со стенкой и самой стенкой капилляра (для воды и стекла $\theta \approx 0°$, для ртути и стекла $\theta \approx 50°$).

При температуре 20°С в трубке диаметром d высота капиллярного поднятия для воды, спирта и ртути соответственно равна $30/d$, $10/d$ и $10{,}15/d$ мм.

Глава 2. ГИДРОСТАТИКА

2.1. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Общие сведения. Раздел гидравлики, рассматривающий законы равновесия жидкости и их практические приложения, называется гидростатикой.

Рассмотрим некоторый объем жидкости, находящейся в равновесии (рис. 1.1). Мысленно разделим этот объем плоскостью A—B на две части и удалим верхнюю часть, заменив ее действие суммарной силой гидростатического давления P, эквивалентной действию верхней отброшенной части на нижнюю. Если эту гидростатическую силу P равномерно распределить по площади ω, то получим среднее гидростатическое давление на площади ω:

$$p_{ср} = P/\omega. \tag{1.11}$$

Выделим на плоскости A—B элементарную площадку $\Delta\omega$, на которую будет приходиться некоторая сила ΔP. Если будем уменьшать площадку $\Delta\omega$ таким образом, чтобы ее площадь

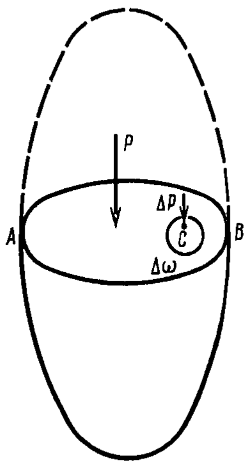

Рис. 1.1. К определению понятия среднего гидростатического давления.

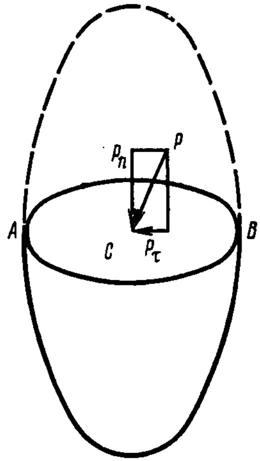

Рис. 1.2. Схема к доказательству первого свойства гидростатического давления.

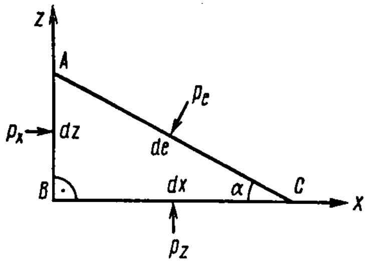

Рис. 1.3. Схема к доказательству второго свойства гидростатического давления.

стремилась к нулю, то предел отношения ΔP к площади $\Delta\omega$ будет называться гидростатическим давлением в данной точке C:

$$p = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}. \qquad (1.12)$$

Гидростатическое давление характеризуется тремя основными свойствами.

Первое свойство. *Гидростатическое давление направлено всегда по внутренней нормали к поверхности, на которую оно действует.*

Рассмотрим силу гидростатического давления P, приложенную в точке C под углом к поверхности A—B объема жидкости, находящегося в покое (рис. 1.2). Тогда эту силу можно разложить на две составляющие: нормальную P_n и касательную P_τ к поверхности A—B. Касательная составляющая — это равнодействующая сил трения, приходящихся на выделенную поверхность вокруг точки C. Но так как жидкость находится в покое, то силы трения отсутствуют, т. е. $P_\tau = 0$.

Следовательно, сила гидростатического давления P в точке C действует лишь в направлении силы P_n, т. е. нормально к поверхности A—B. Причем направлена она только по внутренней нормали. При предположении направления силы гидростатического давления по внешней нормали возникнут растягивающие усилия, что приведет жидкость в движение. А это противоречит условию. Таким образом, сила гидростатического давления всегда сжимающая, т. е. направлена по внутренней нормали.

Второе свойство. *Гидростатическое давление в любой точке жидкости действует одинаково по всем направлениям* (рис. 1.3).

Для доказательства этого свойства выделим в жидкости, находящейся в равновесии, частицу в форме треугольной призмы с основанием в виде прямоугольного треугольника A—B—C. Заменим действие жидкости вне призмы на ее боковые грани (вертикальную A—B, горизонтальную B—C и наклонную под любым углом α A—C) гидростатическим давлением соответственно p_x, p_z, p_e. Кроме этих сил на призму действует сила тяжести dG, равная весу призмы $\gamma dz dx/2$. Так как частица жидкости находится в равновесии, в покое, то сумма проекций всех сил, приложенных к ней, на любое направление равна нулю, т. е.

$$\sum x = 0; \quad p_x dz - p_e de \sin\alpha = 0; \qquad (1.13)$$

$$\sum z = 0; \quad p_z dx - p_e de \cos\alpha - \gamma dz dx/2 = 0.$$

Подставляя $dz=de\sin\alpha$ и $dx=de\cos\alpha$ в уравнения (1.13), получим

$$p_x=p_e \quad \text{и} \quad p_z=p_e+\gamma dz/2. \tag{1.14}$$

Если теперь грани призмы будут бесконечно уменьшаться и в пределе превратятся в точку, то мы получим гидростатическое давление в одной и той же точке, но в разных направлениях, т. е.

$$p_x=p_z=p_e. \tag{1.15}$$

Следовательно, гидростатическое давление на наклонную грань p_e одинаково по величине с гидростатическим давлением на вертикальную и горизонтальную грани. Так как угол наклона грани α взят произвольно, то можно утверждать, что гидростатическое давление в любой точке жидкости действует одинаково по всем направлениям.

Третье свойство. *Гидростатическое давление в точке зависит только от ее координат в пространстве, т. е.*

$$p=f(x,y,z). \tag{1.16}$$

Это свойство не требует специального доказательства, так как очевидно, что по мере увеличения заглубления точки под уровень давление в ней будет возрастать и, наоборот, по мере уменьшения заглубления — уменьшаться.

2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА)

Выделим в жидкости, находящейся в равновесии, объем бесконечно малой величины в виде параллелепипеда с ребрами dx, dy и dz (рис. 1.4). Заменим действие жидкости вне параллелепипеда на его грани соответствующим гидростатическим давлением.

