

Учитывая, что в соответствии с зависимостью (5.16)  $\tau/\gamma = Ri_f$ , можно записать

$$Ri_f = k_r' \frac{V^2}{2g},$$

или

$$i_f = \frac{k_r' V^2}{R 2g}. \quad (5.76)$$

Так как  $i_f = \frac{h_l}{l}$ , а  $R = \frac{d}{4}$ , то

$$h_l = 4k_r' \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (5.77)$$

Заменяя значение  $4k_r'$  через гидравлический коэффициент трения  $\lambda$ , окончательно получим

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (5.78)$$

Таким образом, снова получена формула, по структуре одинаковая с (5.39) для ламинарного режима движения. К сожалению, для определения коэффициента  $\lambda$  при турбулентном режиме движения нет теоретических решений и поэтому он находится по эмпирическим формулам в зависимости от структуры турбулентного потока.

Экспериментальными исследованиями И. Никурадзе в Германии (1920-е годы) показано, что  $\lambda = f(Re_d, \Delta_r)$ , где относительная шероховатость  $\Delta_r = \Delta/d$ .

Результаты эксперимента представлены в виде графика Никурадзе (рис. 5.20).

Он имеет следующие особенности. По горизонтальной оси отложены  $Re_d$  в логарифмическом масштабе, чтобы охватить возможно больший диапазон значений  $Re_d$  и в то же время достаточно детально представить области малых значений  $Re_d < 10^4$ , относящихся к ламинарному режиму движения. На графике приведены кривые зависимости  $\lambda = f(Re_d, \Delta_{ri})$  для каждого фиксированного значения относительной шероховатости  $\Delta_{ri}$ .

Зоны ламинарного (I), переходного (II) и турбулентного (III) режимов движения определяют вертикальные линии  $Re_{н.к}$  и  $Re_{в.к}$  (см. § 5.2). При ламинарном режиме движения  $\lambda$  не зависит от шероховатости и определяется как  $\lambda = 64/Re$ , что совпадает с теоретическим выводом (см. § 5.5). На переходную зону (II) неустойчивого режима движения распространяют зависимости для  $\lambda$ , экстраполируя их из зоны турбулентного режима движения (см. верхнюю штриховую линию).

При турбулентном режиме движения (III) в его зоне различают три области (1, 2, 3).

В области 1 коэффициент  $\lambda$  не зависит от относительной шероховатости и все линии, отвечающие различным значениям  $\Delta_{ri}$ , сливаются в одну. Это область гидравлически гладких поверхностей и для них коэффициент  $\lambda$  определяется по зависимости Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} = (100 Re)^{-0,25} \quad (5.79)$$

С учетом, что  $Re = \frac{Vd}{\nu}$ , а также зависимости (5.78) негрудно убедиться, что потери по длине в этой области пропорциональны скорости в степени 1,75

$$h_l = k_{гл} V^{1,75}, \quad (5.80)$$

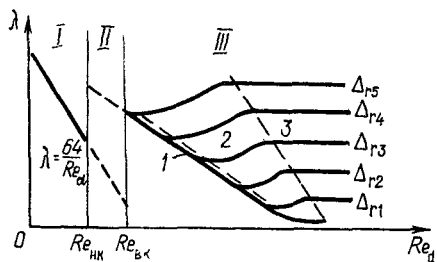


Рис 5.20

где  $k_{гл}$  — коэффициент пропорциональности.

В области 3 коэффициент  $\lambda$  не зависит от числа  $Re$ , а зависит только от относительной шероховатости  $\Delta_{ri}$ . Здесь линии  $\lambda = f(Re, \Delta_{ri})$  параллельны оси  $Re$ . Это область гидравлически шероховатых поверхностей и для них коэффициент  $\lambda$  определяется в зависимости от рода и состояния поверхности, например, по формуле Л. Прандтля:

$$\lambda = \frac{1}{4 \left( \lg \frac{3,7d}{\Delta_{экв}} \right)^2}, \quad (5.81)$$

где  $\Delta_{экв}$  — эквивалентная шероховатость, то есть такая равномерная шероховатость, которая дает при подсчете одинаковую с заданной шероховатостью величину  $\lambda$ . Значения  $\Delta_{экв}$  приводятся в справочной литературе [26].

