

# TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYA

2023  
2-son

ma'naviy-ma'rifiy, ilmiy-uslubiy jurnal



ISSN 2181-8274



Ma'naviy-ma'rifiy, ilmiy-uslubiy jurnal.  
1996-yilda tashkil etilgan.

Tahrir hay'ati raisi:

**Sh.U.Yakubov**

Oliy ta'limni rivojlantirish tadqiqotlari va ilg'or  
texnologiyalarni tatbiq etish markazi direktori

Tahrir hay'ati raisi o'rinbosari:

**M.X.Esanov**

Bosh muharrir:

**A.T.Eshmurodov**

Bosh muharrir o'rinbosari:

**A.A.Sabriyev**

Tahrir hay'ati a'zolari:

**L.R.Zaripov**

**A.A.Dadasheva**

**Sh.A.Rasulov**

**M.M.Inagamova**

**S.Q.Maxsumova**

**S.S.Samandarova**

**M.Q.Sultonov**

**S.S.G'oziyev**

**O.N.Toshpulatov**

Jamoatchilik kengashi a'zolari:

**Q.X.Abduraxmanov**

**Sh.T.Qudratxo'ja**

**G.Sh.Rixsiyeva**

**Sh.S.Sirojiddinov**

**R.I.Xolmurodov**

**A.I.Toshpulatov**

**N.M.Jabborov**

**M.A.Raxmatullaev**

**T.Z.Teshabayev**

Dizayner:

**S.Musamedov**

# TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYA

**Shoira Bekchonova.**

Kiber pedagogika – XXI asrda raqamli ta'lim muhiti pedagogikasi .....6

**Jasurbek Qurbonov.**

Bo'lajak o'qituvchilar tomonidan yangi pedagogik texnologiyalarni  
oliy ta'limda joriy etishning ijtimoiy-pedagogik zaruriyati .....9

**Munisa Ashurova.**

Bo'lajak informatika o'qituvchilarining mantiqiy fikrlashi  
uchun muhim bo'lgan shaxsiy fazilatlar .....12

**Jamshid Xudaykulov.**

Boshlang'ich sinf o'quvchilarida o'qish savodxonligini  
oshirishda interfaol metodlardan foydalanish .....15

**Maxmuda Dexqonova.**

Sog'lom turmush tarzini shakllantirishda sportning o'rni va ahamiyati .....18

**Muzaffarjon Jo'rayev.**

Yangi avlod darsliklarining kognitiv va ijodiy salohiyati kasbiy  
tayoqgarlikning muhim omili sifatida .....22

**Nargiza Diyorova.**

Lessons in pedagogy with modern information technology devices .....25

**Равшанбек Мавлонов.**

Педагогика назарияси ва амалиётида интеграцион ёндашувни қўллашнинг аҳамияти .....28

**Dildora Axatova.**

Abu Ali ibn Sino va Alisher Navoiy asarlari uyg'unligining ilmiy ahamiyati .....30

**Aybek Iqilov.**

Oliy ta'lim muassasalarida mathcad dasturi asosida o'qitish metodikasini shakllantirish .....32

**Азиза Курбонова.**

Умумтаълим муассасаларининг маданий-маърифий соҳасини кластерли  
ёндашув асосида ривожлантириш .....35

**Elnur Mirzayev, Rayhon Ergasheva**

Geometrik shakllardan foydalanib natyurmort ishlash metodikasini takomillashtirish .....37

**Гулбахор Ишмуродова.**

Технологик таълим ўқитувчиларини тайёрлашни  
Steam ёндашувлари асосида такомиллаштириш .....41

**Nuriddin Yakubjanov.**

Ma'naviy tahdidlarning milliy g'oya va jamiyat taraqqiyotiga  
ta'siri va ularni bartaraf etish usullari .....45

**Насиба Ходжаева.**

Анализ некоторых результатов педагогических  
исследований подготовки кадров по нанотехнологии .....48

**Бахтиёржон Раззоқов.**

Миллий хунармандчилик турлари ва уларни  
ўқитишда ўқув устахоналарга қўйиладиган талаблар .....51

**Шоҳидахон Абдурахмонова.**

Бўлажак муҳандисларнинг "материалшунослик" ва "конструкция материаллар  
технологияси" фанини ўқитиш асосида амалий касбий тайёргарлигини  
такомиллаштириш методикаси .....54

**Туланмирза Нишонов.**

Бўлажак иктисодчи талабаларнинг касбий компетенциясини  
ривожлантиришда амалий-касбий масалаларнинг методик хусусиятлари .....56