Составим сумму проекций всех внешних сил на координатные оси, рассматривая прежде всего проекции всех сил на ось OX. Предположим, что гидростатическое давление в точке A с координатами x, y, z будет p, проекции ускорения объемных сил в той же точке X, Y, Z и плотность ρ. Тогда гидростатическое давление в точке B, лежащей на линии $A — B$ на расстоянии dx вправо от точки A, изменится на dp и будет равно:

$$p_1=f(x+dx,y,z)=f(x,y,z)+\frac{df(x,y,z)}{\partial x}dx=p+\frac{\partial p}{\partial x}\partial x, \tag{1.17}$$

где $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ — частный дифференциал, взятый по координате x.

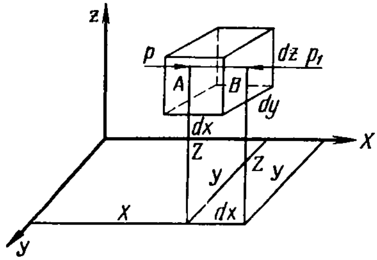

Рис. 1.4. К выводу уравнения (1.23).

Тогда сила давления на левую грань параллелепипеда равна гидростатическому давлению в одной из точек этой грани (в данном случае в точке A), умноженному на площадь грани:

$$P = p\,dy\,dz, \qquad (1.18)$$

а на правую грань

$$P_1 = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz. \qquad (1.19)$$

Сила давления, действующая на левую грань, направлена по оси OX, т. е. положительна; сила давления, действующая на правую грань, направлена в обратную сторону, т. е. отрицательна.

Проекция объемных сил на ось OX

$$\rho\,dx\,dy\,dz\,X, \qquad (1.20)$$

где $\rho dxdydz$ — масса взятого параллелепипеда.

Суммируя проекции всех действующих на параллелепипед сил на ось X и приравнивая эту сумму 0, получим:

$$p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz + \rho\,dx\,dy\,dz\,X = 0, \qquad (1.21)$$

откуда

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \qquad (1.22)$$

По аналогии с этим можно получить подобные уравнения для осей Y и Z. Тогда

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$
$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \qquad (1.23)$$
$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Это дифференциальные уравнения равновесия жидкости, выведенные Л. Эйлером в 1755 г.

2

2.3. ПОВЕРХНОСТИ РАВНОГО ДАВЛЕНИЯ

Основные сведения. Для нахождения величины давления p по его трем частным производным по координатам умножим уравнения (1.23) соответственно на dx, dy, dz и сложим:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho(Xdx+Ydy+Zdz). \quad (1.24)$$

Левая часть полученного уравнения (1.24) представляет собой полный дифференциал dp, так как гидростатическое давление — это лишь функция координат x, y, z, т. е.

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz). \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) называется *основным уравнением гидростатического давления в дифференциальной форме.*

В правой части уравнения (1.25) выражение в скобках — также полный дифференциал некоторой потенциальной функции $\Pi(x, y, z)$, частные производные которой по координатам x, y, z соответственно равны проекциям единичных массовых сил $X\cdot 1$, $Y\cdot 1$, $Z\cdot 1$. Уравнение (1.25) можно переписать в следующем виде:

$$dp=\rho\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Pi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Pi}{\partial z}dz\right), \quad (1.26)$$

или

$$dp=\rho d\Pi. \quad (1.26')$$

Интегрируя уравнение (1.26′), получим:

$$p=\rho\Pi+C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Для поверхности равного давления из уравнения (1.25) при $p=\text{const}$, $\rho\neq 0$ найдем $dp=0$ и тогда

$$Xdx+Ydy+Zdz=0. \quad (1.27)$$

Это уравнение называется уравнением *поверхности жидкости равного или постоянного давления.* Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

Первый случай, когда на покоящуюся жидкость действует одна внешняя сила, сила тяжести, тогда $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$ (направление ускорения свободного падения не совпадает с положительным направлением оси Z). В этом случае уравнение (1.27) имеет вид

$$-gdz=0 \quad \text{или} \quad Z=C=\text{const},$$

т. е. получаем поверхности равного давления, представляющие собой семейство горизонтальных плоскостей. Каждому значению C соответствует плоскость, точки которой имеют определенное постоянное значение давления. Свободная поверхность жидкости (для ограниченного объема) в данном случае — одна из плоскостей равного давления. Имеем в виду, что свободная поверхность — это поверхность на границе жидкой и газообразной сред. На свободную поверхность будет приложено постоянное давление, равное атмосферному.

Уравнение (1.25) для жидкости, находящейся под действием силы тяжести, запишется таким образом:

$$dp = -\rho g dz,$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{p}{\rho g} + Z = C = \text{const}. \tag{1.28}$$

Выражение (1.28) называется *основным уравнением гидростатики.*

Если жидкость находится в закрытом сосуде, передвигающемся по вертикали с ускорением a, то проекции ускорений массовых сил в этом случае будут равны:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = a - g,$$

а уравнение (1.25) будет иметь вид

$$dp = (a - g)\, dz,$$

интегрируя которое, получим

$$p = \rho (a - g) Z + C$$

при

$$Z = 0,\ p = p_0 = C.$$

С учетом погружения точки от поверхности на глубину $h = -Z$ получим выражение

$$p = p_0 + \rho (g - a) h. \tag{1.29}$$

При движении сосуда с жидкостью вниз с ускорением или вверх с замедлением ускорение a силы инерции будет уменьшать действие ускорения свободного падения g и давление в жидкости будет меньше, чем в сосуде с жидкостью, находящемся в состоянии покоя. При $a = g$ жидкость станет невесомой, т. е. во всех точках жидкости $p = p_0$.

При движении сосуда с жидкостью вниз с замедлением, а вверх с ускорением величина a будет отрицательна и давление в жидкости будет больше, чем в неподвижном резервуаре, т. е.

$$p = p_0 + \rho (g + a) h. \tag{1.30}$$

Второй случай, когда поверхность равного давления может быть наклонной. Например, свободная поверхность бензина в железнодорожной цистерне, движущейся горизонтально с ускорением a (рис. 1.5). В этом случае единичная масса жидкости находится под действием силы тяжести $Z = -1 \cdot g$ и горизонталь-

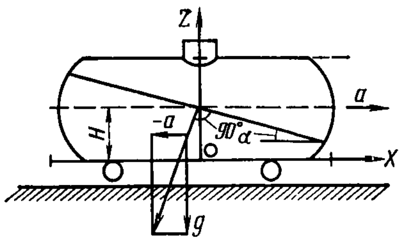

Рис. 1.5. Железнодорожная цистерна, движущаяся горизонтально с ускорением a.

