Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства"

Предмет: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭНЕРГЕТИКЕ

ТЕМА Дифференциальные модели. Методы Рунге-Кутта для решении дифференциальных моделей.

Зиядуллаев Д.Ш.

Доцент кафедры «Информационные технологии»

Метод Рунге-Кутты используют для расчета стандартных моделей достаточно часто.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)),\ 0 < x \leq T,\ y(0) = y_0 \qquad (1)$$

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением функции в ряд Тейлора:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Заменим вторую производную в этом разложении выражением

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = f'(x_k, y(x_k)) \approx \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x_k, y(x_k))}{\Delta x}$$

Где $\tilde{x} = x_k + \Delta x,\ \tilde{y} = y(x_k + \Delta x)$. Произведем замену величины $\tilde{y}$разложением в ряд Тейлора:

$$\tilde{y} = y(x_k + \Delta x) = y(x_k) + y'(x_k)\Delta x + \ldots$$

Для исходного уравнения (1) построим вычислительную схему:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\cdot h + \frac{h^2}{2\Delta x}\cdot\left(f(x_k + \Delta x,\ y_k + y_k'\Delta x) - f(x_k, y_k)\right)$$

которую преобразуем к виду:

$$y_{k+1} = y_k + h\cdot\left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right)\cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_k + \Delta x,\ y_k + y_k'\Delta x)\right] =$$

$$= y_k + h\cdot\left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right)\cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f\left(x_k + \frac{\Delta x}{h}h,\ y_k + f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h}h\right)\right]$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{h}{2\Delta x},\ \beta = 1 - \frac{h}{2\Delta x},\ \gamma = \frac{\Delta x}{h},\ \delta = f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h}$$

Эти обозначения позволяют записать предыдущее выражение в форме:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[\beta \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \gamma \cdot h,\ y_k + \delta \cdot h)\right]$$

Очевидно, что все введенные коэффициенты зависят от величины Δx и могут быть определены через коэффициент α, который в этом случае играет роль параметра:

$$\beta = 1 - \alpha,\ \gamma = \frac{1}{2\alpha},\ \delta = f(x_k, y_k)\frac{2}{\alpha}$$

Окончательно схема Рунге-Кутты принимает вид:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[(1-\alpha) \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + f(x_k, y_k)\frac{h}{2\alpha}) \right]$$

Отсюда следует следующие разностное уравнения для уравнения(1):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = (1-\alpha) \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + f(x_k, y_k)\frac{h}{2\alpha} \right)$$

При $\alpha = 0$ получаем как частный случай уже известную схему Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k, y_k\right)$

При $\alpha = 1$:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k) \right)$$

При $\alpha = 1$ проведение расчетов на очередном шаге интегрирования можно рассматривать как последовательность нижеследующих операций.

Вычисляется выражение, представляющее собой полушаг интегрирования по схеме Эйлера, то есть определяется приближенное значение искомой функции в точке $x_k + h/2$:

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)$$

Для той же промежуточной точки находится приближенное значение производной:

$$y'_{k+1/2} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}\right)$$

Определяется значение функции в конечной точке одного шага, причем по схеме Эйлера с вычисленным на предыдущем шаге значением производной:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}$$

Геометрические построения (см. **рис. 15.1**) показывают, что получаемое в такой последовательности решение лежит «ближе» к истинному, чем вычисляемое по схеме Эйлера, то есть получается более высокой точности решения с помощью метода Рунге-Кутты.