**Moxichexra Almardonova.**

Kashta sifatidagi spektral – variativligining ba'zi jihatlarini .....61

**Zafar Negmatov.**

Markaziy Osiyoda "C5+1" loyihasi ahamiyati .....64

**Нилуфар Исакулова.**

Дунё динлари тарихи бўйича электрон альтернатив ўқув платформасини яратиш .....66

**Muassislar:**

*O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi,  
Oliy ta'limni rivojlantirish tadqiqotlari va ilg'or texnologiyalarni tatbiq etish markazi*

**Manzil:** 100095, Toshkent shahri, Olmazor tumani, Shifo nur ko'chasi, 75-uy

**Telefon:** (71) 207-03-41

**e-mail:** rmxat@edu.uz

**Jurnal O'zbekiston Matbuot va axborot agentligidan 2014-yil 26-dekabrda 0506 raqami bilan ro'yxatdan o'tgan.**

*Jurnal har ikki oyda o'zbek, rus va ingliz tillarida elektron shaklda chop etiladi.*

“Ta'lim, fan va innovatsiya”  
jurnali O'zbekiston Respublikasi  
Oliy attestatsiya komissiyasi  
Rayosatining 2015-yil 18-noyabrda  
218/5-sonli qarori bilan 13.00.00 –  
PEDAGOGIKA FANLARI bo'yicha,  
2018-yil 28-noyabrda 247/6-sonli  
qarori bilan 23.00.00 – SIYOSIY  
FANLAR bo'yicha doktorlik  
dissertatsiyalari asosiy ilmiy  
natijalarini chop etish tavsiya etilgan  
ilmiy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

“Ta'lim, fan va innovatsiya”  
jurnalidan ko'chirib bosish faqat  
tahririyatning roziligi bilan amalga  
oshiriladi. Maqolada keltirilgan  
faktlarning to'g'riligi uchun muallif  
mas'uldir. Tahririyat fikri mualliflar  
fikriga mos kelmasligi mumkin.

*Jurnalning to'liq matnini [esijournal.uz](http://esijournal.uz) rasmiy  
saytidan yuklab olishingiz mumkin.*

*Maqola va murojaatlaringizni  
[@esijournalbot](https://t.me/esijournalbot) telegram botiga yuboring.*

**Алишер Азимов, Нафиса Таирова, Камола Арпובה.**

О истории аксонометрических проекции .....	69
<b>Feruza Kurbanova.</b> Umumadaniy kompetensiya ta'limning ajralmas qismi sifatida.....	73
<b>Гулбахор Ишмуродова, Жонибек Халилов.</b> Ишсизлар ва банд бўлмаган аҳолини касб-хунарларга ўқитишнинг психологик-педагогик асослари .....	76
<b>Faroxat Mirzayeva, Rahmonjon Darobov.</b> Bo'lajak o'qituvchilarda muloqot madaniyatini rivojlantirishning o'ziga xos ahamiyati .....	80
<b>Наргиза Рашидова,</b> Профессионал таълим муассасаси фаолияти самарадорлигида педагог кадрларда жамоавий лидерлик компетентининг аҳамияти.....	84
<b>Mavluda Karimova.</b> Umumta'lim maktablarida biologiya fanini o'qitish uchun ta'lim vositalari majmuasi.....	86
<b>Хайринисо Ғаниева.</b> Инглиз ва ўзбек тилларида тиниш белгиларнинг тамойилларга асосланиш жиҳатлари .....	90
<b>Malikaxon Nurutdinova.</b> Nodirabegim – Alisher Navoiyning ma'naviy shogirdi.....	93
<b>Visola Raxmonova, Dilshoda Uchqunova, Gulayim Baymuratova.</b> The blockchain computing model and its benefits.....	96
<b>Baxrom Mavlyanov.</b> Maktabgacha ta'lim muassasasida futbol darslarini tashkil etish metodikasi.....	99
<b>Fazilat To'xtayeva.</b> Raqamli savodxonlik ta'lim sifatini ta'minlash omili sifatida.....	102
<b>Nigora Shakadirova.</b> “Blended learning” texnologiyasi oliy ta'lim jarayonida talabalar faolligini oshiruvchi vosita sifatida.....	106
<b>Насиба Тургунова.</b> Ёшлар сиёсати ва уни амалга оширишга оид концептуал ёндашувлар .....	109
<b>Asalxon Azizova.</b> The use of contextual digital technology to improve students' self-efficacy.....	114
<b>Lola Mahammadiyeva.</b> Maktabgacha yoshdagi bolalarda elementar matematik tasavvurlarni shakllantirish yo'llari .....	117
<b>Nargiza Muhamadiyeva.</b> O'quvchilarning hunarmandchilikka oid kreativ faoliyatini rivojlantirish imkoniyatlari .....	120
<b>Feruza Xiloliddinova.</b> Kommunikativ kompetentligini rivojlantirish .....	123
<b>Malika Bayzakova, Dildora Utanbayeva.</b> Pirls Xalqaro baholash dasturiga tayyorlash metodikasi .....	126
<b>Кларакон Мавлонова.</b> Матн тузилишига доир таълимий бирликлар хусусида .....	129
<b>Madinabonu Tairova, Nargiza Qodirova</b> Maktabgacha ta'lim tashkilotlari me'yoriy hujjatlarini yuritish tizimini raqamlashtirishning metodlari, shakllari va vositalari .....	133
<b>Бобур Қодиров.</b> Remote labs методидан фойдаланиб маълумотлар базаси фани машғулотларини ташкил этиш .....	136
<b>Sevara Giyosova.</b> Teaching reading skills .....	139
<b>Farxad Tashpulatov.</b> Sambo kurashi bilan shug'ullanish jarayonida og'ir sport turlari bilan birga jismoniy mashqlar kompleks dasturlarini qo'llash .....	142
<b>Gulnozaxon Rasulova</b> 3D texnologik muhit uchun ta'lim faoliyatini loyihalash.....	144
<b>Abror inatov, Istam aminov</b> Talabalarning informatika fanidan mustaqil ta'limga oid kasbiy kompetentligini shakllantirishda innovatsion texnologiyalarni qo'llash samaradorligi .....	147

