лежит ниже центра тяжести тела, то есть метацентрическая высота отрицательна, то тело неостойчиво.

Вопросы для самопроверки

1. Нормальные напряжения в покоящейся жидкости и их свойства.
2. Что такое гидростатическое давление и его свойства?
3. Основное уравнение гидростатики, его энергетический смысл и геометрическая интерпретация.
4. Определение гидростатического давления в произвольной точке покоящейся жидкости. Какова размерность давления и его единицы?
5. Полное (абсолютное) и манометрическое (избыточное) давление, вакуум. Что такое пьезометрическая и вакуумметрическая высота?
6. Сила давления жидкости на плоскую стенку.
7. Эпюры нормальных напряжений и их использование.
8. Центр давления и определение его местоположения.
9. Сила давления жидкости на криволинейные цилиндрические поверхности.
10. Определение подъемной силы при плавании тел.

Глава 4. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

§ 4.1. Основные виды и формы движения жидкости

Гидродинамикой называется раздел гидравлики, изучающий движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами при их относительном движении. Исходя из этого вводят понятие о внутренней и внешней задачах механики жидкости.

К внутренней задаче относится движение жидкости в трубах, каналах и т. п., а к внешней задаче относится обтекание потоком твердых тел.

Кинематикой жидкости называется раздел гидродинамики, в котором рассматриваются виды и формы движения жидкости без учета сил, под действием которых происходит движение.

Динамикой жидкости называется раздел гидродинамики, который изучает законы движения жидкости в зависимости от действующих сил.

В гидродинамике так же, как и в гидростатике (см. § 2.4), рассматриваются две модели жидкостей: идеальные (или невязкие) и реальные (вязкие).

При изучении принимается, что жидкость является сплошной средой даже при бесконечно малых объемах. Поэтому гидродинамику можно считать в общем случае разделом механики сплошных сред. Предположение о сплошности позволяет считать все параметры движущейся жидкости непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и времени.

Жидкость состоит из бесконечно большого числа частиц, которые при рассмотрении уравнений движения физически представляются как очень малая масса жидкости, занимающая соответственно малый объем. В процессе движения жидкости изменяются во времени взаимные положения ее частиц и их форма. Деформируемость частицы жидкости является ее главной кинематической особенностью как элемента сплошной среды.

Под *точкой пространства* понимают геометрический образ, не имеющий размеров, положение которого в пространстве определяется тремя координатами x, y, z. Таким образом, через данную точку пространства проходят разные частицы жидкости, а положение движущейся жидкой частицы определяется координатами.

Частица жидкости при движении характеризуется плотностью, местной скоростью и гидродинамическим давлением.

Плотность жидкости ρ (см. § 2.2) принимается постоянной.

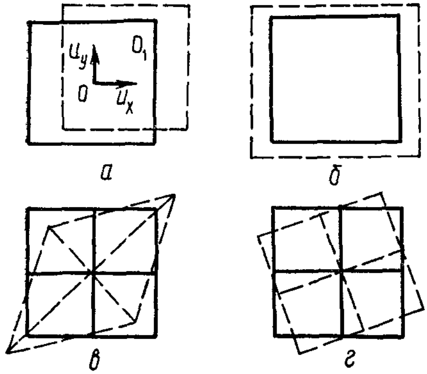

Рис 4 1

Местной скоростью u называется скорость частицы жидкости в данной точке пространства в данный момент времени t, то есть $u = f(x, y, z, t)$. В проекциях на оси координат следует различать составляющие скорости u_x, u_y и u_z, тогда

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \qquad (4\ 1)$$

Полная производная каждой из составляющих скоростей может быть представлена в виде

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}, \qquad (4\ 2)$$

где $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$ — проекции скорости u на соответствующие оси, представляющие собой отношение проекции пути на соответствующие оси за время t.

Первое слагаемое правой части равенства выражает изменение скорости по времени в некоторой фиксированной точке пространства, то есть местное изменение и поэтому называется *локальной производной,* или *локальной составляющей, ускорения.* Остальные слагаемые характеризуют изменение скорости при перемещении частиц жидкости из одной точки пространства в другую и называются *конвективными производными,* или *конвективными составляющими, ускорения.* Конвективное ускорение характеризует неоднородность распределения скоростей в точках пространства в данный момент времени.

Гидродинамическое давление p характеризует давление в данной точке движущейся жидкости (аналогично гидростатическому давлению) и по аналогии с местной скоростью может быть записано как $p = f_1(x, y, z, t)$.

Если скорость зависит как от координат точек пространства, так и от времени, то есть $u = f(x, y, z, t)$, то такое движение называется *неустановившимся,* или *нестационарным.*

Если же скорость зависит только от координат точек пространства и не зависит от времени (постоянна по величине и направлению в каждой данной точке), то такое движение называется *установившимся,* или *стационарным.*

При движении жидкости происходят как перемещение, так и изменение формы (деформация) ее частиц.

Различают следующие виды перемещения, деформации и вращения частицы жидкости, схематично представленные для грани параллелепипеда, в форме которого принята частица жидкости на рис. 4.1:

простое перемещение по направлениям x и y (рис. 4 1, *а*),

линейная деформация (растягивание) сторон частицы (рис. 4.1, *б*);

угловая деформация — изменение каждого из четырех углов грани (рис 4 1, *в*);

вращение — поворот биссектрисы угла между гранями в том или ином направлении (рис. 4 1, *г*).

Различают два вида движения: вихревое и потенциальное (безвихревое). *Вихревое движение* — это такое, при котором кроме поступательного движения происходит вращение частиц жидкости вокруг осей, через них проходящих. При *потенциальном движении* отсутствует вращательное движение.

В общем случае компоненты местной скорости могут быть представлены в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_{ox} + u_{x\text{д}} + (\omega_y z - \omega_z y); \\ u_y &= u_{oy} + u_{y\text{д}} + (\omega_z x - \omega_x z); \\ u_z &= u_{oz} + u_{z\text{д}} + (\omega_x y - \omega_y x), \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

где, координаты x, y, z определяют центр частицы жидкости в данный момент времени.

Таким образом, движение частицы жидкости слагается из поступательного движения центра тяжести частицы со скоростью u_{oi}, из движения, обусловленного деформацией формы самой частицы со скоростями деформации $u_{x\text{д}}$, $u_{y\text{д}}$ и $u_{z\text{д}}$, из вращательного движения с угловыми скоростями (компонентами вихря) ω_x, ω_y и ω_z.

При этом

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

Составляющие скорости деформации частицы в процессе ее движения являются частными производными функции F:

$$F = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_x}{\partial x} x^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y} y^2 + \frac{\partial u_z}{\partial z} z^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) yz + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) zx + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) yx\right],$$

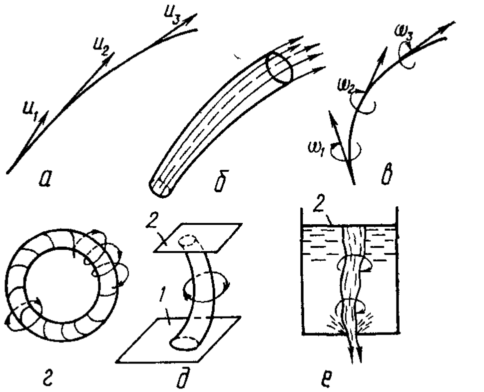

Рис. 4.2

то есть $u_{x\text{д}} = \frac{\partial F}{\partial x}$, $u_{y\text{д}} = \frac{\partial F}{\partial y}$ и $u_{z\text{д}} = \frac{\partial F}{\partial z}$.

При движении частиц жидкости различают линию тока, элементарную струйку, вихревую линию и вихревую трубку.

Линией тока называется линия, касательная к каждой точке которой в данный момент времени совпадает с направлением вектора скорости (рис. 4.2, *а*). Следовательно, линия тока отражает мгновенную картину движения в различных точках. Так как путь частицы жидкости представляет траекторию ее движения с течением времени, то только в случае установившегося движения линии тока совпадает с траекториями движущихся частиц жидкости.

Поверхность, образованная линиями тока, проведенными через все точки бесконечно малого замкнутого контура, называется *трубкой тока* (рис. 4.2, *б*). Масса жидкости, протекающей внутри трубки тока, называется *элементарной струйкой*. Таким образом, элементарную струйку можно рассматривать как движущийся бесконечно малый объем жидкости вокруг линии тока. В условиях установившегося движения элементарная струйка обладает такими свойствами: ее форма остается неизменной с течением времени; поверхность элементарной струйки является непроницаемой, то есть частицы жидкости не могут войти или выйти через нее; вследствие малости поперечного сечения струйки скоростн во всех его точках принимаются одинаковыми и равными местной скорости.

Вихревая линия (рис. 4.2, *в*) — это линия, касательная во всех точках к векторам угловой скорости частиц. Вихревая линия аналогична линии тока. Поверхность, ограниченная вихревыми линиями, проведенными через все точки какого-нибудь бесконечно малого простого замкнутого контура, находящегося в области движущейся жидкости, называется *вихревой трубкой*. Вихревая трубка аналогична трубке тока. Массу движущейся жидкости внутри вихревой трубки называют *вихревым шнуром*. Вихревой шнур обладает такими свойствами: его сеченне нигде не может стать равным нулю, так как в этом сечении скорость вращения должна стать бесконечной, что физически невозможно; вихревые шнуры не могут заканчиваться внутри жидкости — они либо замыкаются на себя, образуя вихревые кольца (рис. 4.2, *г*), либо «опираются» на стенку *1* или свободную поверхность *2* (рис. 4.2, *д*, *е*).

Основная задача гидродинамикн — определение двух неизвестных (местной скорости u и гидродинамического давления p), в отличие от гидростатики, где только одно неизвестное — гидростатическое давление p.

§ 4.2. Методы изучения движения жидкости

В гидромеханике существуют два метода изучения движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.

Метод Лагранжа заключается в изучении движения каждой отдельной частицы жидкости. В этом случае движение определяется положением частицы жидкости в функции от времени t. В начальный момент времени t_0 ее положение определено начальными координатами x_0, y_0, z_0. При движении частица перемещается в новую точку пространства с координатами x, y и z. Движение частицы будет определено, если можно установить координаты x, y н z в заданный момент временн t в зависимости от начальных координат x_0, y_0 и z_0:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(x_0, y_0, z_0, t); \\ y &= f_2(x_0, y_0, z_0, t); \\ z &= f_3(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Эта система уравнений дает возможность построить траекторию движения частицы жидкости и характеризует «историю» движения и ее «будущее». Велнчины x, y и z являются *переменными Лагранжа*, а их изменение за время dt позволяет получить значения dx, dy и dz, а затем путь $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Проекции скорости на координатные оси определяются зависимостями $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$, а местная скорость $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

Таким образом, метод Лагранжа сводится к определению семейства траекторий движения частиц движущейся жидкости.

Учитывая, что для установившегося движения линин тока совпадают с траекториями движущихся частнц жидкости, можно записать

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \tag{4 6}$$

Выражение (4.6) называется *уравнением линии тока*.

Метод Лагранжа в гидравлике не нашел широкого применения ввиду его относительной сложности.

Метод Эйлера основан на изучении поля скоростей, под которым понимается вся система векторов, представляющих величину и направление скоростей в соответствующих точках пространства, занятого движущейся жидкостью, в данный момент времени. Таким образом, поле скоростей представляет собой совокупность векторов местных скоростей. Построение поля скоростей в разных точках для разных моментов времени достаточно полно характеризует движение жидкости.