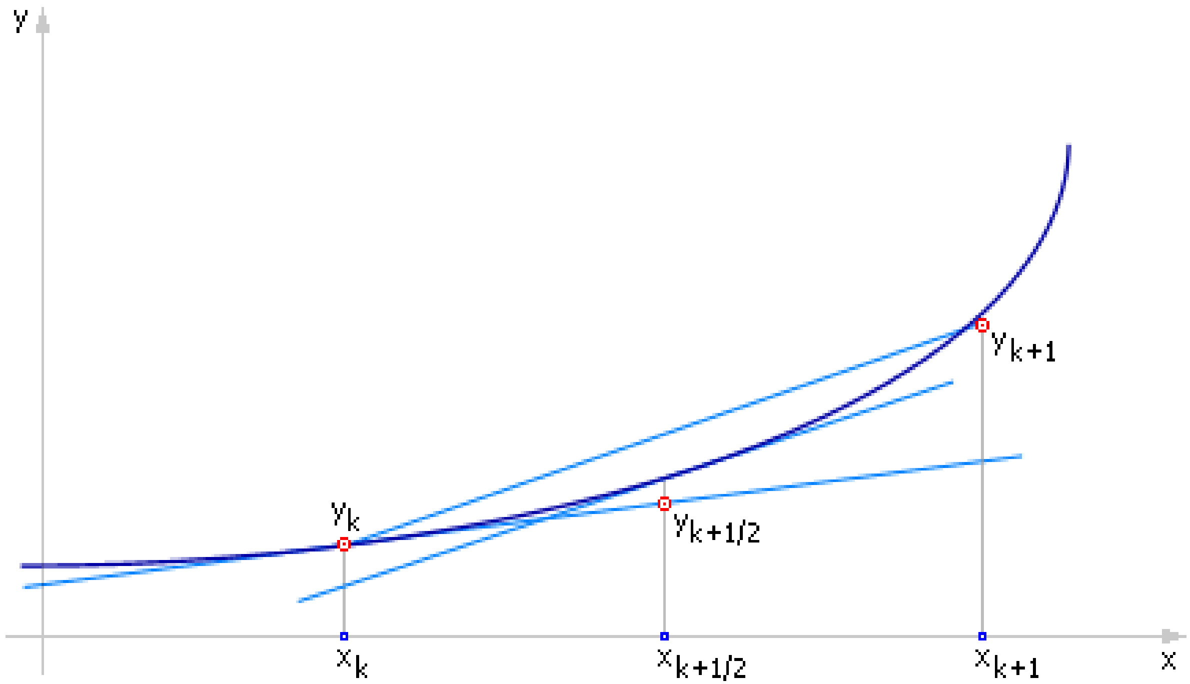

Рис. 15.1. Иллюстрация расчета на шаге методом Рунге-Кутты при значении параметра α = 1

Теперь рассмотрим схему при α = 0.5 (геометрическая интерпретация результата приведена на **рис. 15.2**).

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) \right]$$

Выполняется полный шаг метода Эйлера с целью определения приближенного значения искомой функции на конце отрезка интегрирования:

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k, y_k\right)$$

Для этой же точки вычисляется приближенное значение производной:

$$y'_{k+1} = f\left(x_k + h, \hat{y}_{k+1}\right)$$

Находится среднее значение двух производных, определенных на концах отрезка:

$$y'_{k+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left[y'_k + y'_{k+1} \right]$$

Вычисляется значение искомой функции в конечной точке всего шага по схеме Эйлера с усредненным значением производной:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}$$