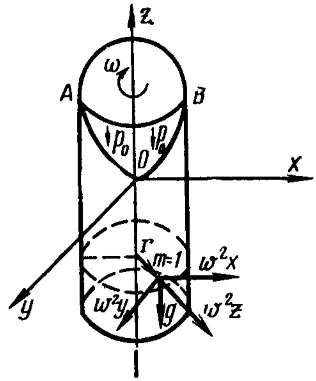

Рис. 1.6. Цилиндрический сосуд, вращающийся относительно вертикальной оси OZ.

ного ускорения силы инерции $X=-1\cdot a$ (к цистерне приложена сила с ускорением a, а к жидкости — такая же по величине сила инерции с ускорением $-a$).

Составляющие массовых сил в уравнении (1.27) получают значения:

$$X=-a;\quad Y=0;\quad Z=-g,$$

а уравнение свободной поверхности примет вид

$$-adx-gdz=0 \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{g}=\text{const}. \tag{1.31}$$

После интегрирования уравнения (1.31) получим

$$-ax-gz=C.$$

При $x=0$; $z=H$; $C=-gH$, тогда

$$Z=H-\frac{a}{g}x. \tag{1.32}$$

Из вышеизложенного следует, что свободная поверхность бензина в цистерне представляет собой плоскость с углом наклона $\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{g}\right)$. Уравнение (1.25) в этом случае примет вид

$$dp=-\rho(adx+gdz).$$

После интегрирования получим зависимость распределения давления в любой точке цистерны с бензином:

$$p=-\rho ax-\rho gz+C$$

при $x=0$; $z=0$; $C=p_0=\rho gH$ и тогда

$$p=\rho gH-\rho ax-\rho gz=\rho[g(H-z)-ax]. \quad (1.33)$$

Из выражения (1.33) следует, что наибольшее давление будет в точке $z=0$ и максимальным отрицательным значением x.

Третий случай, когда жидкость находится в открытом цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг его вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1.6). В этом случае на частицу жидкости массой $m=1$ действуют сила тяжести $G=-1g$, параллельная оси z, и центробежная сила $F=1\cdot v^2/r=(\omega_r)^2/r=\omega^2 r$, перпендикулярная к оси z.

Определим проекции составляющих равнодействующей массовых сил X, Y, Z на оси x, y, z:

$$\begin{aligned} X&=\omega^2 r\cos(\widehat{r,x})=\omega^2 r\frac{x}{r}=\omega^2 x;\\ Y&=\omega^2 r\cos(\widehat{r,y})=\omega^2 r\frac{y}{r}=\omega^2 y;\\ Z&=-g. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Подставляя эти величины в уравнение (1.25), получим

$$dp=\rho(\omega^2 x dx+\omega^2 y dy-g dz).$$

Интегрируя это выражение, будем иметь

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2}+\frac{\omega^2 y^2}{2}-gz\right)+C,$$

или

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right)+C,$$

где $r^2=x^2+y^2$.

При $x=y=z=0$, $p=0$ и $C=0$

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right). \quad (1.35)$$

Из уравнения (1.35) видно, что при вращении сосуда наибольшее давление будет в точках у дна и на боковых стенках сосуда.

Уравнение свободной поверхности можно получить при $p=0$ из выражения (1.35):

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad (1.36)$$

т. к. $\rho\neq 0$.

Кривая $A—O—B$ — это парабола, а свободная поверхность жидкости — параболоид вращения. Такую же форму имеют и другие поверхности равного давления.

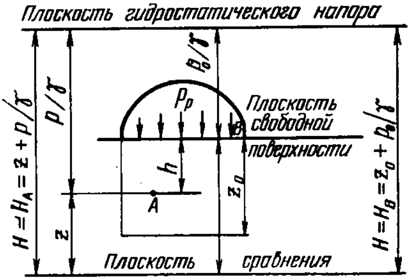

Рис. 1.7. Схема к основному уравнению гидростатики.

2.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ГИДРОСТАТИКИ

Рассмотрим уравнение (1.28) более подробно. Заменив в нем $\rho g=\gamma$ и найдя постоянную интегрирования $C=\frac{p}{\gamma}+z_0$ при $p=p_0$ и $z=z_0$ (для точки B, лежащей на поверхности), получим основное уравнение гидростатики для точек A и B в несколько ином виде (рис. 1.7):

$$z+\frac{p}{\gamma}=z_0+\frac{p_0}{\gamma} \tag{1.37}$$

или

$$p=p_0+\gamma(z_0-z). \tag{1.37'}$$

С учетом глубины погружения точки A под уровень свободной поверхности $h=z_0-z$, получим наиболее часто встречающуюся запись основного уравнения гидростатики:

$$p=p_0+\gamma h, \tag{1.37''}$$

где p — полное или абсолютное давление, иногда обозначаемое как $p_{абс}$; γh — весовое давление, равное весу столба жидкости при единичной площади и высоте h; z и z_0 — геометрические высоты расположения точек A и B относительно произвольной горизонтальной плоскости $O—O$, называемой *плоскостью сравнения*; $\frac{p}{\gamma}$ и $\frac{p_0}{\gamma}$ — высоты, соответствующие гидростатическому давлению p и p_0 в точках A и B. Величины z и p/γ часто в гидравлике называют *геометрической* и *пьезометрической высотами* или *геометрическим* и *пьезометрическим напорами*.

Поскольку все слагаемые, входящие в уравнение (1.37), имеют линейную размерность, то и сумма высот $z+\frac{p}{\gamma}$ будет также высотой H с линейной размерностью. Высоту H называют *гидростатическим напором*. А горизонтальную плоскость, удаленную от плоскости сравнения на величину гидростатического напора H,

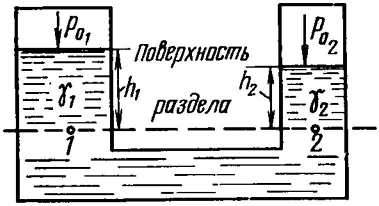

Рис. 1.8. К равновесию двух неоднородных жидкостей.