Переменными Эйлера являются значения скоростей u_x, u_y и u_z, которые определяются в зависимости от координат точек пространства x, y, z и времени t:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= f_1(x, y, z, t); \\ u_y &= f_2(x, y, z, t); \\ u_z &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Метод Эйлера нашел широкое применение в гидравлике. Он позволяет определить: скорость в любой точке пространства в любой момент времени; скорость в данной точке пространства ($x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$) с течением времени; скорость в фиксированный момент времени ($t = \text{const}$) в различных точках пространства.

В то же время метод Эйлера не позволяет изучить движение отдельной частицы жидкости.

Следует добавить, что гидродинамическое давление p по аналогии со скоростью определяется как

$$p = f_4(x, y, z, t). \qquad (4.8)$$

§ 4.3. Поток жидкости и его элементы

При потенциальном движении, то есть таком, при котором отсутствует вращательное движение (см. § 4.1), бесконечно малым элементом движения обычно считают элементарную струйку (рис. 4.3). В общем случае в каждой точке линии тока местные скоро-

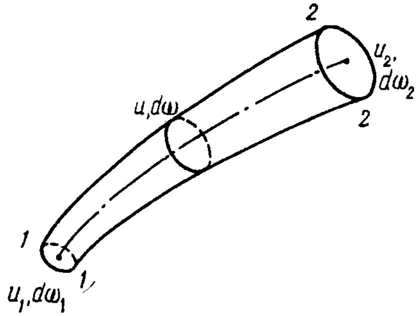

Рис. 4.3

сти u разные. Если пересечь элементарную струйку ортогональной к линии тока плоскостью, то получим *живое сечение* струйки площадью $d\omega$. Количество жидкости, протекающее через это живое сечение в единицу времени, называется *объемным элементарным расходом* dQ, или *расходом элементарной струйки*. Исходя из свойства элементарной струйки, в силу которого скорости во всех точках ее поперечного сечения (см. § 4.1) ввиду его малости принимаются одинаковыми и равными местной скорости, можно записать, что

$$dQ = u d\omega. \qquad (4.9)$$

В инженерной практике обычно имеют дело с конечным объемом движущейся жидкости, который называется *потоком*. Поток жидкости (рис. 4.4) состоит из бесконечно большого числа бесконечно малых элементарных струек, то есть является их совокупностью. Поверхность в пределах потока жидкости, нормальная к каждой линии тока, называется *живым сечением потока*.

Объем жидкости, проходящий в единицу времени через живое сечение потока, называется *расходом* Q:

$$Q = \int_\omega dQ = \int_\omega u d\omega. \qquad (4.10)$$

В большинстве случаев нельзя получить теоретическую зависимость распределения местной скорости u по живому

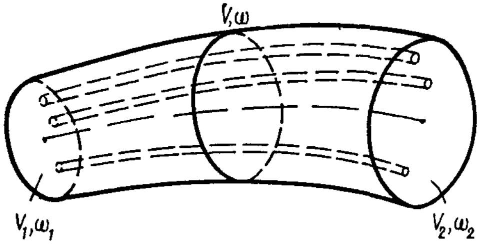

Рис. 4 4

сечению, что вызывает затруднения при вычислении интеграла (4 10). Для удобства практических расчетов вводится понятие *средней скорости* в живом сечении потока V, под которой понимается такая одинаковая (реально не существующая) для всех точек живого сечения скорость, при которой расход равен действительному (то есть с учетом реальных местных скоростей):

$$Q = V\omega, \qquad (4\ 11)$$

но

$$Q = \int_\omega u d\omega$$

и тогда

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int_\omega u d\omega}{\omega} \cdot \qquad (4.12)$$

Обычно жидкость движется в руслах (естественных или искусственных) с твердыми стенками

Часть длины периметра (или весь периметр) живого сечения, где поток соприкасается со стенками русла называется *смоченным периметром* χ (рис. 4 5, *а—г*)

Отношение площади живого сечения ω к длине смоченного периметра χ называется *гидравлическим радиусом*

$$R = \omega/\chi. \qquad (4\ 13)$$

Потоки жидкости по своему характеру могут быть разделены на три категории:

безнапорные потоки — потоки, имеющие свободную поверхность жидкости,

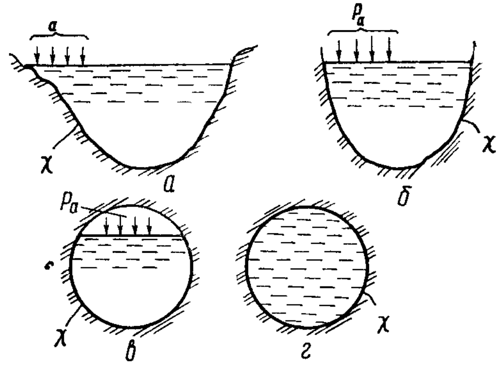

Рис 4 5

в точках которой внешнее давление обычно равно атмосферному (например, движения жидкости в каналах, реках, лотках разного сечения и в замкнутых сечениях при неполном заполнении, рис. 4 5, *а—в*);

напорные потоки, в которых жидкость соприкасается во всех точках с твердыми стенками русла (рис. 4.5, *г*), они не имеют свободной поверхности, движение происходит под влиянием давления (например, движение жидкости в напорных трубопроводах),

гидравлические струи, ограничиваемые только жидкостью или газовой средой, и в отличие от предыдущих потоков имеющие в газовой среде со всех сторон свободную поверхность (например, струя, вытекающая из сосуда через отверстие, см гл. 7).

У безнапорных потоков смоченный периметр χ составляет только часть периметра живого сечения, у напорных — равен всему периметру, а у струй — отсутствует.

В соответствие с положениями § 4 1 движение жидкости можно классифицировать так.

Неустановившимся движением называют такое, при котором элементы потока (расход, скорость, глубина и др) изменяются как в пространстве, так и во времени.

Установившееся движение — это такое, при котором элементы потока (расход, скорость, глубина и др.) не изменяются с течением времени, а могут лишь изменяться в пространстве. Установившееся движение жидкости может быть неравномерным и равномерным.

Неравномерным движением называют такое, при котором элементы потока изменяются в пространстве. Следует отметить, что неустановшееся движение всегда является неравномерным, но неравномерное движение может быть и установившимся. Неравномерное движение может быть ускоренным или замедленным.

Равномерное движение это такое, при котором элементы потока не изменяются ни во времени, ни в пространстве. Отсюда следует, что равномерное движение всегда является установившимся. Ускорения прн равномерном движении равны нулю.

В инженерной практике часто встречается *плавноизменяющееся движение,* при котором кривизна линий тока незначительна, а угол расхождения между ними весьма мал.

Если же кривизна линий тока и угол расхождения между ними большие, то такое движение называют *резкоизменяющимся.*

§ 4.4. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости (уравнения Эйлера)

Основной задачей гидродинамики (см. § 4.1) является определение значений местной скорости u и гидродинамического давления p. Эта задача решается методом Эйлера (см. § 4.2).

При выводе дифференциальных уравнений движения жидкость принимается невязкой (идеальной), то есть касательные напряжения, характеризующие деформацию частиц жидкости, не учитываются. В связи с этим можно не учитывать силы трения и считать, что массовые силы и силы давления, являющиеся причиной движения, определяются также, как и в покоящейся жидкости (в гидростатике).

Уравнения Эйлера для равновесия жидкости были получены в гл. 3 в виде (3.20). Отнеся компоненты этих уравнений к единице массы, получим

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X=0; \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y=0; \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4\ 14)$$

Эти уравнения выражают условия равновесия сил.

Для того, чтобы получить уравнения движения можно воспользоваться принципом Д'Аламбера; для перехода от равновесия к движению необходимо к действующим силам прибавить силы инерции.

С учетом того, что уравнения (4.14) приведены к единице массы, соответствующие силы инерцни выражаются как $j_x=-1\,\frac{du_x}{dt}$, $j_y=-1\,\frac{du_y}{dt}$ и $j_z=-1\,\frac{du_z}{dt}$.

Прибавляя силы инерции к действующим силам и перенося их в правую часть уравнений, получим

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X=\frac{du_x}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y=\frac{du_y}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z=\frac{du_z}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (4\ 15)$$

Эти уравнения были получены в 1755 г. академиком Российской Академии наук Л. Эйлером и называются *дифференциальными уравнениями движения невязкой жидкости* (уравнения Эйлера для движения).

Полные производные $\frac{du_x}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$ и $\frac{du_z}{dt}$, в соответствии с зависимостью (4.2), можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ &+ u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z};\\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \\ &+ u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z};\\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \\ &+ u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

Подставляя значения (4.16) в (4.15), получим

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ &+ u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z};\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \\ &+ u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z};\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial y} + \\ &+ u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad (4.17)$$

Уравнения (4.17) — это *уравнения Эйлера для движения невязкой жидкости, записанные в развернутом виде.* Первые составляющие левой части выражают силы гидродинамического давления, вторые — внешние действующие силы, а в правой части представлены силы инерции.

Полученные в таком виде дифференциальные уравнения Эйлера положили начало практическому изучению движения жидкости. Поскольку для нахождения четырех неизвестиых u_x, u_y, u_z и p недостаточно трех уравнений (4.15), то к ним прибавляют четвертое — уравнение неразрывности или сплошности движения для несжимаемой жидкости (см. § 4.5).

Уравнения Эйлера (4.15) и (4.17) справедливы как для потенциального (безвихревого), так и для вихревого движения.

Для вихревого движения уравнения Эйлера (4.17) следует несколько преобразовать, вводя компоненты вихря. С этой целью перенесем первые два члена правой части первого уравиения (4.17) в левую часть со знаком минус, тогда

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial t} - u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Вычитая из левой и правой частей этого уравнения выражение $\left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$, получим

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial t} - \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Преобразуем трехчлен в скобках в выражение

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2}{2} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Подставляя в левую часть вышеполученного уравнения преобразованное выражение трехчлена и объединяя подобные члены в правой части, можно записать

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \frac{\partial u_x}{\partial t} = u_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) - u_y\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

В соответствии с (4.4)

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\omega_y; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z,$$

тогда

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\frac{\partial u_x}{\partial t}= \\ =2(u_z\omega_y-u_y\omega_z).$$

Произведя аналогичные преобразования по другим осям, можно окончательно записать

$$\left.\begin{aligned}&X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\\&-\frac{\partial u_x}{\partial t}=2(u_z\omega_y-u_y\omega_z);\\&Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\\&-\frac{\partial u_y}{\partial t}=2(u_x\omega_z-u_z\omega_x);\\&Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\\&-\frac{\partial u_z}{\partial t}=2(u_y\omega_x-u_x\omega_y).\end{aligned}\right\}\quad(4.18)$$

Полученные уравнения называют *уравнениями движения жидкости в форме Громека — Ламба.* В такой форме уравнения указывают на наличие или отсутствие вихрей и позволяют установить различие в особенностях безвихревого и вихревого движений жидкости.