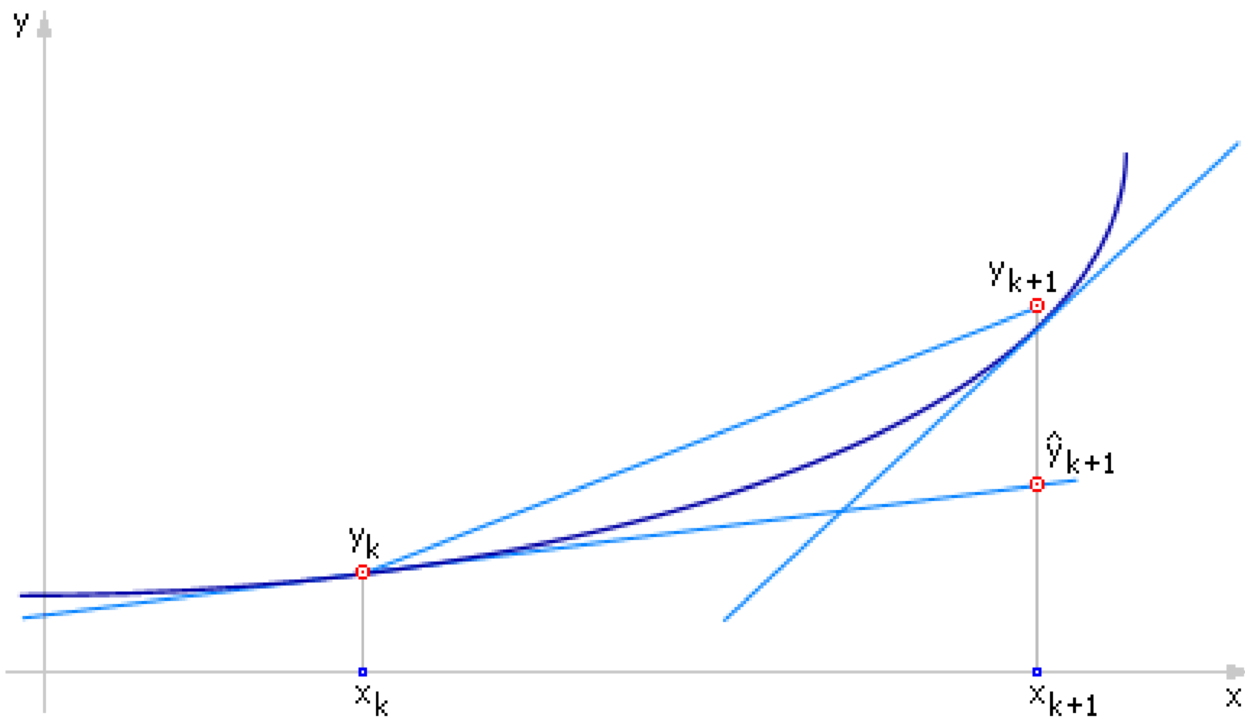

Рис. 15.2. Иллюстрация расчета на шаге методом Рунге-Кутты при значении параметра α = 0.5

Пример. Решить уравнение d*y*/d*x*=–*y*, *y*(0)=1 методом Рунге-Кутты. Поскольку правая часть дифференциального уравнения имеет вид: *f*(*x*,*y*)=–*y*, схема метода при α = 0.5 представляется следующим образом:

$$y'_k = f(x_k, y_k) = -y_k$$

$$\hat{y}_{k+1} = y_k - h \cdot y_k = y_k \cdot (1 - h)$$

$$y'_{k+1} = f\left(x_k + h, \hat{y}_{k+1}\right) = -y_k \cdot \left(1 - \mathrm{h}\right)$$

$$y'_{k+1/2} = \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2} = -\frac{y'_k}{2} \cdot (2 - h)$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2} = y_k - y_k \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(2 - h\right) = y_k \frac{(h-1)^2 + 1}{2}$$

Построим последовательность значений искомой функции:

$$y_0 = y(0) = 1$$

$$y_1 = y_0 \frac{(h-1)^2+1}{2} = \frac{(h-1)^2+1}{2}$$

$$y_2 = y_1 \frac{(h-1)^2+1}{2} = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^2$$

$$y_3 = y_2 \frac{(h-1)^2+1}{2} = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^3$$

…

$$y_n = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^n$$

Результаты получаемого *численного* решения для значения аргумента *x* = 10 при различных шагах интегрирования приведены в табл. 15.1. Три верные значащие цифры получены для шага *h* = 0.01.

Таблица 15.1.

Результаты численного решения y_n методом Рунге-Кутты второго порядка дифференциального уравнения $y'=-y$ с начальным условием $y(0)=1$.

Величина шага h	**0.5**	**0.25**	**0.1**	**0.01**	**0.001**	**0.0001**
Число шагов n	20	40	100	1000	10 000	100 000
$y_n \cdot 10^4$	0.827181	0.514756	0.462229	0.454076	0.454000	0.453999

Оценим погрешность аппроксимации уравнения (1) разностной схемой метода Рунге-Кутты. Подставляем точное решение в разностный аналог исходного дифференциального уравнения и вычисляем невязку:

$$\psi_k = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - (1-\alpha)\cdot f(x_k, y(x_k)) - \alpha\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y(x_k) + \frac{h}{2\alpha} f(x_k, y(x_k))\right)$$

Подставим разложения функций

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)\cdot h + y''(x_k)\cdot\frac{h^2}{2} + \ldots$$

$$f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y(x_k) + \frac{h}{2\alpha} f(x_k, y(x_k))\right) =$$

$$= f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2\alpha}\cdot\left[\frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k))\right] + \ldots$$

в полученное выражение:

$$\psi_k = \frac{y(x_k) + y'(x_k)\cdot h + y''(x_k)\cdot \frac{h^2}{2} + K - y(x_k)}{h} - (1-\alpha) f(x_k, y(x_k)) -$$

$$-\alpha \cdot \left\{ f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2\alpha} \cdot \left[\frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k)) \right] + \ldots \right\} =$$

$$= y'(x_k) + y''(x_k) \cdot \frac{h}{2} - f(x_k, y(x_k)) + \alpha \cdot f(x_k, y(x_k)) - \alpha \cdot f(x_k, y(x_k)) -$$

$$-\frac{h}{2} \cdot \left[\frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k)) \right] + O(h^2) =$$

$$= y'(x_k) - f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} \cdot \left[y''(x_k) - \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} - \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k)) \right] + O(h^2)$$

Учитывая уравнение (1), а также выражение для производной

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = (f(x_k, y(x_k)))' = \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k))$$

окончательно получаем, что $\psi_k = O(h^2)$, то есть метод Рунге-Кутты, независимо от значения параметра α, имеет *второй* порядок аппроксимации.