называют *плоскостью гидростатического напора.* Эта плоскость расположена выше плоскости свободной поверхности на высоту p_0/γ. Итак, для данного объема жидкости гидростатический напор относительно выбранной плоскости сравнения — величина постоянная:

$$H=z+\frac{p}{\gamma}=z_0+\frac{p_0}{\gamma}=\text{const}. \tag{1.38}$$

С энергетической точки зрения уравнение (1.38) представляет собой постоянную величину суммы удельной потенциальной энергии положения z и удельной потенциальной энергии давления p/γ во всех точках покоящейся жидкости относительно плоскости сравнения.

Из уравнения (1.37″) следует, что гидростатическое давление p в любой точке жидкости и на любой глубине h зависит от внешнего давления p_0 на свободной поверхности, т. е. *всякое внешнее давление, действующее на свободную поверхность жидкости, находящейся в равновесии, передается внутрь во все точки жидкости без изменения.* В этом заключается *закон Паскаля,* найденный опытным путем и имеющий большое практическое значение.

Рассмотрим равновесие двух неоднородных жидкостей ($\gamma_1 \neq \gamma_2$), покоящихся в сообщающихся сосудах (рис. 1.8):

$$p_{0_1}+\gamma_1 h_1=p_{0_2}+\gamma_2 h_2,$$

если $p_{0_1}=p_{0_2}=p_0$, то $\gamma_1 h_1=\gamma_2 h_2$ или $h_1/h_2=\gamma_2/\gamma_1$, т. е. при неоднородных жидкостях и одинаковом внешнем давлении в сообщающихся сосудах уровень жидкостей обратно пропорционален удельному весу этих жидкостей.

Для однородных жидкостей ($\gamma_1=\gamma_2$) свободная поверхность в сообщающихся сосудах устанавливается на одном уровне ($h_1=h_2$).

2.5. ИЗБЫТОЧНОЕ И ВАКУУММЕТРИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ. ИЗМЕРЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрим закрытый сосуд, заполненный жидкостью, на поверхности которой действует давление p_0. При этом могут встретиться три случая: а) $p_0>p_{\text{ат}}$; б) $p_0=p_{\text{ат}}$; в) $p_0<$ $<p_{\text{ат}}$ (рис. 1.9). Если в точке A к сосуду присоединить стеклян-

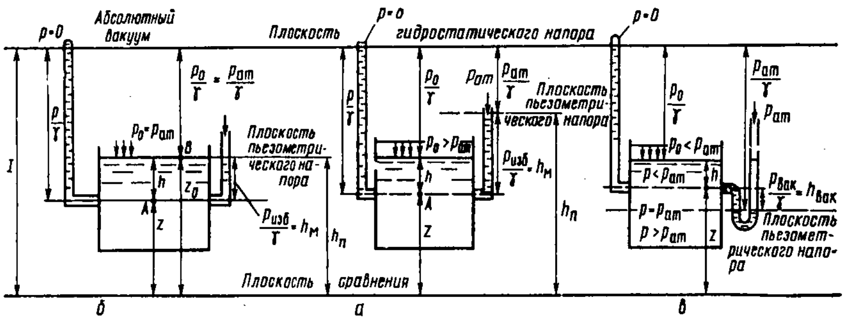

Рис. 1.9. К определению манометрического давления.

ную трубку, открытую в атмосферу, то в такой трубке жидкость поднимется на некоторую высоту $h_м$, которая будет больше (рис. 1.9, *а*, *б*) или меньше (рис. 1.9, *в*) уровня воды в сосуде. Такие трубки называют *пьезометрами* или *манометрами*. Высоту $h_м$ называют *пьезометрической* или *манометрической*, а горизонтальную плоскость, проведенную на высоте пьезометрического напора, называют *плоскостью пьезометрического напора*.

Рассмотрим первый случай, когда $p_0 > p_{ат}$. Определим высоту поднятия жидкости в правой трубке. С этой целью сначала запишем для точки A давление, действующее слева и справа:

$$p_0 + \gamma h = p_{ат} + \gamma h_м, \tag{1.39}$$

а затем найдем $h_м$:

$$h_м = \frac{p_0 - p_{ат}}{\gamma} + h = \frac{p_0 - p_{ат} + \gamma h}{\gamma} \tag{1.40}$$

или с учетом (1.37″)

$$\gamma h_м = p_0 + \gamma h - p_{ат} = p - p_{ат} = p_{изб}. \tag{1.40′}$$

Превышение полного гидростатического давления над атмосферным называют *избыточным* или *манометрическим давлением* $p_{изб}$.

Если сосуд открыт, то давление на поверхности жидкости будет равно атмосферному (второй случай $p_0 = p_{ат}$). В этом случае зависимость (1.40′) получает простое выражение $h_м = h$.

Следовательно, избыточное или манометрическое давление $p_{изб}$ в любой точке жидкости характеризуется глубиной ее погружения или глубина погружения точки $h_м$ характеризует избыточное или манометрическое давление в ней.

В инженерной практике часто давление в жидкости бывает меньше атмосферного (третий случай), т. е. $p_0 < p_{ат}$. В этом слу-

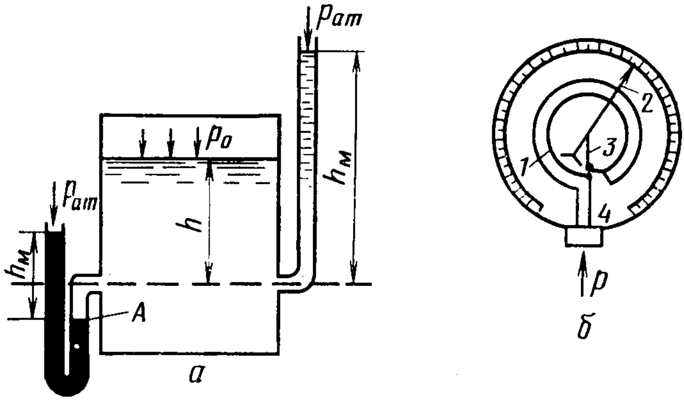

Рис. 1.10. Приборы для измерения гидростатического давления:

а — пьезометр и ртутный манометр; *б* — пружинный манометр: *1* — пружина; *2* — стрелка; *3* — передаточный механизм; *4* — корпус.