Если вращение частиц отсутствует, то $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$. Такое движение безвихревое и уравнения Громека — Ламба приобретают вид

$$\left.\begin{aligned}&X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\\&-\frac{\partial u_x}{\partial t}=0;\\&Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\\&-\frac{\partial u_y}{\partial t}=0;\\&Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\\&-\frac{\partial u_z}{\partial t}=0.\end{aligned}\right\}\quad(4.19)$$

Для безвихревого движения при $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$ из (4.4) следует, что

$$\frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial u_z}{\partial x},\quad\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial y}\quad\text{и}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial z}.\qquad(4.20)$$

Введем для установившегося движения непрерывную функцию $F(x, y, z)$, частные производные которой по соответствующим осям являются компонентами скорости:

$$u_x=\frac{\partial F}{\partial x},\ u_y=\frac{\partial F}{\partial y}\ \text{и}\ u_z=\frac{\partial F}{\partial z}.\qquad(4.21)$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям безвихревого движения. Для этого продифференцируем зависимости (4.21) соответственно по z, x, y:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z},\quad\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}$$

и по y, z, x:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\quad\frac{\partial u_y}{\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}.$$

Вторые производные не зависят от порядка дифференцирования. В связи с этим, сравнивая обе системы равенств, приходим к условию (4.20), что и является признаком безвихревого движения.

Функция F называется *потенциалом скорости.* Если такая функция существует, то соблюдается условие (4.20), то есть *движение безвихревое, или потенциальное.*

Дифференцируя (4.21) по dt, получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t};\\&\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial t};\\&\frac{\partial u_z}{\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\quad(4.22)$$

Если движение жидкости происходит под действием массовых сил, имеющих потенциальную функцию П (x, y, z) или просто потенциал силы П, его частные производные равны

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = Z.$$

Подставляя эти полученные выражения и зависимости (4.22) в уравнение (4.19), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.23)$$

Для интегрирования уравнений (4.23) умножим первое уравнение на dx, второе на dy, а третье на dz. Складывая их, предварительно изменив знаки на обратные, с учетом, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df,$$

где

$$f = \left(-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial t}\right),$$

получим выражение

$$d\left(-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0. \quad (4.24)$$

Из выражения (4.24) для неустановившегося движения следует, что $-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial t} = \text{const}$ в данный момент времени,

а в общем случае

$$-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial t} = f(t). \quad (4.25)$$

Выражение (4.25) называется *интегралом Лагранжа*. При неустановившемся движении ($dF/dt \neq 0$) он характеризует только безвихревое (потенциальное) движение, при котором существует потенциал скорости F и его производная $\frac{\partial F}{\partial t}$.

При установившемся потенциальном движении $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ и тогда

$$-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (4.26)$$

Выражение (4.26) называется *интегралом Д. Бернулли.*

§ 4.5. Уравнение нервзрывности жидкости

Уравнение неразрывности, или сплошности, жидкости основано на законе сохранения массы и исходит из положения механики сплошных сред о том, что внутри движущейся жидкости не может произойти разрыв, не может установиться пустота.

Условие неразрывности может быть представлено в дифференциальной форме для частицы жидкости и элементарной струйки, а также в конечных величинах для потока жидкости.

В потоке выделим элементарный объем в форме параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz (рис. 4.6). Рассмотрим изменение протекающей массы жидкости по оси x. Скорость жидкости, которая втекает в левую грань параллелепипеда, обозначим через u_x и тогда скорость жидкости, вытекающей из правой грани, можно выразить как $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dx$.

Принимая плотность жидкости ρ постоянной (см. § 4.1), можно записать, что через левую грань за время dt пройдет масса

$$\rho u_x dy dz dt,$$

а через правую

$$\rho\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) dy dz dt.$$

Разность этих масс составляет

$$-\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Рассматривая по аналогии изменение массы жидкости по оси y и z, запишем

$$-\rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dydxdzdt \text{ и } -\rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dzdxdydt.$$

Закон сохранения массы требует, чтобы общее изменение массы, прошедшей через выбранный объем, равнялось нулю:

$$-\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dxdydzdt - \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dxdydzdt - \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dxdydzdt = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4.27)$$

Это выражение и называется *уравнением неразрывности, или сплошности,* в дифференциальной форме для произвольного движения несжимаемой жидкости.

Левая часть уравнения (4.27) представляет собой скорость относительного изменения элементарного объема жидкости (объемное расширение) и называется *дивергенцией,* или *расхождением, вектора скорости* (div u); при этом

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (4.28)$$

При установившемся движении уравнение неразрывности можно вывести исходя из свойств элементарной струйки (см. § 4.1). В соответствии с ними жидкость из струйки не вытекает в стороны и не притекает в нее извне, но в то же время местные скорости разные по длине струйки. Отсюда следует, что количества жидкости, притекающей к струйке в начальном живом сечении и вытекающей из нее в конечном живом сечении, равны между собой и общий объем жидкости в струйке не изменяется.

Рассмотрим живые сечения *1—1* и *2—2* элементарной струйки (рис. 4.3) с местными скоростями соответственно u_1 и u_2. Объемы жидкости, прошедшие

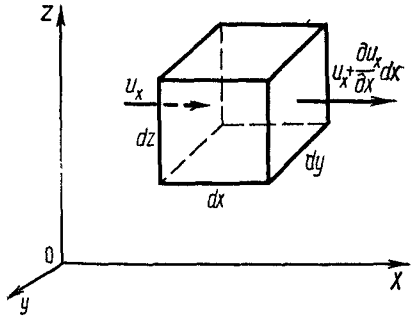

Рис. 4.6

через сечения *1—1* и *2—2* в единицу времени, составляют элементарные расходы $dQ_1 = u_1 d\omega_1$ и $dQ_2 = u_2 d\omega_2$. Ввиду постоянства объема струйки $dQ_1 = dQ_2$ и тогда

$$u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2. \quad (4.29)$$

Выражение (4.29) и является *уравнением неразрывности, или сплошности, для элементарной струйки.*

Для потока жидкости (рис. 4.4), представляющего собой совокупность элементарных струек, в соответствии с зависимостью (4.11) можно записать, что $Q_1 = V_1\omega_1$ и $Q_2 = V_2\omega_2$ и тогда

$$V_1\omega_1 = V_2\omega_2. \quad (4.30)$$

Это выражение и является *уравнением неразрывности, или сплошности, для потока жидкости,* которое при условии $\rho = \text{const}$ математически выражает собой закон сохранения массы, открытый М. В. Ломоносовым. Уравнение (4.30) можно представить в виде

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (4.31)$$

то есть отношение средних скоростей в живых сечениях потока обратно пропорционально отношению их площадей.

Из уравнений (4.30) и (4.31) следует важная особенность для установившегося движения жидкости — при уменьшении площади живого сечения средняя скорость увеличивается, а при увеличении — уменьшается, а $V_1\omega_1 = V_2\omega_2 = V_3\omega_3 = ... = V_n\omega_n = Q = \text{const}$.

§ 4.6. Особенности потенциального движения жидкости

Как показано выше (см. систему уравнений (4.3)), общее движение жидкости может быть разложено на три составляющих вида, два из которых (поступательное и деформационное) имеют потенциал скорости, а третий (вращательное) не имеет. Это и определяет разделение движения жидкости на *потенциальные* (безвихревые) и *вихревые* (непотенциальные) — см. § 4.1.

При потенциальных движениях, охватывающих всю массу жидкости, вращательное движение отдельных частиц жидкости отсутствует, так как в системе уравнений (4.3) компоненты вихря могут быть только следствием сил, не имеющих потенциала, и наблюдаются в ограниченной части объема жидкости.

Потенциального движения, строго говоря, в природе не бывает, так как при обтекании потоком твердых тел, а также при движении жидкости вдоль твердых границ русла возникают вихри. В то же время при незначительной завихренности можно считать, что движение близко к потенциальному. Если допущение о потенциальности обосновано, то его использование значительно облегчает расчет основных характеристик движения.

Уравнение потенциального движения может быть представлено в виде интеграла Лагранжа (4.25) с потенциалом скорости F, частные производные которого определяют местные скорости u_x, u_y и u_z (см. зависимости (4.21)).

Для потенциального движения уравнение неразрывности (4.27)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

может быть видоизмененно с учетом зависимостей (4.21) и, следовательно,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \text{ и}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \qquad (4.32)$$

Подставляя (4.32) в уравнение (4.27), получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial z^2} = \nabla F = 0. \quad (4.33)$$

Выражение (4.33) называется *уравнением Лапласа,* а значок ∇ — *оператором Лапласа,* или *наблой.*

Если движение жидкости определяется двумя координатами пространства (x и y), то такое движение называют *плоским,* или *двухмерным,* и в этом случае уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \qquad (4.34)$$

Если поток удовлетворяет этому уравнению, то он является *потенциальным.* Решение уравнения Лапласа для заданных граничных условий дает семейство линий равных потенциалов скоростей

$$F(x, y) = C, \qquad (4.35)$$

где C имеет постоянное значение для каждой отдельной линии равного потенциала скорости.

Вдоль линии равного потенциала

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

или с учетом (4.20)

$$u_x dx + u_y dy = 0. \qquad (4.36)$$

Выражение (4.36) называют *дифференциальным уравнением линий равного потенциала скоростей* и часто записывают в такой форме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}. \qquad (4.37)$$

Отметим, что исследование плоских потенциальных движений на основе уравнения Лапласа дает возможность применения эффективных математических приемов решения (метод комфорных преобразований) задач гидродинамики.

В условиях плоского движения жидкости существует функция $\Psi(x, y)$, называемая *функцией тока:*

$$\Psi(x, y) = C, \qquad (4.38)$$

где каждому значению постоянной C отвечает конкретная линия тока, то есть зависимость (4.38) является уравнением семейства линий тока. Вдоль линии тока эта функция не меняет своего значения ($\Psi = \text{const}$ или $d\Psi = 0$). Следовательно,

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0. \qquad (4.39)$$

Свойством функции тока является условие, что

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ и } u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \qquad (4.40)$$

Подставляя (4.40) в (4.39), получим

$$u_x dy - u_y dx = 0,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x}. \qquad (4.41)$$

Следовательно дифференциал функции тока представляет собой уравнение линии тока (4.41), проведенной через данную точку.

Для определения физического смысла дифференциала функции тока (4.39), рассмотрим поток, характеризуемый линиями тока, представленными на рис. 4.7. В соответствии с (4.29) расход вдоль элементарной струйки остается постоянным. Тогда можно принять, что Ψ_0 — элементарный расход между границей потока (заштрихованная линия) и линией тока *0*, Ψ_1 — расход между границей потока и линией тока *1* и т. д. Тогда в общем случае элементарный расход между линиями тока k и i будет равен разности $\Psi_k - \Psi_i$. Так как вдоль

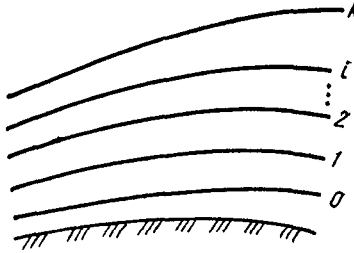

Рис. 4.7

линии тока функция Ψ постоянная величина, то *дифференциал функции тока равен элементарному расходу между линиями тока.*

Сопоставляя (4.20) и (4.40), можно записать

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad (4.42)$$

что свидетельствует о том, что функции тока и функции равных потенциалов скоростей взаимно перпендикулярны.