Учитывая, что в этом случае  $\lambda = f(\Delta_{ri})$ , можно установить, что потери напора, согласно зависимости (5.78), пропорциональны квадрату скорости:

$$h_l = k_{ш} V^2, \quad (5.82)$$

где  $k_{ш}$  — коэффициент пропорциональности.

В связи с этим область 3 называют областью квадратичного, или квадратического, сопротивления гидравлически шероховатых поверхностей.

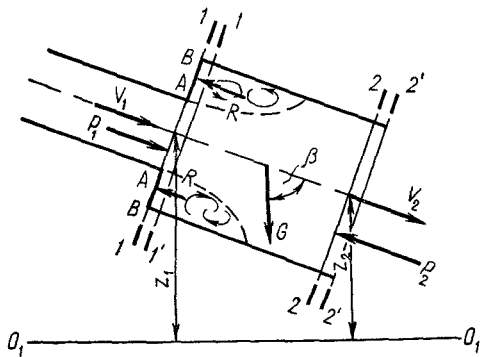


Рис. 5.21

В области 2 коэффициент  $\lambda$  зависит от  $Re$  и от  $\Delta_r$  и определяется по эмпирическим зависимостям, например, по формуле А. Д. Альтшуля,

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_{экв}}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} \quad (5.83)$$

В этой переходной области зависимость потерь напора от скорости в соответствии с (5.78) может быть представлена в виде

$$h_l = k_n V^{1,75..2} \quad (5.84)$$

В связи с этим переходную область 2 называют областью докватричного сопротивления гидравлически шероховатых поверхностей.

В соответствии с рекомендациями А. Д. Альтшуля, можно принять такие критерии для этих трех областей:

если  $Re \frac{\Delta_{экв}}{d} < 10$ , то это область гидравлически гладких труб;

если  $Re \frac{\Delta_{экв}}{d} > 500$ , то это область квадратичного сопротивления гидравлически шероховатых труб;

если  $10 < Re \frac{\Delta_{экв}}{d} < 500$ , то это переходная область, или область докватричного сопротивления гидравлически шероховатых труб.

## § 5.8. Определение местных потерь напора при движении жидкости

Рассмотренные выше зависимости для определения потерь напора при равномерном движении считают справедливыми и для плавноизменяющегося неравномерного установившегося движения.

Если же на каких-то участках потока движение становится резкоизменяющимся (резко изменяется конфигурация живого сечения, направление течения и скорость, поперечная циркуляция, соединение и разделение потоков), то появляются *местные потери* напора, которые сосредоточены на сравнительно небольшой длине.

**Внезапное расширение.** В этом случае поток из трубы меньшего диаметра  $d_1$ , попадает в трубу большего диаметра  $d_2$  (рис. 5.21). Применим теорему об изменении количества движения. В соответствии с § 4.13, приращение количества движения  $\Delta KD$  равно импульсу действующих сил за тот же промежуток времени:

$$\Delta KD = \Sigma F dt \quad (5.85)$$

В данном случае  $\Delta KD = M (\alpha_{02} V_2 - \alpha_{01} V_1)$ , где  $V_2$  — средняя скорость в сечении 2—2 диаметром  $d_2$  и площадью живого сечения  $\omega_2$ , а  $V_1$  — в сечении 1—1 диаметром  $d_1$  и площадью  $\omega_1$ . Масса жидкости при установившемся движении

$$M = \rho Q dt = \frac{\gamma}{g} Q dt.$$

Принимаем  $\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_0 \approx 1$ , и тогда

$$\Delta KD = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1) dt \quad (5.86)$$

Проекция импульса действующих сил на ось движения (см. 5.21)

$$\Sigma F dt = (P_1 - P_2 + G \cos \beta) dt. \quad (5.87)$$

За время  $dt$  сечение 1—1 переместится в сечение 1'—1' уже с площадью  $\omega_2$  и тогда сила гидродинамического давле-

ния слева

$$P_1 = p_1 \omega_2,$$

где  $p_1$  — гидродинамическое давление в сечении 1—1.