чае манометрическое давление будет отрицательным и называется *вакуумом*, а высота столба жидкости, измеряющая вакуум, называется *вакуумметрической высотой* $h_{вак}$. Запишем равенство давления для точки *A*, действующего слева и справа:

$$p_0+\gamma h+\gamma h_{вак}=p_{ат} \tag{1.41}$$

или с учетом (1.37)

$$h_{вак}=\frac{p_{ат}-p_0-\gamma h}{\gamma}=\frac{p_{ат}-p}{\gamma}. \tag{1.42}$$

Вакуум может изменяться от 0 до 1 технической атмосферы или до 10 мм вод. ст.

Давление измеряется с помощью пьезометров, манометров и вакуумметров. Пьезометры представляют собой прямые стеклянные трубки диаметром не менее 6—8 мм, помещенные на измерительной шкале. Верхний конец трубки должен быть открытым, сообщающимся с атмосферой. Нижний конец пьезометра устанавливается в отверстии, сделанном в стенке сосуда на той же глубине от свободной поверхности жидкости, где требуется определить избыточное давление (рис. 1.10, *а*). Пьезометры применяются для измерения небольшого давления, десятых и сотых долей атмосферного давления.

Для измерения более значительного давления применяют жидкостные или пружинные манометры (рис. 1.10, *б*).

Жидкостные манометры отличаются от пьезометров тем, что в них измеряемое давление уравновешивается столбом жидкости с большим удельным весом, например, ртути, удельный вес которой $\gamma_{рт}=136$ кН/м^3. Простейшим типом жидкостного манометра является U-образный ртутный манометр, в котором колено трубки заполняется ртутью. Один конец трубки присоединяется к сосуду с жидкостью в той точке, где необходимо определить избыточное давление, другой конец трубки сообщается с атмосферой. Например, ртутный манометр показал $h_м=0{,}9$ м, тогда избыточное давление в точке A будет

$$p_A=0{,}9\cdot 136=122{,}4 \text{ кН/м}^2=0{,}122 \text{ МПа}.$$

Ртутные манометры применяются для измерения давления до 3 атм., при большем давлении они получаются громоздкими и потому применяются главным образом в лабораторных условиях.

Для измерения высокого давления обычно пользуются пружинными манометрами, называемыми обычно просто манометрами. Они отличаются портативностью и простотой конструкции и поэтому это основные приборы для измерения давления больше атмосферного. Жидкость из сосуда, в котором измеряется давление, поступает в изогнутую в виде серпа латунную трубку эллиптического поперечного сечения и своим давлением частично ее распрямляет (рис. 1.10, *б*). При этом стрелка *2* с помощью рычажной системы *3* перемещается по шкале *4*, показывая на циферблате давление жидкости в сосуде.

Для измерения величины вакуума применяются жидкостные и пружинные вакуумметры. По своему устройству и действию жидкостные вакуумметры похожи на жидкостные манометры с той лишь разницей, что жидкость (вода или ртуть) в трубке вакуумметра перемещается в сторону разреженного пространства.

Пружинные вакуумметры имеют такое же устройство, как и пружинные манометры, с той лишь разницей, что при действии разрежения латунная трубка не распрямляется, а, наоборот, сгибается, передвигая стрелку с помощью той же рычажной системы по шкале. Вакуумметры устанавливаются на всасывающих трубах центробежных насосов, сифонах и т. д.

2.6. СИЛЫ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКИЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В практической деятельности довольно часто приходится сталкиваться с определением силы гидростатического давления на плоские и криволинейные поверхности. Рассмотрим сначала плоскую фигуру (площадью смоченной части ω), наклоненную к горизонту под углом α (рис. 1.11). Используя основное уравнение гидростатики (1.37″), вычислим силу гидростатического давления на эту фигуру. Для наглядности совместим эту

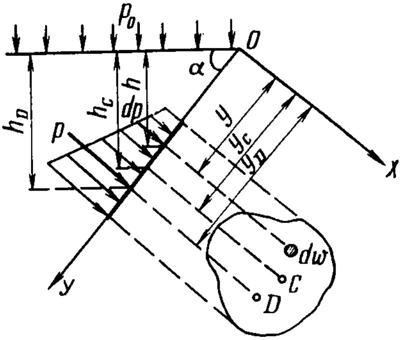

Рис. 1.11. К определению суммарной силы гидростатического давления на плоскую стенку.

фигуру с плоскостью чертежа в плоскости $X—O—Y$. Так как гидростатическое давление жидкости распределяется на выделенной площади неравномерно, то сначала определим бесконечно малую силу гидростатического давления на элементарную площадку $d\omega$:

$$dp = p d\omega = (p_0 + \gamma h) \times$$
$$\times d\omega = p_0 d\omega + \gamma h d\omega.$$

Для определения силы гидростатического давления необходимо проинтегрировать полученное выражение по всей площади ω:

$$P = p_0 \int_\omega d\omega + \gamma \int_\omega h d\omega = p_0\omega + \gamma \sin\alpha \int_\omega y d\omega, \tag{1.43}$$

где y — координата площадки $d\omega$.

Интеграл $\int_\omega y d\omega$ представляет собой статический момент смоченной поверхности фигуры относительно оси $O—X$ и равен произведению площади этой фигуры на координату центра тяжести y_c, т. е. $\int_\omega y d\omega = y_c\omega$.

Следовательно,

$$P = p_0\omega + \gamma \sin\alpha y_c\omega = p_0\omega + \gamma h_c\omega, \tag{1.44}$$

где $h_c = y_c \sin\alpha$ — глубина погружения центра тяжести площади ω в жидкость.

Сила гидростатического давления жидкости на плоскую поверхность равна произведению площади смоченной поверхности ω на сумму внешнего гидростатического давления жидкости p_0 и избыточного гидростатического давления жидкости γh_c.

Чтобы иметь полное представление о силе гидростатического давления жидкости, необходимо, кроме ее величины, знать направление и точку приложения этой силы, называемую *центром давления* y_D. Сила давления покоящейся жидкости направлена со стороны жидкости по нормали к поверхности согласно первому свойству гидростатического давления.

Нахождение центра давления y_D представляет большой практический интерес.

В соответствии с основным уравнением гидростатики (1.37″) внешнее давление p_0, действующее на поверхность жидкости, передается всем точкам площади ω одинаково, поэтому точка приложения силы внешнего гидростатического давления жидкости $p_0\omega$ будет совпадать с центром тяжести фигуры.