Рассмотрим совместно условие безвихревого движения (4.20) в виде

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

и выражение (4.40) для составляющих скорости через функции тока. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \qquad (4.43)$$

то есть функция тока Ψ для потенциального движения, как и потенциал скорости F, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Как было отмечено выше, линии тока и линии равного потенциала ортогональны между собой. В соответствии с (4.41) и (4.37) угловые коэффициенты этих линий

$$a_1 = \frac{u_y}{u_x} \text{ и } a_2 = -\frac{u_x}{u_y},$$

откуда следует, что $a_1 a_2 = -1$. Это условие — действительный признак ортогональности рассматриваемых кривых.

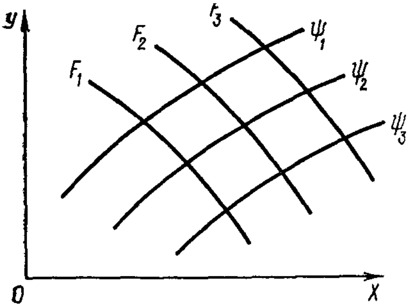

Рис. 4 8

Совокупность линий тока и линий равных потенциалов скоростей образует *гидродинамическую сетку движения,* которая полностью определяет кинематическую картину самого движения (рис. 4.8). При этом векторы скоростей касательны к линиям тока и нормальны к линиям равного потенциала.

В общем случае эта сетка представляет собой систему криволинейных прямоугольников, а в частности, если линии F и Ψ построены с одинаковыми интервалами ($\Delta F = \Delta\Psi$), систему криволинейных квадратов. В гидродинамической сетке функции F и Ψ взаимные или сопряженные. Если их поменять местами, то вид сетки не изменится, хотя характер движения будет разным.

§ 4.7. Примеры плоских потенциальных движений жидкости

Плоскопараллельный поток. Такой поток задается функцией тока в виде

$$\Psi = ax + by, \qquad (4\ 44)$$

где a и b постоянные коэффициенты

Так как $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0$ и $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^4} = 0$, уравнение (4.44) удовлетворяет уравнению Лапласа (4.38) и поэтому рассматриваемое движение является потенциальным.

Уравнение линий тока

$$ax + by = C$$

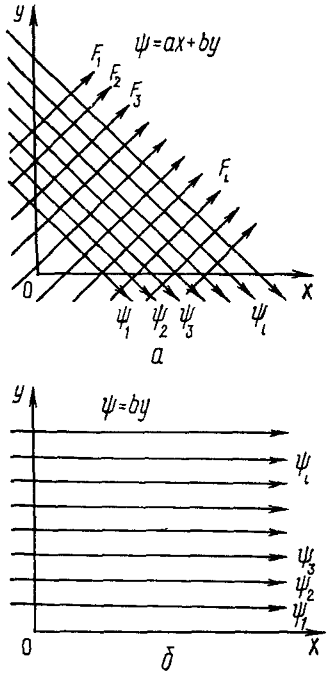

Рис. 4 9

дает ряд параллельных прямых с угловым коэффициентом a/b.

В соответствии с (4.40) составляющие скорости

$$u_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = b \text{ и } u_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -a. \qquad (4\ 45)$$

Тогда скорость $u = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{const}$. Из уравнения линий равного потенциала (4.37) следует

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = \frac{b}{a}$$

или после интегрирования

$$ay = bx + C,$$

что дает ряд прямых с угловым коэффициентом b/a, перпендикулярных линиям тока. Линии равного потенциала можно получить сразу, учитывая свойство ортогональности между линиями тока и линиями равного потенциала.

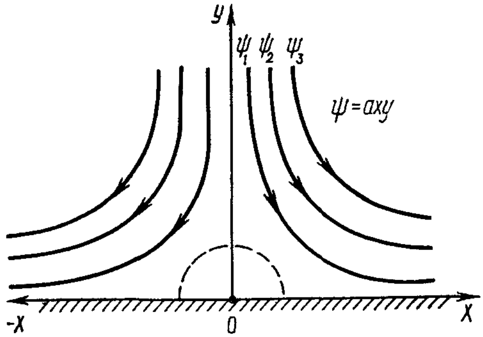

Рис. 4.10

На рис. 4.9, *а* представлена схема плоскопараллельного движения в общем случае, а на рис. 4.9, *б* частный случай движения параллельного оси ($\Psi = by$).

Обтекание преграды. В этом случае движение задается гиперболической функцией

$$\Psi = axy \tag{4.46}$$

Как и в предыдущем случае эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа (4.33):

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0$$

и, следовательно, рассматриваемое движение является потенциальным.

Уравнение линий тока $xy = C$ характеризует семейство равносторонних гипербол с осями x и y, которые являются их асимптотами. Если принять ось x как преграду, то асимптота $x = 0$, то есть ось y отвечает центральной линии тока (при этом $C = 0$). При отрицательных значениях C линии тока располагаются левее оси y. Общая схема движения при обтекании преграды представлена на рис. 4.10.

Из составляющих вектора скорости $u_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = ax$ и $u_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -ay$ получаются линии тока, показанные на рис. 4.10 стрелками. Модуль скорости

$$u = a\sqrt{x^2 + y^2} = ar \tag{4.47}$$

определяется расстоянием от данной точки до центра, которое прямо пропорционально ему. Поэтому скорость центральной линии тока постепенно уменьшается к центру координат O и в пределе (при $r \to 0$) скорость также стремится к нулю.

Если обе асимптоты принять за стенки, то получится схема обтекания прямого угла. Изменяя вид гиперболической функции (4.46), можно получить спектры обтекания острого и тупого углов или пластинки.

Таким образом, исследование движений, описываемых функцией (4.46), показывает, что жидкость обтекает препятствие, а не ударяется о него.

Источники и стоки на плоскости. *Источником* называется точка, из которой жидкость вытекает симметрично по радиусам во все стороны (рис. 4.11, *а*). *Сток* — это точка, поглощающая жидкость (рис. 4.11, *б*), симметрично притекающую к ней по радиусам. Функция тока в рассматриваемом виде движения имеет вид

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi}\Theta = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \tag{4.48}$$

где Q — расход источника или стока (постоянная величина).

По аналогии с предыдущим установим соответствие функции (4.48) уравнению Лапласа (4.33):

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} = u_x;$$

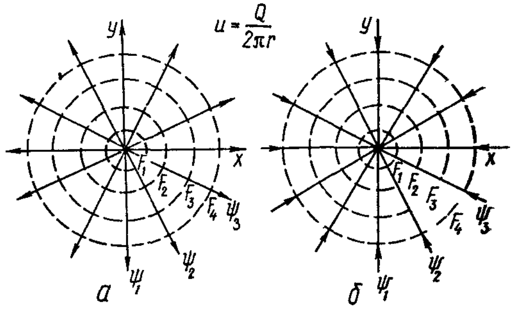

Рис. 4.11

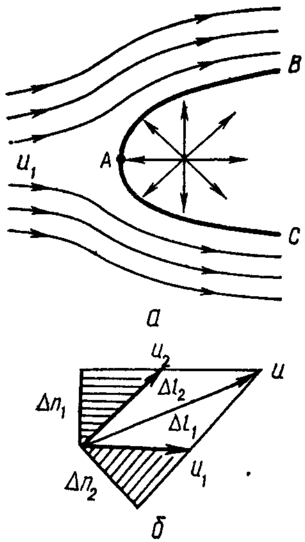

Рис. 4.12

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -\frac{Q}{\pi}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = -u_y;$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{Q}{\pi}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},$$

то есть $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0$

и поэтому рассматриваемое движение является потенциальным.

Задавая различные значения Θ в пределах от 0 до 2π, получаем линии тока в виде пучка прямых, выходящих из центра O. Если линии тока направлены по радиусам из центра к периферии, то это будет *источник* (рис. 4.11, *а*), если же от периферии к центру (рис. 4.11, *б*) — *сток*.

Линии равного потенциала представляют собой концентрические окружности относительно этого же центра.

Радиальная скорость в любой точке

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{Q}{2\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{Q}{2\pi r}, \tag{4.49}$$

где r — расстояние от центра O.

Следует отметить, что зависимость (4.49) не может быть применена непосредственно для области вблизи центра O, так как скорость не может стать бесконечно большой. На практике имеют дело не с точкой (источником), а с отверстием ограниченных размеров. Примером стока являются водозаборные сооружения на водохранилищах, к которым со всех сторон притекает вода.

Сложение потенциальных потоков. Уравнения Лапласа (4.33) и (4.43) — линейные дифференциальные уравнения. Как известно, сумма их частных решений является также решением этих уравнений. Таким образом, просуммировав в различных комбинациях имеющиеся решения для простейших течений можно получить различные виды более сложных потенциальных потоков.

Для примера рассмотрим наложение плоскопараллельного потока на источник (рис. 4.12, *а*). Графически результирующий поток получают геометрическим сложением сторон клеток, образующихся от пересечения линий тока складываемых потоков. Диагональ каждой клетки соответствует вектору скорости u и направлению суммарной линии тока (рис. 4.12, *б*).

Рассмотрим одну из клеток (рис. 4.12, *б*), где для произвольной точки сложного движения имеются два вектора: u_1 — плоскопараллельного и u_2 — радиального потоков. В силу одинаковости масштабов потоков составляющие пути, пройденные частицей жидкости по направлению скоростей, должны быть пропорциональны их величинам:

$$\frac{\Delta l_1}{u_1} = \frac{\Delta l_2}{u_2}.$$

При достаточной густоте линий тока каждую клетку можно рассматривать как параллелограмм. Обозначим расстояния между линиями токов соответственно Δn_1 и Δn_2. Образованные треугольники (заштрихованные на рисунке) подобны, следовательно,

$$\frac{u_1}{\Delta n_2} = \frac{u_2}{\Delta n_1},$$

откуда $u_1 \Delta n_1 = u_2 \Delta n_2$.

Имея в виду, что размер потока, перпендикулярный к плоскости чертежа, равен единице, получим

$$\Delta q_1 = \Delta q_2. \qquad (4.50)$$

Следовательно, при графическом построении результирующего потока линии токов слагаемых движений нужно выбирать так, чтобы расходы между соседними линиями токов для обоих случаев движения были одинаковы. Суммарное течение характеризуется диагональю клетки гидродинамической сетки, образуемой линиями тока обоих потоков (рис. 4.12, *б*).

В данном случае скорость плоскопараллельного движения вдоль оси x равна u_1, а расход источника Q. Из условия равенства расходов следует, что между смежными линиями тока

$$u_1 \Delta n_1 = \frac{Q}{k}, \text{ или } \Delta n_1 = \frac{Q}{k u_1},$$

где k — количество лучей (линий тока), проведенных из источника.

Скорость потока, вытекающего из источника, определяется зависимостью (4.49) $u_2 = \frac{Q}{2\pi r}$.

Определим на горизонтальной оси x точку A (рис. 4.12, *а*), в которой скорости плоскопараллельного потока u_1 и источника u_2 будут равны по величине и обратны по направлению, то есть результирующая скорость в ней равна нулю. Эта точка находится от центра на расстоянии $OA = \frac{Q}{2\pi u_1}$.

Точка A является *критической точкой*, в которой течение (аналогично случаю обтекания преграды) разветвляется и симметрично огибает источник. При этом кривая AB как бы отделяет жидкость, вытекающую из источника, от остального течения. Внутри контура BAC будет течение от источника, а вне — его движение, обтекаемое источником.

Контур всякого твердого тела, обтекаемого потоком (при отсутствии отрыва) это — линия тока. Поэтому, если заменить зону, ограниченную линией тока, твердым телом, остальные линии тока при этом не изменятся и дадут картину обтекания этого твердого тела.