Справедливость такого допущения можно подтвердить путем учета реакции  $R$  стенок ВААВ на жидкость. В сечении В—А—А—В поток еще не успел расшириться, поэтому можно принять давление в этом кольцевом (для круглой трубы) сечении постоянным и равным  $p_1$ . При этом реакция стенок

$$R = p_1(\omega_2 - \omega_1).$$

Но в этом случае  $P'_1 = p_1 \omega_1$ , и тогда их сумма

$$P'_1 + R = p_1 \omega_1 + p_1(\omega_2 - \omega_1) = p_1 \omega_2.$$

Сила гидродинамического давления справа  $p_2$  при перемещении сечения 2—2 в сечение 2'—2'

$$P_2 = p_2 \omega_2.$$

Сила тяжести

$$G = \gamma \omega_2 l,$$

где  $l$  — расстояние между сечениями 1'—1' и 2'—2', а

$$\cos \beta = \frac{z_1 - z_2}{l},$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — координаты или отметки центров тяжести сечений.

Подставляя приведенные выше значения в уравнения (5.86); (5.87) и (5.85), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{g} Q(V_2 - V_1) dt = \\ & = \left( p_1 \omega_2 - p_2 \omega_2 + \gamma \omega_2 l \frac{z_1 - z_2}{l} \right) dt. \end{aligned}$$

Сокращая это выражение на произведение  $\gamma \omega_2 dt$ , получим

$$\frac{V_2}{g}(V_2 - V_1) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2); \quad (5.88)$$

при этом  $V_2 = \frac{Q}{\omega_2}$ .

Запишем уравнение Д. Бернулли для сечений 1—1 и 2—2

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 &= \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \\ &+ \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{в.р}, \end{aligned}$$

где  $h_{в.р}$  — потеря напора при внезапном расширении.

Принимая как допущение, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , получим

$$h_{в.р} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}. \quad (5.89)$$

Используя зависимость (5.88), можно записать

$$\begin{aligned} h_{в.р} &= \frac{V_2}{g}(V_2 - V_1) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = \\ &= \frac{2V_2^2 - 2V_2 V_1 + V_1^2 - V_2^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Учитывая уравнение неразрывности  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ , представим зависимость (5.90) в виде

$$h_{в.р} = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = \left( \frac{d_2^2}{d_1^2} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g}.$$

Величину

$$\zeta_{в.р} = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 = \left( \frac{d_2^2}{d_1^2} - 1 \right)^2. \quad (5.91)$$

называют коэффициентом местного сопротивления при внезапном расширении. Потери в этом случае

$$h_{в.р} = \zeta_{в.р} \frac{V_2^2}{2g}. \quad (5.92)$$

По аналогии с предыдущим, для скорости  $V_1$  перед сопротивлением

$$h_{в.р} = \zeta_{в.р} \frac{V_1^2}{2g},$$

где

$$\zeta_{в.р} = \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 = \left( 1 - \frac{d_1^2}{d_2^2} \right)^2.$$

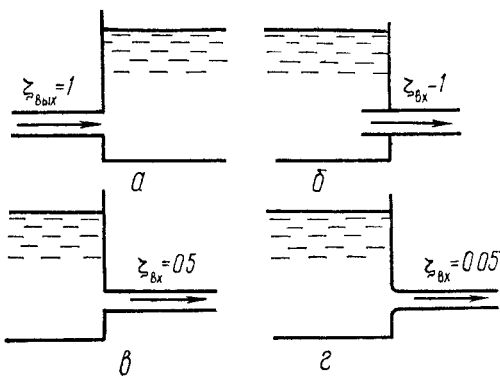


Рис 5 22

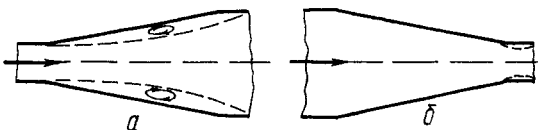


Рис. 5 23

Приведенный выше вывод называют *теоремой Борда*.

Используя структуру зависимости (5.92) можно записать для любого вида местных потерь так называемую *формулу Вейсбаха*:

$$h_m = \zeta \frac{V^2}{2g}, \quad (5.93)$$

где  $V$  — средняя скорость потока в сечении за местным сопротивлением (иногда перед сопротивлением при наличии специальной оговорки — см. выше).

*Коэффициент местного сопротивления*  $\zeta$  зависит от вида местного сопротивления и в некоторых случаях от числа Рейнольдса. В общем случае местных потерь напора, как показали эксперименты, их зависимость от числа Рейнольдса имеет место лишь при очень малых значениях  $Re$ , которые обычно не представляют интереса при решении большинства инженерно-строительных задач.

Ниже рассмотрены наиболее характерные виды местных сопротивлений.