Сила избыточного гидростатического давления распределяется неравномерно, увеличиваясь с глубиной погружения, равнодействующая которой будет лежать всегда ниже центра тяжести фигуры. На практике чаще всего встречается, когда $p_0=p_{ат}$, т. е. на фигуру со всех сторон действует атмосферное давление, и положение центра давления зависит только от величины силы избыточного гидростатического давления.

Но может встретиться случай, когда $p_0<p_{ат}$, тогда центр давления будет располагаться выше центра тяжести. Для горизонтальной плоской поверхности центр давления и центр тяжести находятся на одном уровне.

Установим точку приложения силы избыточного гидростатического давления y_D.

Сила гидростатического давления жидкости P — это равнодействующая множества параллельных ей сил dP, действующих на элементарные площадки $d\omega$. Используем теорему Вариньона, согласно которой момент равнодействующей силы относительно какой-либо оси равен сумме моментов ее составляющих относительно той же оси:

$$Py_D=\int_\omega y\,dP,$$

откуда

$$y_D=\frac{\int_\omega y\,dP}{P}. \tag{1.45}$$

С учетом

$$dP=\gamma h_D d\omega=\gamma y_D \sin\alpha\, d\omega \text{ и}$$

$$P=\gamma h_c\omega=\gamma y_c \sin\alpha\,\omega$$

получим

$$y_D=\frac{\int_\omega y^2 d\omega}{y_c\omega}=\frac{I_x}{y_c\omega}, \tag{1.45'}$$

где $I_x=\int_\omega y^2 d\omega$ — осевой момент инерции ω относительно оси $O—X$.

В расчетах удобнее использовать осевой момент инерции плоской фигуры I_{x_0} относительно центральной оси, для этого вос-

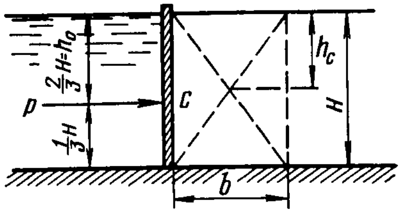

Рис. 1.12. К определению центра давления на плоскую прямоугольную стенку.

пользуемся известной формулой перехода

$$I_x = I_{x_0} + y_c^2\omega.$$

Подставляя это выражение в формулу (1.45′), получим

$$y_D = y_c + \frac{I_{x_0}}{y_c\omega} = y_c + \frac{I_{x_0}}{S}, \tag{1.45″}$$

где $S = y_c\omega$ — статический момент плоской фигуры.

При вертикальной плоской стенке, когда $\sin\alpha = 1$

$$h_D = h_c + \frac{I_{x_0}}{h_c\omega}, \tag{1.46}$$

так как

$$y_D = \frac{h_D}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{h_c}{\sin\alpha}.$$

Например, для плоской прямоугольной стенки (рис. 1.12) сила гидростатического давления

$$P = \gamma h_c\omega = \gamma\frac{H}{2}bH = \frac{1}{2}\gamma bH^2. \tag{1.47}$$

Центр давления из формулы (1.45″)

$$y_D = \frac{H}{2} + \frac{bH^3/12}{H/2bH} = \frac{2}{3}H, \tag{1.48}$$

т. е. центр давления на плоскую прямоугольную стенку находится на $^2/_3\ H$ ниже уровня свободной поверхности жидкости.

Силу гидростатического давления жидкости на плоскую поверхность можно определить графически, с помощью эпюры давления, представляющей собой график изменения гидростатического давления в зависимости от глубины. Эпюры давления следует строить со стороны жидкости, не забывая о направлении действия нормальных напряжений в покоящейся жидкости. Так, для плоской вертикальной прямоугольной стенки давление распределяется по закону уравнения первой степени:

$$p = p_0 + \gamma h_i.$$

Задаваясь значениями $h_1 = 0$, получим $p = p_0$

$$h_1 = H, \text{ то } p = p_0 + \gamma H.$$

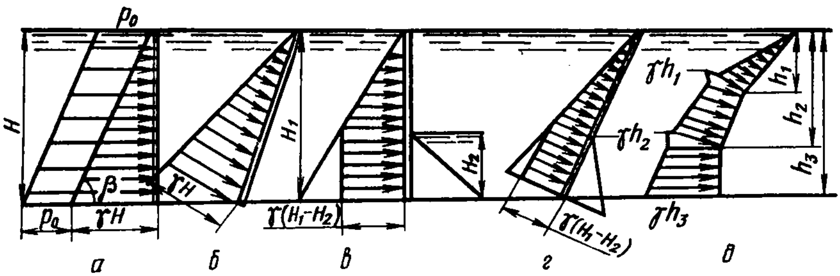

Рис. 1.13. Эпюры давления на плоские прямоугольные стенки:

а — вертикальная стенка; *б* — наклонная стенка; *в* — вертикальная стенка с двусторонним действием воды; *г* — наклонная стенка с двусторонним действием воды; *д* — стенка в виде ломаной поверхности.

Эпюра давления будет в виде трапеции (рис. 1.13, *а*). При $p_0 = p_{ат}$ давление распределяется по закону уравнения первой степени $P = \gamma h_i$:

если $h_i = 0$, то $p = 0$

если $h_i = H$, то $p = \gamma H$.

Эпюра давления будет в виде треугольника (рис. 1.13, *б*). Следует отметить, что наклон линии зависит от величины γ. Например, для воды ($\gamma = 9800$ Н/м^3) эпюра избыточного гидростатического давления будет представлять собой равнобедренный треугольник с углом $\beta = 45°$. Для жидкостей более тяжелых, чем вода (например, ртуть), наклон линии будет более пологим, т. е. $\beta < 45°$. Для жидкостей более легких, чем вода (например, бензин, спирт), наклон линии будет более крутым, т. е. $\beta > 45°$.

Принимая во внимание первое свойство гидростатического давления, получаем эпюру давления для плоской наклонной стенки (рис. 1.13, *б*). Если стенка испытывает двустороннее давление, то по тому же принципу можно построить эпюру для вертикальной (рис. 1.13, *в*) и наклонной (рис. 1.13, *г*) стенок.

Если стенка имеет ломаный профиль, то эпюра будет иметь вид, представленный на рисунке 1.13, *д*.