§ 4.8. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки установившегося движения жидкости

Рассмотрим уравнения Эйлера (4.15) для движения невязкой жидкости:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned}\right\}$$

Координатные оси расположим так, чтобы оси x и y были в горизонтальной плоскости, а ось z направлена вертикально вверх.

Приведем систему уравнений Эйлера к виду удобному для интегрирования. С этой целью умножим каждое из уравнений на соответствующие перемещения dx, dy и dz (проекции элемента траектории на соответствующие оси координат) и почленно сложим три уравнения, в результате чего получим

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) + \\ + Xdx + Ydy + Zdz = \frac{du_x}{dt}dx + \\ + \frac{du_y}{dt}dy + \frac{\partial u_z}{dt}dz. \qquad (4.51)$$

Первый трехчлен в условиях установившегося движения $p = f(x, y, z)$ равен полному дифференциалу гидродинамического давления, отнесенному к плотности жидкости:

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=$$
$$=-\frac{dp}{\rho}.$$

Рассмотрим движение жидкости только под действием силы тяжести, как наиболее распространенное на практике. Следует отметить, что жидкость под действием силы тяжести может двигаться в любом направлении в том числе и вертикально вверх (в напорных системах).

Как отмечено в гл. 3, величины X, Y, Z выражают внешние массовые силы, заданные в виде проекций ускорений на соответствующие координатные оси. В рассматриваемом случае действует только сила тяжести, ускорение свободного падения которой равно g и тогда в принятых направлениях координатных осей можно записать

$$X=0,\quad Y=0 \text{ и } Z=-g,$$

поэтому трехчлен

$$Xdx+Ydy+Zdz=0dx+$$
$$+0dy-gdz=-gdz.$$

Правую часть уравнения (4.51) преобразуем, зная что перемещения соответственно равны: $dx=u_x dt$, $dy=u_y dt$, $d_z=u_z dt$, к следующему виду:

$$\frac{du_x}{dt}dx+\frac{du_y}{dt}dy+\frac{du_z}{dt}dz=$$
$$=\frac{du_x}{dt}u_x dt+\frac{du_y}{dt}u_y dt+$$
$$+\frac{du_z}{dt}u_z dt=u_x du_x+u_y du_y+u_z du_z=$$
$$=d\frac{u_x^2}{2}+d\frac{u_y^2}{2}+d\frac{u_z^2}{2}=$$
$$=d\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=d\left(\frac{u^2}{2}\right),$$

где u — местная скорость в живом сечении струйки.

Подставляя в уравнение (4.51) соответствующие значения трехчленов, запишем

$$-\frac{dp}{\rho}-gdz=d\frac{u^2}{2},$$

или

$$d\frac{u^2}{2}+\frac{dp}{\rho}+gdz=0. \qquad (4.52)$$

Если разделить все члены уравнения (4.52) на g (ускорение свободного падения), получим уравнение отнесенной к единице веса:

$$d\frac{u^2}{2g}+\frac{dp}{\rho g}+dz=$$
$$=d\left(\frac{u^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z\right)=0. \qquad (4.53)$$

После интегрирования запишем

$$\frac{u^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z=C. \qquad (4.54)$$

Выражение (4.54) было получено в 1738 г. академиком Российской Академии наук Д. Бернулли и называется *уравнением Д. Бернулли для элементарной струйки установившегося движения невязкой капельной жидкости.*

Зная, что удельный вес $\gamma=\rho g$, можно записать уравнение Д. Бернулли и в виде

$$\frac{u^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z=C. \qquad (4.55)$$

Отметим, что уравнение Д. Бернулли можно получить из интеграла Д. Бернулли (4.26)

$$-\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=C,$$

если элементарную струйку рассматривать как линию тока при потенциальном движении.

В данном случае потенциал сил можно расписать как

$$X = \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad Y = \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0,$$

$$Z = \frac{\partial \Pi}{\partial z} = -g,$$

тогда $\partial\Pi = -g\partial z$ или $\Pi = -gz + C$. И после некоторых преобразований интеграл Д. Бернулли принимает вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C,$$

$$\text{или } z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C.$$

Для вывода уравнения Д. Бернулли применительно к элементарной струйке вязкой жидкости рассмотрим его энергетический смысл (интерпретацию). С этой целью подсчитаем механическую энергию бесконечно малой частицы массой dm с центром в точке A, находящейся в пределах элементарной струйки (рис. 4.13), относительно горизонтальной плоскости сравнения $O_1 - O_1$.

Потенциальная энергия в соответствии с гл. 3

$$dE_п = gdm\left(z + \frac{p}{\rho g}\right).$$

Кинетическая энергия, как известно из физики,

$$dE_к = \frac{dmu^2}{2}.$$

Общая механическая энергия состоит из суммы потенциальной и кинетической энергий

$$dE = dE_п + dE_к = gdm\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) + \frac{dmu^2}{2}. \qquad (4.56)$$

Как отмечено в гл. 3, энергия, отнесенная к единице силы тяжести (веса жидкости) $\frac{dE}{gdm}$, называется *удельной*

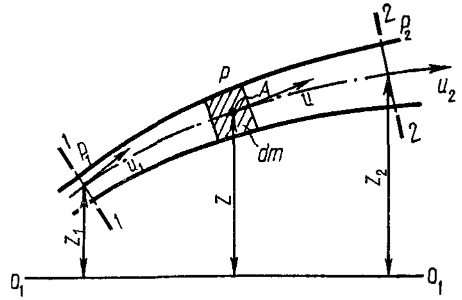

Рис. 4.13

энергией:

$$e = \frac{dE}{gdm} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}. \qquad (4.57)$$

Таким образом, зависимость (4.57) и есть уравнение Д. Бернулли, которое математически выражает закон сохранения энергии, открытый М. В. Ломоносовым: *вдоль элементарной струйки невязкой жидкости сумма потенциальной и кинетической энергий постоянная величина* (см. рис. 4.13):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \qquad (4.58)$$

Сумма $z + \frac{p}{\rho g}$ представляет собой часть удельной энергии — *удельную потенциальную энергию,* состоящую из удельной энергии положения z и удельной потенциальной энергии давления $\frac{p}{\rho g}$ (см. гл. 3). Выражение $\frac{u^2}{2g}$ называется *удельной кинетической энергией.* Вдоль элементарной струйки удельные потенциальная и кинетическая энергии могут изменяться, но их сумма остается постоянной.

При движении вязкой жидкости суммарная удельная энергия (потенциальная и кинетическая) движущейся жидкости вдоль струйки убывает в силу различных гидравлических сопротивле-

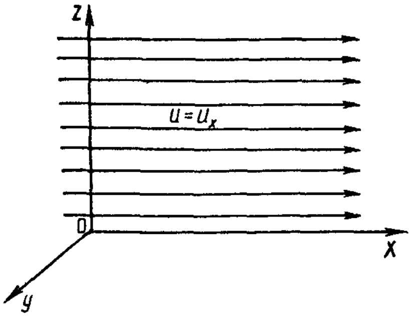

Рис. 4.14

ний. Следовательно, для элементарной струйки вязкой жидкости, находящейся в установившемся движении (рис. 4.13),

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \cdot \frac{u_1^2}{2g} > z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \tag{4.59}$$

Чтобы получить равенство левой и правой частей неравенства (4.59), необходимо в правой части добавить дополнительный член h_W, обозначающий *затрату удельной энергии на преодоление сопротивлений* при движении реальной (вязкой) жидкости в пределах между первым и вторым сечениями. В этом случае уравнение Д. Бернулли принимает вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_W \tag{4.60}$$

Затрачиваемая на преодоление гидравлических сопротивлений часть энергии превращается из механической в тепловую, причем этот процесс необратим. Он называется *диссипацией энергии*. В связи с этим можно считать h_W потерянной удельной энергией.

При выводе уравнения Д. Бернулли для потока вязкой жидкости необходимо предварительно рассмотреть две леммы: о распределении давления в плавноизменяющемся движении и о трех интегралах.

§ 4.9. Лемма о распределении гидродинамического давления в плавноизменяющемся движении

Как отмечено в 4.3, *плавноизменяющимся движением* называется такое, при котором кривизна линий тока незначительна, а угол расхождения между ними весьма мал.

Уравнения Эйлера для движения невязкой жидкости могут быть представлены в виде (4.15):

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt};\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt};\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned}\right\}$$

Рассмотрим плавноизменяющееся движение с почти прямолинейными линиями тока, практически параллельными оси x (рис. 4.14). Так как движение по осям y и z отсутствует, то имеется лишь одна составляющая скорости $u_x \approx u$, а по другим $u_y \approx 0$ и $u_z \approx 0$ и соответственно ускорения $\frac{du_y}{dt} \approx 0$ и $\frac{du_z}{dt} \approx$ ≈ 0. Подставляя эти значения в уравнения Эйлера (4.15), получим

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du}{dt};\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y &= 0;\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.61}$$

Первое уравнение системы (4.61) — уравнение движения, а два других — дифференциальные уравнения равновесия жидкости относительно осей y и z. Следовательно, в плоскости $y0z$, перпендикулярной направлению движения, *гидродинамическое давление распределяется по закону гидростатики*. Как видно, плоскость $y0z$ совпадает с живым сечением потока. В связи с этим спра-

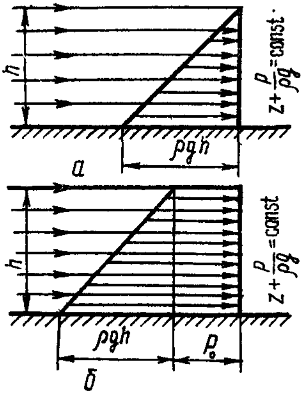

Рис. 4.15

ведливо условие

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const},$$

то есть сумма отметки z и пьезометрической высоты $\frac{p}{\rho g}$ при плавноизменяющемся движении для всех точек данного живого сечения остается одинаковой, хотя меняется для различных сечений. Таким образом, безразлично в какой точке живого сечения мы берем сумму $z + \frac{p}{\rho g}$, важно указать лишь то сечение, к которому относится эта сумма.

Одним из важнейших свойств такого движения является то, что *живое сечение потока является плоской поверхностью.*

Эпюры гидродинамического давления приведены на рис. 4.15 при безнапорном (рис. 4.15, *а*) и напорном (рис. 4.15, *б*) плавноизменяющемся движении.

§ 4.10. Лемма о трех интегралах (по Н. Н. Павловскому)

При выводе основных зависимостей для потока реальной (вязкой) жидкости необходимо знать три интеграла $\int\limits_\omega u d\omega$, $\int\limits_\omega u^2 d\omega$ и $\int\limits_\omega u^3 d\omega$.

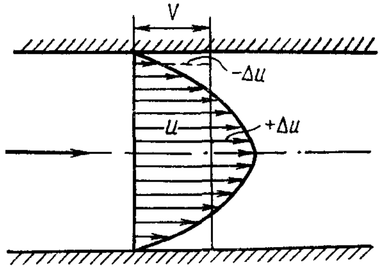

Рис. 4.16

В связи с тем, что распределение местных скоростей u в плоскости живого сечения неравномерно, а закон их распределения часто нельзя выразить в общем случае в аналитической форме, то определение указанных выше трех интегралов невозможно.