*Выход из трубы в резервуар под уро-*

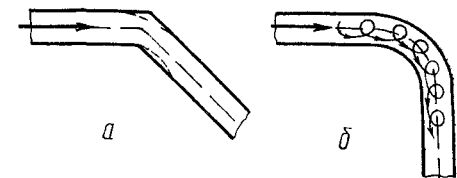


Рис 5 24

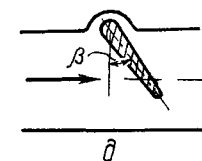
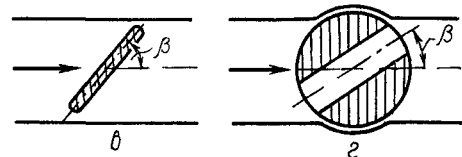
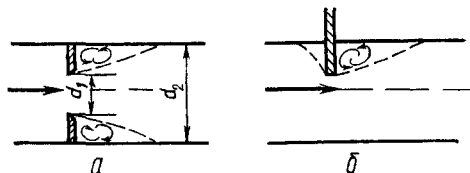


Рис. 5.25

*вень* (рис. 5.22, а) Считая размеры резервуара несравнимо большими, чем сечение трубы, можно принять в формуле (5.90) скорость  $V_2 = 0$  и тогда  $\zeta_{вх} = 1$ .

*Вход в трубу из резервуара.* В этом случае коэффициент местных потерь  $\zeta_{вх}$  зависит от условий входа. Так, например, для осредненных условий: при трубе, выступающей внутрь резервуара  $\zeta_{вх} = 1$  (рис. 5.22, б), при острых краях входа  $\zeta_{вх} = 0,5$  (рис. 5.22, в), а при закругленных краях входа  $\zeta_{вх} = 0,05$  (рис. 5.22, г).

*Участки постепенного расширения трубопровода* (диффузоры, рис. 5.23, а), а также *постепенного сужения* (конфузоры) (рис. 5.23, б). Здесь происходит переформирование структуры потока, и в этом случае кроме сопротивления при

постепенном расширении и сопротивлении входа учитывается коэффициент сопротивления трения  $\zeta_{тр}$  [17].

Отдельно рассматриваются потери, связанные с изменением направления скорости потока при *резком* (рис. 5.24, а) или *плавном повороте трубопровода* (рис. 5.24, б). При этом с увеличением радиуса поворота потери напора уменьшаются.

Кроме того, следует отметить, местные потери на диафрагмах (рис. 5.25, а), задвижках (рис. 5.25, б), дроссельных затворах (рис. 5.25, в), пробковых кранах (рис. 5.25, г), шарнирных клапанах (рис. 5.25, д), вентилях, всасывающих клапанах с сеткой и обратных клапанах, сетчатых фильтрах, потери при разделении и соединении потоков и др.

Основные коэффициенты местных сопротивлений приведены в табл. 5.1 по данным Ю. М. Константинова. Более подробные данные о местных сопротивлениях приводятся в справочной литературе [26].

При турбулентном режиме на входном участке трубопровода происходят дополнительные потери напора, зависящие от формирования эпюры скоростей. Этот участок называется *начальным* (как и при ламинарном режиме — см. § 5.5). Однако из-за более полного профиля скоростей дополнительные потери напора при турбулентном режиме значительно меньше, чем при ламинарном.

*Турбулентный начальный участок* всегда короче ламинарного, а его длина практически не зависит от числа Re. Уже на расстоянии 10 диаметров от входа профиль скоростей близок к расчетному. В связи с этим, длина начального участка не превышает (40—50) d.

Приведенные данные относятся к развиту турбулентному режиму движения с большими числами Рейнольдса, при которых, как отмечено выше, влияние вязкости на коэффициенты местных сопротивлений незначительно. При ма-

Таблица 5.1

Виды сопротивлений	$\zeta_{в.м}$	B
Внезапное расширение	Формула (5.91)	30
Пробочный кран	0,4—1,5	150
Вентиль	2,5—6	900—3000
Задвижка, полностью открытая	0,15	75
Вход во всасывающую трубу с сеткой	6	—
То же, с обратным клапаном	10	—
Диафрагма (рис. 5.25, а) при $d_2/d_1 = 0,8$	1	70
То же, при $d_2/d_1 = 0,63$	7	120
То же, при $d_2/d_1 = 0,4$	70	500
Резкий поворот трубы на угол 30°	0,155	—
То же, на угол 45°	0,318	—
То же, на угол 60°	0,555	—
То же, на угол 90°	1,19	400
Плавный поворот трубы на угол $\beta^\circ$ при радиусе поворота $R_p = 1,5$	0,45 $\beta^\circ/90^\circ$	180
То же, при $R_p = 2,5$	0,42 $\beta^\circ/90^\circ$	180