Для горизонтально расположенной стенки, в виде горизонтального дна сосуда, сила давления жидкости на все дно площадью ω может быть определена по формуле

$$P = \gamma \omega H. \qquad (1.49)$$

Эпюра давления изобразится цилиндром с площадью основания ω и высотой H, а сила давления будет равна весу жидкости в объеме цилиндра.

Из приведенного следует, что сила избыточного гидростатического давления на дно сосуда зависит только от рода жидкости, площади дна сосуда и глубины жидкости в сосуде и не зависит

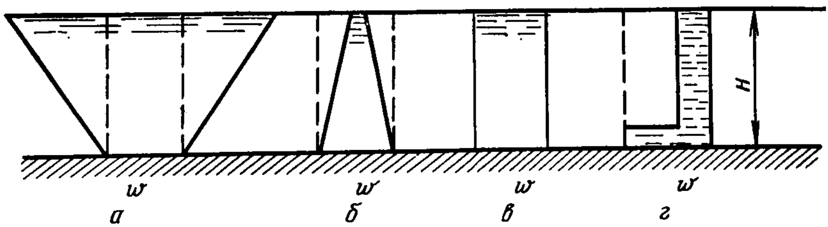

Рис. 1.14. Схема к гидростатическому парадоксу.

от формы и объема сосуда. Это свойство жидкости известно под названием *гидростатического парадокса* (рис. 1.14).

На практике широкое применение имеют криволинейные поверхности, находящиеся под давлением жидкости (стенки труб, резервуаров и т. д.). Для определения силы гидростатического давления жидкости рассмотрим криволинейную поверхность $A—B$ цилиндрической формы (рис. 1.15). Выделим на этой поверхности элементарную площадку $d\omega$, расположенную под свободной поверхностью жидкости на глубине y.

Из-за малости площади $d\omega$ можно ее рассматривать как плоскую, наклонную к горизонту под углом α. Сила гидростатического давления на выделенную площадку определяется так: $dP=\gamma y d\omega$. Разложим силу давления dP на две составляющие: горизонтальную dP_x и вертикальную dP_y, которые после замены $d\omega \sin\alpha = d\omega_y$ и $d\omega\cos\alpha = d\omega_x$ можно представить в таком виде:

$$dP_x = dP\sin\alpha = \gamma y d\omega\sin\alpha = \gamma y d\omega_y;$$

$$dP_y = dP\cos\alpha = \gamma y d\omega\cos\alpha = \gamma y d\omega_x, \tag{1.50}$$

где $d\omega_y$ и $d\omega_x$ — проекции элементарной площадки $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную соответственно к оси $O—X$ и $O—Y$.

Интегрирование выражений (1.50) в пределах всей площади дает значение составляющих P_x и P_y:

$$P_x = \gamma\int_{\omega_y} y d\omega_y = \gamma h_c\omega_y, \tag{1.51}$$

где $\int_{\omega_y} y d\omega_y$—статический момент ω_y проекции всей поверхности на плоскость $Y—O—X$ относительно оси $O—X$, который равен произведению площади на координату ее центра тяжести; h_c — координата центра тяжести.

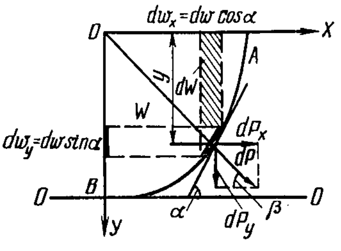

Рис. 1.15. К определению силы гидростатического давления на криволинейную поверхность.

Горизонтальная составляющая

силы гидростатического давления жидкости на криволинейную поверхность равна силе давления на ее вертикальную проекцию, т. е., чтобы определить горизонтальную составляющую силы давления, необходимо криволинейную поверхность спроектировать на вертикальную плоскость и вычислить силу давления на нее, как на плоскую стенку. Вертикальная составляющая будет

$$P_y=\gamma\int_{\omega_x} y\,d\omega_x=\gamma\int_{\omega_x} dW=\gamma W, \qquad (1.52)$$

где W — объем тела давления, лежащий над всей криволинейной поверхностью, т. е. вертикальная составляющая силы гидростатического давления жидкости равна весу жидкости в объеме, ограниченном криволинейной поверхностью, ее вертикальной проекцией и свободной поверхностью жидкости.

Величина равнодействующей будет равна геометрической сумме горизонтальной и вертикальной составляющих P_x и P_y:

$$P=\sqrt{P_x^2+P_y^2}. \qquad (1.53)$$

Направление этой силы определяется углом

$$\beta=\operatorname{arctg} P_y/P_x. \qquad (1.54)$$

Точка ее приложения будет находиться на пересечении линий действия составляющих P_x и P_y.

2.7. ЗАКОН АРХИМЕДА. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАВАНИЯ ТЕЛ

Рассмотрим тело правильной формы высотой H и площадью верхнего и нижнего оснований ω, погруженное в жидкость (рис. 1.16). В расчете участвуют только силы веса и гидростатического давления на верхнее и нижнее основания, т. к. силы давления, испытываемые боковыми поверхностями тела, взаимно уравновешены.

Сила гидростатического давления на верхнее основание

$$P_1=P_0+\gamma\omega H_1,$$

та же сила на нижнее основание

$$P_2=P_0+\gamma\omega H_2,$$

сила веса тела

$$G=\gamma_т(H_2-H_1)\,\omega=\gamma_т H\omega,$$

где $\gamma_т$ — удельный вес тела.

Тогда уравнение равновесия можно представить в сле-

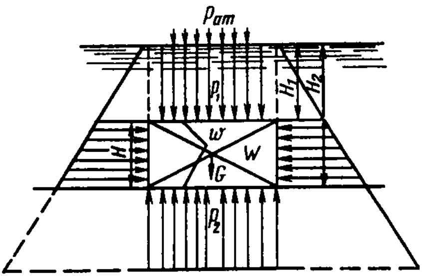

Рис. 1.16. К доказательству закона Архимеда.

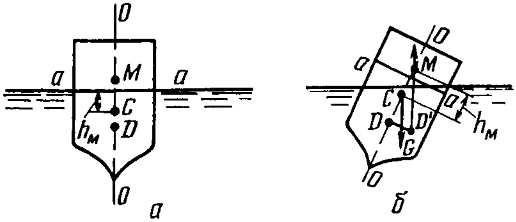

Рис. 1.17. Плавучесть тела:
а и *б* — судно остойчиво.