Выразим местную скорость u через среднюю скорость в живом сечении потока V (см. § 4.3) зависимостью

$$u = V + \Delta u, \tag{4.62}$$

где Δu — положительная или отрицательная добавка (рис. 4.16): при $u > V$ величина Δu положительная, а при $u < V$ — отрицательная; в тех точках, где $u = V$ величина Δu равна 0.

Рассмотрим первый интеграл $\int\limits_\omega u d\omega$.

Как показано в § 4.3, данный интеграл представляет собой действительный расход (4.10) и (4.11) для потока жидкости:

$$Q = \int\limits_\omega u d\omega \text{ и } Q = V\omega.$$

Рассмотрим $\int\limits_\omega u d\omega$, подставив вместо u выражение $(V + \Delta u)$, и получим

$$Q = \int\limits_\omega u d\omega = \int\limits_\omega (V + \Delta u)\, d\omega = \int\limits_\omega V d\omega + \int\limits_\omega \Delta u d\omega = V\int\limits_\omega d\omega + \int\limits_\omega \Delta u d\omega = V\omega + \int\limits_\omega \Delta u d\omega. \tag{4.63}$$

Так как, согласно (4.11), $Q = V\omega$, то

$$\int_\omega \Delta u d\omega = 0. \qquad (4.64)$$

Физический смысл $\int_\omega \Delta u d\omega = 0$ — это сумма положительных и отрицательных добавочных расходов, зависящих от знака величины Δu, действительно обеспечивающих сохранение расхода при введении понятия средней скорости.

Таким образом, *первый интеграл выражает собой расход потока.*

Рассмотрим второй интеграл $\int_\omega u^2 d\omega$ и, подставив вместо u выражение $(V + \Delta u)$, получим

$$\int_\omega u^2 d\omega = \int_\omega (V + \Delta u)^2 d\omega =$$

$$= \int_\omega V^2 d\omega + 2\int_\omega V\Delta u d\omega + \int_\omega (\Delta u)^2 d\omega =$$

$$= V^2 \int_\omega d\omega + 2V \int_\omega \Delta u d\omega + \int_\omega (\Delta u)^2 d\omega$$

Согласно условию (4.64)

$$\int_\omega \Delta u d\omega = 0, \text{ а } \int_\omega (\Delta u)^2 d\omega \neq 0,$$

так как значения $(\Delta u)^2$ всегда имеют знак плюс.

Тогда

$$\int_\omega u^2 d\omega = V^2\omega + \int_\omega (\Delta u)^2 d\omega =$$

$$= V^2\omega \left(1 + \frac{\int_\omega (\Delta u)^2 d\omega}{V^2\omega}\right).$$

Обозначим через η величину $\frac{\int_\omega (\Delta u)^2 d\omega}{V^2\omega} = \eta$ и тогда

$$\int_\omega u^2 d\omega = V^2\omega (1 + \eta) = \alpha_0 V^2\omega, \quad (4.65)$$

где $\alpha_0 = (1 + \eta)$ — коррестив α_0. Из (4.65) следует, что

$$\alpha_0 = \frac{\int_\omega u^2 d\omega}{V^2\omega}. \qquad (4.66)$$

Для определения физического смысла корректива α_0 подсчитаем количество движения потока по местной скорости (действительное) и по средней скорости.

Количество движения массы жидкости dm в элементарной струйке со скоростью u можно записать как $d\,(\mathrm{KD}) = udm$, но $dm = \rho u d\omega$ в единицу времени и тогда $d\,(\mathrm{KD}) = \rho u^2 d\omega$. Так как поток представляет собой совокупность элементарных струек, то есть их сумму, то количество движения для всего потока с учетом действительных (местных) скоростей после интегрирования составит

$$\mathrm{KD} = \rho \int_\omega u^2 d\omega.$$

Подсчитаем количество движения для того же потока жидкости по средней скорости V и тогда $(\mathrm{KD})_{\text{ср}} = VM$, но $M = \rho Q = \rho V\omega$, в единицу времени и поэтому $(\mathrm{KD})_{\text{ср}} = \rho V^2\omega$. Определим отношение KD и $(\mathrm{KD})_{\text{ср}}$

$$\frac{\mathrm{KD}}{(\mathrm{KD})_{\text{ср}}} = \frac{\rho\int_\omega u^2 d\omega}{\rho V^2\omega} = \frac{\int_\omega u^2 d\omega}{V^2\omega} = \alpha_0,$$

что соответствует зависимости (4.66).

Таким образом, корректив α_0 представляет собой отношение действительного количества движения потока к количеству движения, подсчитанному по средней скорости в живом сечении потока. Корректив α_0 называется *коэффициентом количества движения*, или *коэффициентом Буссинеска*, который отражает неравномерность распределения местных скоростей по живому сечению. Опытные исследования показывают, что корректив $\alpha_0 > 1$ и зависит от режима движения жидкости (см. § 5.2).

Следовательно, *второй интеграл выражает собой количество движения потока* за единицу времени, отнесенное к плотности жидкости ρ.

Рассмотрим т р е т и й и н т е г р а л $\int\limits_{\omega} u^3 d\omega$. Подставляя вместо u выражение $(V + \Delta u)$, получим

$$\int\limits_{\omega} u^2 d\omega = \int\limits_{\omega} (V + \Delta u)^3\, d\omega =$$

$$\int\limits_{\omega} V^3 d\omega + 3\int\limits_{\omega} V^2 \Delta u d\omega + 3\int\limits_{\omega} V(\Delta u)^2 d\omega +$$

$$+ \int\limits_{\omega} (\Delta u)^3 d\omega = V^3 \int\limits_{\omega} d\omega + 3V^2 \int\limits_{\omega} \Delta u d\omega +$$

$$+ 3V \int\limits_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega + \int\limits_{\omega} (\Delta u)^3 d\omega.$$

Согласно условию (4.64), $\int\limits_{\omega} \Delta u d\omega = 0$ и по аналогии $\int\limits_{\omega} (\Delta u)^3 d\omega = 0$, так как $(\Delta u)^3$ имеют разные знаки и больший порядок малости, а $\int\limits_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega \neq 0$, как отмечено выше.

Следовательно,

$$\int\limits_{\omega} u^3 d\omega = V^3\omega + 3V \int\limits_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega =$$

$$= V^3\omega \left(1 + \frac{3\int\limits_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega}{V^2\omega}\right).$$

В соответствии с предыдущим, величина $\eta = \frac{\int\limits_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega}{V^2\omega}$.

Тогда

$$\int\limits_{\omega} u^2 d\omega = V^3\omega(1 + 3\eta) = \alpha V^3\omega, \quad (4.67)$$

где $\alpha = 1 + 3\eta$ — корректив α, причем $\alpha > \alpha_0 > 1$.

Из (4.67)

$$\alpha = \frac{\int\limits_{\omega} u^3 d\omega}{V^3\omega}. \quad (4.68)$$

Для определения физического смысла корректива α подсчитаем кинетическую энергию потока по местным скоростям (действительную) и по средней скорости в живом сечении потока.

Кинетическую энергию массы жидкости dm в элементарной струйке со скоростью u можно записать как $d\,(\text{КЭ}) = \frac{dmu^2}{2}$, но $dm = \rho u d\omega$ в единицу времени и тогда $d\,(\text{КЭ}) = \frac{\rho}{2} u^3 d\omega$.

Так как поток представляет собой совокупность элементарных струек, то есть их сумму, то кинетическая энергия для всего потока с учетом действительных (местных) скоростей составит после интегрирования

$$\text{КЭ} = \frac{\rho}{2} \int\limits_{\omega} u^3 d\omega.$$

Подсчитаем кинетическую энергию для того же потока жидкости по средней скорости V. Тогда $(\text{КЭ})_{\text{ср}} = \frac{MV^2}{2}$, но $M = \rho Q = \rho V\omega$ в единицу времени и поэтому $(\text{КЭ})_{\text{ср}} = \frac{\rho V^3\omega}{2}$. Определим отношение КЭ и $(\text{КЭ})_{\text{ср}}$:

$$\frac{\text{КЭ}}{(\text{КЭ})_{\text{ср}}} = \frac{\rho 2 \int\limits_{\omega} u^3 d\omega}{2\rho V^3\omega} = \frac{\int\limits_{\omega} u^3 d\omega}{V^3\omega} = \alpha,$$

что соответствует зависимости (4.68).

Таким образом, корректив α представляет собой отношение действительной кинетической энергии потока к кинетической энергии, подсчитанной по средней скорости в живом сечении потока. Корректив α называется *коэффициентом кинетической энергии потока*, или *коэффициентом Кориолиса*, и отражает неравномерность распределения местных скоростей по живому сечению при

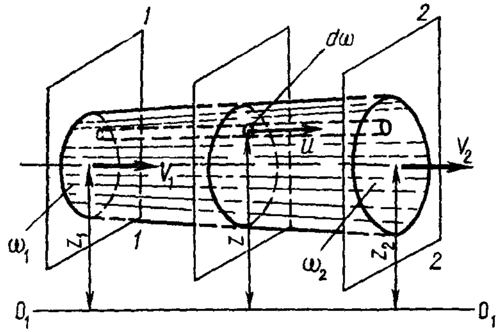

Рис 4 17

определении кинетической энергии потока.

Для наиболее распространенных случаев движения жидкости в трубопроводах и каналах (при так называемом турбулентном режиме движения — см. § 5.2) корректив $\alpha = 1{,}05...1{,}1$; иногда его приближенно принимают $\alpha \approx 1$. В то же время в ряде случаев движения жидкости при большой неравномерности распределения местной скорости в живом сечении потока коэффициент α может быть и значительно больше единицы (3—4 и более). Обычно α определяют по опытным данным.

Следовательно, *третий интеграл выражает собой кинетическую энергию потока за единицу времени, отнесенную к половине плотности жидкости* $\rho/2$.

§ 4.11. Уравнение Д. Бернулли для потока жидкости

Рассмотрим поток жидкости (рис. 4.17) при плавноизменяющемся установившемся движении. Выделим в нем элементарную струйку с площадью живого сечения $d\omega$ и скоростью u. Энергия жидкости, протекающей через живое сечение элементарной струйки, в соответствии с (4.56),

$$dE = gdm\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) + \frac{dmu^2}{2}.$$

Подставляя массу dm, прошедшую через сечение струйки за единицу времени $dm = \rho dQ = \rho u d\omega$, получим

$$dE = \rho g\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) u d\omega + \frac{\rho u^3 d\omega}{2}.$$

Тогда энергия для всего потока

$$F = \rho g \int\limits_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g}\right) u d\omega + \frac{\rho}{2} \int\limits_{\omega} u^3 d\omega$$

Согласно лемме о распределении гидродинамического давления в плавноизменяющемся движении величина $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$ является постоянной и ее можно вынести за знак интеграла:

$$E = \rho g\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) \int\limits_{\omega} u d\omega + \frac{\rho}{2} \int\limits_{\omega} u^3 d\omega$$

Согласно лемме о трех интегралах

$$\int\limits_{\omega} u d\omega = V\omega \quad \text{и} \quad \int\limits_{\omega} u^3 d\omega = \alpha V^3 \omega$$

Тогда энергия потока

$$E = \rho g V\omega\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) + \frac{\rho}{2}\alpha V^3 \omega$$

Переходя к энергии потока, отнесенной к единице веса по аналогии с элементарной струйкой каждый член уравнения необходимо разделить на $\rho g V\omega$ и тогда *удельная энергия потока*

$$e = \frac{E}{\rho g V \omega} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}.$$

Для сечений *1—1* и *2—2* (рис. 4.17) потока невязкой жидкости, то есть без учета потерь энергии $e_1 = e_2 = \text{const}$. Тогда

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g}. \tag{4 69}$$

Выражение (4.69) является *уравнением Д. Бернулли для потока невязкой жидкости* (без учета потерь энергии) при установившемся плавноизменяющемся движении и может быть записано в виде

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{\alpha V^2}{2g}=\text{const}. \quad (4.70)$$

При движении вязкой жидкости часть энергии потока расходуется на преодоление сил сопротивления между расчетными сечениями *1—1* и *2—2* (появляются силы трения между потоком и стенками русла, между частицами жидкости). Следовательно, удельная энергия $e_1 > e_2$ и в любом последующем сечении (по направлению движения) будет меньше, чем в предыдущем ($e_1 > e_2 > \ldots > e_n$). В этом случае выражение (4.69) запишется в виде

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha V_2^2}{2g}+h_{W_{1-2}}, \quad (4.71)$$

где $h_{W_{1-2}}$ — *затраты удельной энергии на преодоление сопротивлений* между сечениями *1—1* и *2—2*.