лых числах Re их влияние учитывается по формуле А. Д. Альтшуля

$$\zeta = B/Re + \zeta_{в.м}, \quad (5.94)$$

где  $\zeta_{в.м}$  — вид местного сопротивления, а B — коэффициент, определяемый по табл. 5.1.

При последовательном расположении нескольких местных сопротивлений потери напора от них складываются. Однако при их сравнительно близком расположении, ввиду переформирования эпюр распределения местных скоростей по сечению, действительные потери напора могут отличаться от суммы этих потерь. Это объясняется тем, что распределение местных осредненных скоростей после предыдущего сопротивления не успевает стабилизироваться на участке до последующего. Расстояние, на котором сказывается взаимное влияние местных сопротивлений, определя-

ется по рекомендации А. Д. Альтшуля:

$$l_{в.л} = 0,5d \frac{\zeta_{в.м}}{\lambda}, \quad (5.95)$$

или приближенно

$$l_{в.л} = (40 \dots 60) d. \quad (5.96)$$

При расстояниях меньших, чем  $l_{в.л}$  суммарный коэффициент двух местных сопротивлений может быть определен по зависимости

$$\zeta_{1-2} = (\zeta_1 + \zeta_2) K, \quad (5.97)$$

где  $K$  — определяется на основании опытов.

При решении ряда инженерных задач могут учитываться только местные сопротивления (см. гл. 6) или только сопротивления по длине (см. гл. 7, 8), а также сумма местных потерь и потерь по длине (см. гл. 6, 8):

$$h_w = h_l + \Sigma h_m. \quad (5.98)$$

#### Вопросы для самопроверки

1. Виды потерь энергии.
2. Опыты и закон Н. П. Петрова.
3. Опыты О. Рейнольдса для двух режимов движения жидкости.
4. Критические скорости и числа О. Рейнольдса.

## Глава 6. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ ИЗ ОТВЕРСТИЙ, ЧЕРЕЗ НАСАДКИ И ПАТРУБКИ

### § 6.1. Классификация отверстий и истечений

Изучение вопроса об истечении жидкости из отверстий и насадков имеет большое прикладное значение. Теория подобного истечения положена в основу расчета эжекторов, гидромониторов, пожарных устройств, карбюраторов, водоспусков и используется для решения целого ряда других производственных вопросов.

В соответствии с особенностями гид-

5. Зависимость потерь напора от режима движения жидкости.
6. Распределение касательных напряжений при равномерном движении.
7. Уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса).
8. Распределение касательных напряжений при ламинарном режиме движения жидкости.
9. Распределение местных скоростей по сечению ламинарного потока.
10. Соотношения между средней в сечении скорости потока и максимальной при ламинарном режиме движения.
11. Формула Пуазейля.
12. Определение потерь по длине при ламинарном режиме движения.
13. Коэффициент кинетической энергии для ламинарного режима.
14. Начальный участок ламинарного движения.
15. Переход от ламинарного режима движения к турбулентному.
16. Модель турбулентного потока.
17. Пульсация скорости.
18. Осредненная модель турбулентного потока.
19. Структура турбулентного потока.
20. Каскадная теория турбулентного потока академика А. Н. Колмогорова.
21. Вихревая вязкость.
22. Распределение местных осредненных скоростей.
23. Гидравлически гладкие, переходные и шероховатые поверхности.
24. Определение толщины вязкого подслоя.
25. Определение потерь напора по длине.
26. Определение местных потерь напора при внезапном расширении потока.
27. Виды местных потерь напора и их определение.

равлического расчета, отверстия подразделяют на малые и большие.

*Малым* (рис. 6.1, I и II), называется отверстие, в различных точках которого геометрический напор  $H$  (расстояние по вертикали от свободной поверхности жидкости до рассматриваемой точки отверстия) практически одинаков (высота такого отверстия, расположенного в вертикальной стенке, не превышает  $0,1 H$ ). *Большим* (рис. 6.1, III) называется отверстие, геометрический напор в различных точках по высоте