дующем виде:

$$P - G = 0, \tag{1.55}$$

где $P = P_2 - P_1$ — архимедова (выталкивающая) сила направлена по вертикали вверх и приложена к телу в точке, соответствующей центру давления и называемой *центром водоизмещения.*

$$P = \gamma\omega(H_2 - H_1) = \gamma\omega H = \gamma W, \tag{1.56}$$

где W — объем рассматриваемого тела.

На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила P, равная весу вытесненной им жидкости. Это — закон Архимеда.

Формула (1.56) справедлива для погруженного в жидкость тела любой формы, т. к. такое тело можно представить состоящим из множества бесконечно малых призматических тел, подобных рассмотренному.

При рассмотрении уравнения (1.55) могут встретиться три случая плавания твердого тела:

а) $G > P$ (тело тонет); б) $G = P$ (подводное плавание тела) и в) $G < P$ (надводное плавание тела).

Наибольшее практическое значение имеют второй и третий случаи.

В результате воздействия на плавающее тело ветра, неравномерной нагрузки и других обстоятельств оно может отклониться от положения равновесия. Поэтому возникает вопрос об остойчивости плавающего тела, т. е. способности плавающего тела восстанавливать положение равновесия при его нарушении.

На рисунке 1.17 показана схема корпуса судна со следующими обозначениями: *а—а* — плоскость плавания, ограниченная ватерлинией, как контуром; *о—о* — ось плавания — ось, нормальная к плоскости плавания и проходящая через центр тяжести тела *С*.

На оси плавания расположены три центра: центр тяжести *С*, центр водоизмещения *D* и метацентр *М* (точка пересечения оси плавания с линией действия архимедовой силы).

Используя понятие метацентрической высоты $h_м$, можно охарактеризовать остойчивость плавающих тел следующими тремя случаями, приняв за плоскость сравнения плоскость плавания:

а — при $h_м>0$ судно остойчиво (рис. 1.17, *а, б*); *б* — при $h_м=0$ судно не остойчиво и *в* — при $h_м<0$ судно не остойчиво. Причем чем больше метацентрическая высота, тем лучше остойчивость плавающего тела.

2.8. ПРИНЦИПЫ И СХЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАКОНОВ ГИДРОСТАТИКИ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МАШИНАХ

К числу простых гидравлических машин, работа которых основана на использовании законов гидростатики, относятся гидропресс, гидроаккумулятор и гидродомкрат.

Гидропресс применяется для получения больших сжимающих усилий, необходимых при обработке различных изделий (ковке, штамповке, прессовании). Он состоит из двух сообщающихся цилиндров с поршнями малого d_1 и большого d_2 диаметров (см. рис. 1.18). Первый поршень (ныряло) соединен с рычагом, имеющим в точке O неподвижную шарнирную опору. Второй поршень (плунжер) составляет одно целое с платформой, на которую помещается прессуемое тело. Рычаг приводится вручную или с помощью специального двигателя. Рассматривая равновесие рычага, составим уравнение моментов относительно точки O и найдем:

$$P_1=Q\frac{a}{b}. \qquad (1.57)$$

Давление от малого поршня передается на большой поршень, причем сила давления на большой поршень

$$P_2=P_1\frac{\omega_2}{\omega_1}, \qquad (1.58)$$

после подстановки значений P_1, $\omega_1=\dfrac{\pi d_1^2}{4}$ и $\omega_2=\dfrac{\pi d_2^2}{4}$ получим

$$P_2=Q\frac{a}{b}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

или с учетом потерь энергии на трение в движущихся частях, так называемого КПД $\eta=0{,}80 \dots 0{,}85$, окончательно найдем

$$P_2=Q\frac{a}{b}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\eta. \qquad (1.59)$$

В современных гидропрессах можно получить усилия до $7\cdot10^5$ кН. Если гидропресс используется в качестве гидроподъемника, то неподвижную плиту убирают.

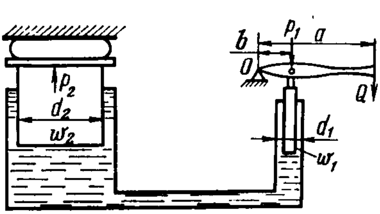

Рис. 1.18. Схема гидравлического пресса.

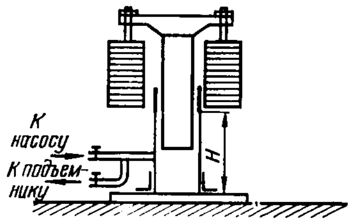

Рис. 1.19. Схема гидравлического аккумулятора.

Гидроаккумулятор служит для аккумулирования энергии, чтобы затем по мере надобности ее расходовать. Применяют его для поднятия больших грузов, для открытия и закрытия ворот шлюзов и т. д.

Различают грузовые и газовые гидроаккумуляторы. Грузовой гидроаккумулятор состоит из вертикального цилиндра, внутри которого помещен длинный плунжер, соединенный своей верхней частью с грузом большого веса (см. рис. 1.19). В гидроаккумулятор по трубе насосом нагнетается жидкость, которая поднимает плунжер с грузом вверх на некоторую высоту H. Сжатая в гидроаккумуляторе жидкость под постоянным давлением, т. к. давление жидкости в гидроаккумуляторе не зависит от степени его разрядки, подводится по нижней трубе к гидравлическим машинам, обеспечивая их работу с постоянной нагрузкой.

Глава 3. ГИДРОДИНАМИКА

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Общие сведения. Гидродинамикой называется раздел гидравлики, рассматривающий законы движения жидкостей и их практические приложения.

Кинематика жидкости обычно в гидравлике рассматривается совместно с динамикой и отличается от нее изучением видов и кинематических характеристик движения жидкости без учета сил, под действием которых происходит движение, тогда как динамика жидкости изучает законы движения жидкости в зависимости от приложенных к ней сил.

Жидкость в гидравлике рассматривается как непрерывная среда, сплошь заполняющая некоторое пространство без образования пустот. Причины, вызывающие ее движение, — внешние силы, такие, как сила тяжести, внешнее давление и т. д. Обычно при решении задач гидродинамики этими силами задаются. Неизвестные факторы, характеризующие движение жидкости, — это внутреннее гидродинамическое давление (по аналогии с гидро-