В общем случае уравнение (4.71) может быть записано с учетом потерь энергии h_W между расчетными сечениями в следующем виде:

$$z_2+\frac{p}{\rho g}+\frac{\alpha V^2}{2g}+h_W=\text{const}. \quad (4.72)$$

Выражения (4.71) и (4.72) называются *уравнением Д. Бернулли для потока вязкой (реальной) жидкости.*

Уравнение Д. Бернулли устанавливает связь между скоростью движения, давлением и геометрическим положением любой точки живого сечения потока, для которого оно написано.

Рассмотрим энергетическую и геометрическую интерпретации (толкования) уравнения Д. Бернулли.

Энергетическая интерпретация уравнения Д. Бериулли. С энергетической точки зрения уравнение Д. Бернулли выражает закон сохранения энергии и представляет удельную энергию, отнесенную к единице веса жидкости и подсчитанную относительно произвольно выбранной горизонтальной плоскости (плоскости сравнения). Такая удельная энергия потока

$$e=z+\frac{p}{\rho g}+\frac{\alpha V^2}{2g}+h_W$$

состоит из *удельной потенциальной энергии* $z+\frac{p}{\rho g}$, где z — *энергия положения*, а $\frac{p}{\rho g}$ — *энергия давления и удельной кинетической энергии потока* $\frac{\alpha V^2}{2g}$. С энергетической точки зрения затраты (потери) энергии h_W на преодоление сопротивлений являются диссипацией (рассеиванием) энергии. Это означает, что при движении жидкости часть механической энергии переходит безвозвратно в тепловую энергию, то есть для потока теряется.

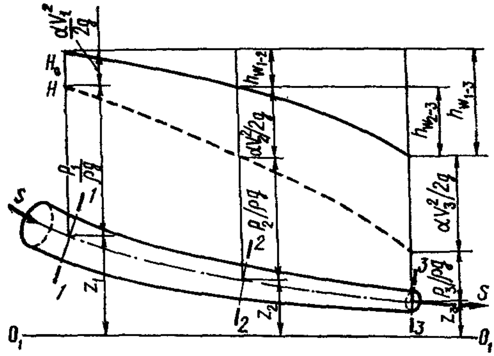

Рис. 4.18

Геометрический смысл уравнения Д. Бернулли (рис. 4.18). В уравнение Д. Бернулли входят следующие линейные величины: z — геометрическая высота положения (геометрический напор), или отметка точки от плоскости сравнения $O_1 - O_1$; $\frac{p}{\rho g}=\frac{p}{\gamma}$ — пьезометрическая высота, отвечающая гидродинамическому давлению p; сумма $z+\frac{p}{\rho g}=H$ в каждом сечении называется *пьезометри-*

ческим (при $p = p_{изб}$), или *гидростатическим, напором*, $\frac{\alpha V^2}{2g}$ — *скоростной напор;* сумма $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g} = H_0$ называется *гидродинамическим, или полным, напором,* который можно выразить уравнением

$$H_0 = H + \frac{\alpha V^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}, \tag{4.73}$$

h_W — потеря напора на преодоление сопротивлений.

Геометрическое место точек верхних концов отрезков суммы $z + \frac{p}{\rho g}$ называется *пьезометрической линией* (на рис. 4.18 показана штриховой линией). Изменение пьезометрической линии $z + \frac{p}{\rho g}$ на единицу длины, то есть $-\frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) = i_p$ (где dl — бесконечно малый отрезок пути вдоль движения) называется *пьезометрическим уклоном*. Отметки пьезометрической линии по длине могут уменьшаться $\frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) < 0$ или увеличиваться $\frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) > 0$. Пьезометрический уклон считается положительным, если по течению жидкости пьезометрическая линия понижается.

Средний пьезометрический уклон i_p на участке между сечениями (например, между *1—1* и *2—2*) может быть выражен зависимостью

$$i_p = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)}{l_{1-2}}. \tag{4.74}$$

Геометрическое место точек верхних концов отрезков суммы $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}$ называется *напорной линией, или линией удельной энергии* на (рис. 4.18 показана сплошной линией), которая для потока невязкой жидкости (без учета потерь энергии), согласно (4.70), горизонтальна. При движении вязкой жидкости изменение напорной линии на единицу длины называется *гидравлическим уклоном:*

$$I_l = -\frac{dH_0}{dl} = -\frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}\right).$$

Так как приращение dH_0 всегда отрицательно (гидродинамический напор уменьшается вдоль движения), то гидравлический уклон всегда положительный.

Средний гидравлический уклон i_l на участке между сечениями (например, между *1—1* и *2—2*) может быть выражен зависимостью

$$i_e = \frac{h_{W_{1-2}}}{l_{1-2}} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_0^2}{2g}\right)}{l_{1-2}}. \tag{4.75}$$

В общем случае потери напора h_W могут происходить при уменьшении всех или некоторых величин, входящих в уравнение (4.73). Иногда потери вызываются изменением отдельных величин. Например, для напорных водопроводных труб, диаметры которых на практике обычно постоянны, и, следовательно, скорость в них постоянна, потери напора происходят за счет уменьшения пьезометрического напора $H = z + \frac{p}{\rho g}$. В горизонтальных трубопроводах потери напора происходят за счет уменьшения давления p. В безнапорных трубах, в открытых каналах при равномерном движении потери энергии вызываются уменьшением z, а при неравномерном движении также изменением средней скорости в живом сечении потока V.

Уравнение Д. Бернулли имеет следующие условия применимости:

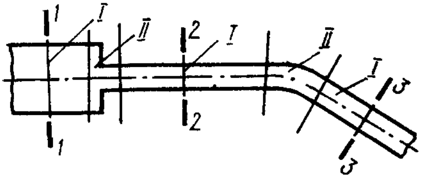

Рис. 4.19

движение жидкости должно быть установившимся;

уравнение справедливо для всего потенциального потока в целом, в том числе и для каждой линии тока;

уравнение справедливо и для вихревого движения, но только для каждой отдельной линии тока или вихревой линии;

при винтовом движении, когда частицы жидкости движутся вдоль линий тока и вращаются вокруг них, уравнение Д. Бернулли применимо к любой точке жидкости, то есть для всего винтового потока;

уравнение справедливо только для сечений с плавноизменяющимся движением, хотя между ними движение может быть и резкоизменяющимся; на рис. 4.19 показаны участки плавноизменяющегося (*I*) и резкоизменяющегося (*II*) движений, а также сечения *1—1*, *2—2* и *3—3*, для которых можно записать уравнение Д. Бернулли;

уравнение записывается для сечения потока, но значения z и $p/\rho q$ берутся для одной и той же точки.

уравнение можно применять для любых живых сечений потока и его точек, но лучше для тех, где число неизвестных наименьшее;

уравнение, как правило, используется совместно с уравнением неразрывности или сплошности движения (см. 4.5).

§ 4.12. Примеры практического применения уравнения Д. Бернулли

Уравнение Д. Бернулли является основным уравнением гидродинамики, с его помощью выводятся расчетные

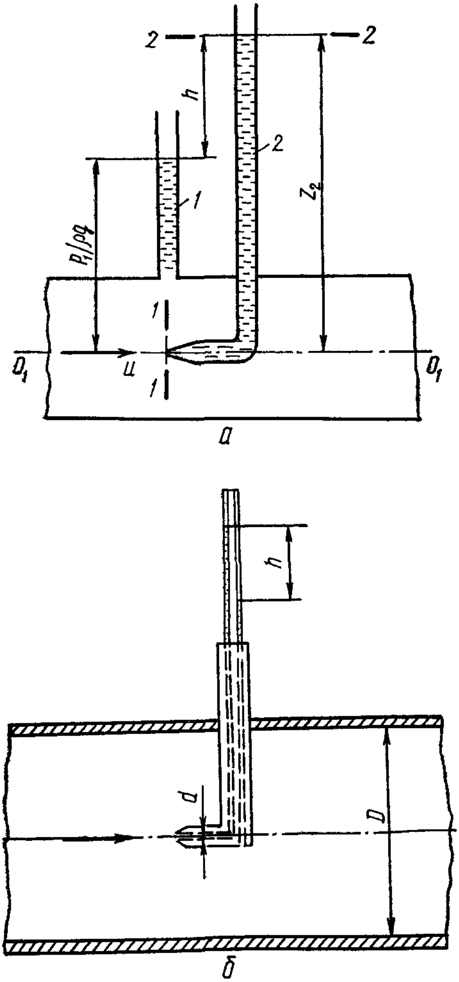

Рис. 4.20

формулы для различных случаев движения жидкости и решается много практических задач.

Для измерения скорости применяется специальная гидродинамическая трубка *2*, которая называется *трубкой Пито* (рис. 4.20, *а*). Эта трубка помещается в измеряемой точке потока жидкости изогнутым концом против течения и работает в комплексе с обыкновенным пьезометром *1*. В связи с набеганием

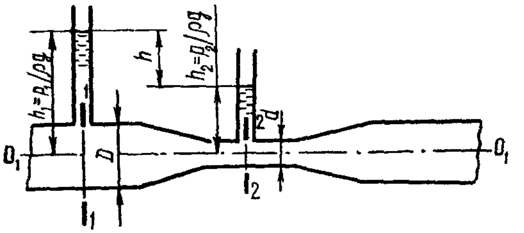

Рис. 4.21

жидкости на отверстие трубки Пито *2*, то есть под воздействием скоростного напора, вода в ней поднимается на бо́льшую высоту, чем в пьезометре *1*. Проведем плоскость сравнения через центр отверстия в изогнутом конце трубки. На рис. 4.20, *а* показан горизонтальный след плоскости сравнения $O_1 — O_1$. Выберем два сечения: *1—1* — перед входом в трубку, и *2—2* — на поверхности воды в трубке, и запишем для них уравнение Д. Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Так как в трубке Пито вода не движется, потери энергии в уравнении Д. Бернулли учитывать не надо. Это уравнение записано в форме для элементарной струйки, так как трубкой измеряется местная скорость в точке, в которой она установлена. В данном случае $z_1 = 0$, $u_1 = u$, $u_2 = 0$ (поскольку в трубке вода не движется), манометрическое давление на поверхности жидкости в трубке $p_2 = 0$ и тогда $\frac{p_1}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = z_2$.

Как видно из чертежа, $z_2 - \frac{p_1}{\rho g} = h$, где h — разность показаний отметок воды в трубках, и поэтому

$$u = \sqrt{2gh}. \qquad (4.76)$$

Для удобства пользования трубку Пито и пьезометр объединяют конструктивно в одном корпусе (рис. 4.20, *б*). Такая трубка, называемая *трубкой Пито — Прандтля* выполняется небольшого диаметра и с обтекаемым носиком, но и в этом случае она вносит некоторое возмущение в поток. Поэтому обычно полученное значение скорости по формуле (4.76) умножают на тарировочный коэффициент φ, определяемый опытным путем. Для заводских трубок $\varphi = 1...1{,}04$.

Расход воды в трубопроводах обычно определяют с помощью *пьезометрического водомера*, или *расходомера Вентури* (рис. 4.21), представляющего собой вставку в основную трубу диаметром D трубы меньшего диаметра d с плавным входом и выходом. В суженной части скорость увеличивается, а давление уменьшается, по сравнению с основной трубой.

Плоскость сравнения $O_1 — O_1$ выбираем по оси трубы, а сечения *1—1* и *2—2* до сужения и в суженной части. Для этих сечений уравнение Д. Бернулли может быть представлено в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_{W_{1-2}}.$$

Потерями энергии $h_{W_{1-2}}$ пренебрегаем ввиду малости расстояния между сечениями и плавности сужения. Для горизонтальной трубы ($z_1 = z_2$) принимаем коэффициент $\alpha = 1$. Тогда

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g},$$

или

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}.$$

Используя уравнение неразрывности (4.30), можно записать, что $V_1\omega_1 = V_2\omega_2$, где $\omega_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ и $\omega_2 = \frac{\pi d^2}{4}$. Тогда

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d^2}{D^2}.$$

Показания пьезометров $h_1 = \frac{p_1}{\rho g}$, $h_2 = \frac{p_2}{\rho g}$ и, следовательно,

$$h = h_1 - h_2 = \frac{V_2^2}{2g}\left(1 - \frac{V_1^2}{V_2^2}\right) = \frac{V_2^2}{2g}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

Зная, что $V_2 = \frac{Q}{\omega_2}$, можно записать

$$h = \frac{Q^2}{2g\omega_2^2}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right),$$

а искомая величина

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{d^4}{D^4}}}. \qquad (4.77)$$

Фактический расход будет несколько меньше теоретического (4.77) вследствие потерь энергии и может быть представлен зависимостью

$$Q = \mu\frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{d^4}{D^4}}}, \qquad (4.78)$$

где μ — тарировочный коэффициент, значение которого обычно принимают $\mu = 0{,}95...0{,}97$.

С помощью уравнения Д. Бернулли можно определить *предельную высоту расположения оси центробежного насоса* $h_{нас}$ *над уровнем воды в колодце* (рис. 4.22), зная расход насоса Q, диаметр всасывающей трубы d, предельно допускаемый вакуум, создаваемый насосом $\frac{p_{вак}}{\rho d}$, и потери напора во всасывающей трубе h_W.

Запишем уравнение Д. Бернулли для свободной поверхности воды в колодце 0—0 и сечении 1—1 всасывающей трубы перед входом в насос, принимая за плоскость сравнения O_1—O_1 сечение 0—0:

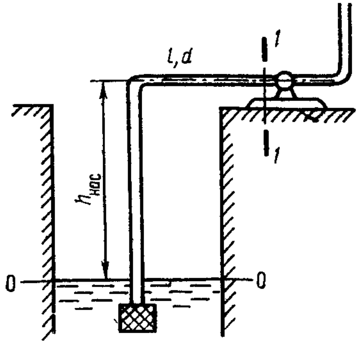

Рис. 4.22

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha V_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} + h_{W_{0-1}}.$$

В данном случае $z_0 = 0$, $p_0 = p_a$, $z_1 = h_{нас}$, и тогда

$$0 + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha V_0^2}{2g} = h_{нас} + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} + h_{W_{0-1}}.$$

Величина $\frac{\alpha V_0^2}{2g}$ очень мала, так как скорость движения (опускание поверхности) воды в колодце V_0 незначительна и поэтому ею без ущерба для точности расчета можно пренебречь. И тогда $V_1 = V$. Искомая величина

$$h_{нас} = \frac{p_a}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} - \frac{\alpha V^2}{2g} - h_{W_{0-1}}.$$

Отметим, что разность $\frac{p_a}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}$ есть вакуум в сечении 1—1, то есть величина $\frac{p_{вак}}{\rho g}$, которая известна. Поэтому

$$h_{нас} = \frac{p_{вак}}{\rho g} - \frac{\alpha V^2}{2g} - h_W. \qquad (4.79)$$

Зависимость (4.79) — *основная формула для определения высоты располо-*

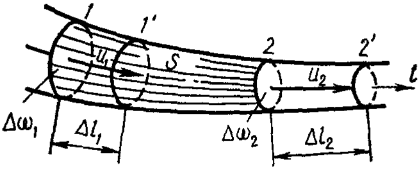

Рис 4 23

жения центробежного насоса. Скорость V всегда известна, так как

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q\ 4}{\pi d^2}.$$

Следует отметить, что в общем случае потери энергии (напора) h_W зависят от многих факторов и решать уравнение Д. Бернулли (4.71) можно только после установления для различных случаев зависимостей для h_W (гл. 5).

§ 4.13. Уравнение количества движения для установившегося потока

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек формулируется следующим образом. *Производная от количества движения системы* K *по времени равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему:*

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F. \qquad (4\ 80)$$

Как показал Л. Эйлер, при установившемся движении несжимаемой жидкости *изменение количества движения* выделенной системы за время Δt может быть заменено *изменением количества движения* жидкости, протекающей за тот же промежуток времени между двумя сечениями.

Рассмотрим схему элементарной струйки (рис. 4.23) в объеме *1—2*. Для установившегося движения при перемещении объема *1—2* достаточно рассмотреть изменение характеристик элементарных объемов *1—1'* и *2—2'*. В соответствии с условием сплошности дви-

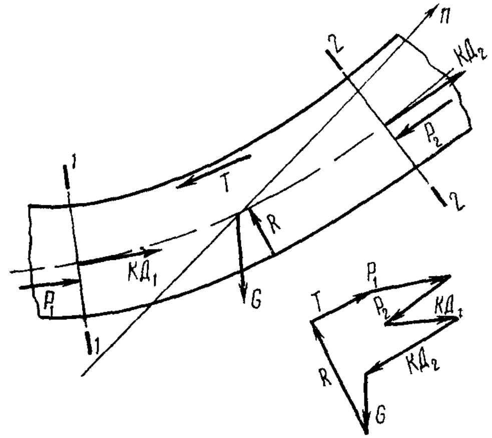

Рис 4 24

жения массы этих элементарных объемов одинаковы. Изменение проекции количества движения на ось струйки за единицу времени при перемещении объема *1—2* может быть представлено разностью $\frac{\Delta m}{\Delta t}(u_2 - u_1)$ или для несжимаемой жидкости

$$\rho\,\frac{(\Delta\omega_2 \Delta l_2 u_2 - \Delta\omega_1 \Delta l_1 u_1)}{\Delta t}$$

Учитывая, что $\Delta l_1 = u_1 \Delta t$ и $\Delta l_2 = u_2 \Delta t$, можно записать

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}(u_2 - u_1) = \rho\,(u_2^2 \Delta\omega_2 - u_1^2 \Delta\omega_1)$$

Это выражение представляет собой *изменение секундного количества движения жидкости,* проходящей через сечения $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$.

Рассмотрим поток жидкости, ограниченный стенками произвольной формы (рис. 4.14, *а*) в объеме между сечениями *1—1* и *2—2*, с осью l и произвольным направлением n. Секундное количество движения KD массы жидкости, проходящей через данное живое сечение потока, может быть записано в соответствии с (4.66) в виде

$$KD = \rho \int_{\omega} u^2 d\omega,$$

или через среднюю скорость в живом сечении потока

$$KD = \alpha_0 \rho V^2 \omega.$$

Для плавноизменяющегося движения, где живое сечение (см. § 4.9) считается плоским, направление вектора KD совпадает с направлением местных скоростей и оси потока l.

На данный объем жидкости действуют внешние силы: гидродинамического давления P в сечениях *1—1* и *2—2*, тяжести $G = mg$ объема жидкости, ограниченного стенками, реакции боковых стенок на жидкость R, трения T (для вязкой жидкости). Векторы всех указанных сил и KD образуют замкнутый многоугольник (см. рис. 4.24, *б*).

Закон количества движения в проекциях на заданное направление n для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$\alpha_{01}\rho V_1^2 \omega_1 \cos(l, n) - \alpha_{02}\rho V_2^2 \omega_2 \cos(l, n) = P_{n_1} + P_{n_2} + R_n + G_n + T_n. \quad (4.81)$$

В общем случае знаки составляющих сил зависят от конкретных условий и направления n.

Важная особенность закона количества движения — исключение из рассмотрения внутренних сил, действующих в жидкости в ограниченном объеме, что дает возможность применять этот закон для решения ряда задач инженерной гидравлики.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается сущность гидродинамики, кинематики и динамики жидкости?
2. Местная скорость, ее полная производная н составляющие.
3. Виды перемещения, деформации и вращения частицы жидкости, компоненты местиой скорости.
4. Линия тока, элементарная струйка. Вихревая линия и вихревая трубка.
5. Два метода изучения движения жидкости (Лагранжа и Эйлера).
6. Поток жидкости, живое сечение струйки и потока, расход и средняя скорость, смоченный периметр, гидравлический радиус.
7. Безнапорные и напорные потоки, гидравлические струи. Неустановнвшееся, установившееся, неравномерное, равномерное, плавноизменяющееся и резкоизменяющееся движение.
8. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости в обычном и развернутом виде (уравнения Эйлера для движения).
9. Уравнения Громека — Ламба для безвихревого движения.
10. Потенциал скорости F и его частные пронзводные.
11. Интегралы Лагранжа и Эйлера.
12. Уравнение неразрывности или сплошности движения для частицы жидкости, элементарной струйки и потока жидкости.
13. Особенности потенциального движения, уравиение Лапласа. Функция тока. Уравиение линии тока. Гидродинамическая сетка движения.
14. Примеры плоских потенциальных движений жидкости.
15. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки установившегося движения и его энергетическая интерпретация.
16. Лемма о распределении гидродинамнческого давления в плавноизменяющемся движении.
17. Лемма о трех интегралах, коэффициенты количества движения α_0 и кинетической энергии потока α, их физический смысл.
18. Уравнение Д. Бернулли для потока иевязкой и вязкой жидкости.
19. Энергетнческая интерпретация уравнения Д. Бернулли для потока вязкой жидкости.
20. Геометрическая интерпретация уравнения Д. Бернулли для потока вязкой жидкости (геометрический, пьезометрический, гидростатический, скоростной и гидродннамический напоры, пьезометрические линии и уклоны, линия удельпой энергии и гидравлический уклон).
21. Условия применимости уравнения Д. Бернулли.
22. Примеры практического применения уравнения Д. Бернулли (трубка Пито, расходомер Вентури, предельная высота расположения осн центробежного насоса).
23. Уравнение количества движения для установившегося потока.