<b>Хабиба Агалиева.</b> Касб-хунар мактаби ўқувчиларини касбий фаолиятга тайёрлашда коммуникатив компетентликни шакллантириш муаммолари ...	150
<b>Gulnoza narmurodova.</b> Ingliz va o'zbek tillarida ta'ziya bildirish jarayonida etiketning o'ziga xosligi.....	153
<b>Aziza Kobilova.</b> Oliy ta'limda maktabgacha ta'lim yo'nalishi talabalarining innovatsion kompetentligini shakllantirish mohiyati.....	155
<b>Ravshan Mardonov.</b> Inson va fuqaro huquq va erkinliklari tizimida oliy ta'lim.....	159
<b>Нурилла Юлдашев.</b> Нахождение собственных значения оператора лапласа со смещениями в производных .....	163
<b>Oybek Daminov, Namuna Yuldashova.</b> Ways to improve the efficiency of the educational process in a modern higher technical educational institution .....	166
<b>Feruz Safarov.</b> Texnologiya darslarida innovatsion texnologiyalardan foydalanish.....	170
<b>Dildora Israilova.</b> Maktabgacha yoshdagi bolalarni ertaklar orqali ingliz tilini o'rganishga undash, tanqidiy fikrlashni oshirish.....	172
<b>Shirin Shomurotova.</b> Kimyo ta'limida didaktik o'yinli dars mashg'ulotlarining o'rni .....	175
<b>Собир Эрданов, Мунира Собиржонова.</b> Проблемы современного обучения русского языка в начальных узбекских школах.....	178
<b>Muxiddin Norqobilov.</b> Sport klublari ishidagi muammolar va ularni hal qilish yo'llari.....	182
<b>Lolaxon Turayeva.</b> Absolyut elastik to'qnashish mavzusini maple dasturiy vositasida o'qitish .....	184
<b>Азиза Ғаниева.</b> Мактабгача таълим муассасалари раҳбарларини касбий шакллантириш йўналишлари.....	188
<b>Lochin Zaripov.</b> Bo'lajak texnologiya o'qituvchilarining kasbiy tayyorgarligida modulli ta'limning ahamiyati.....	191
<b>Севара Хамидова.</b> Парадоксни ўрганишнинг тарихий истикболи ва унинг терминологик хусусиятлари .....	194
<b>Дилфуза Очилдиева, Замира Сапарова.</b> Древнерусские меры длины.....	197
<b>Жамолiddин Халилов.</b> Ўзбекистон ривожланишининг янги босқичида “маънавий ҳаёт тамойиллари” тушунчасининг мазмун-моҳияти ва намоён бўлиш хусусиятлари .....	200
<b>Umid Eshniyozov.</b> Ta'lim klasteri muhitida talabalarining eksperimental ko'nikmalarini bosqichma-bosqich rivojlantirish jarayoni.....	203
<b>Феруза Тешабоева.</b> Методик кластер – олий таълим самарадорлигини оширишнинг инновацион механизми сифатида .....	206
<b>Shohida Mahkamova, Mastura Asadullayeva.</b> Alohida ta'lim ehtiyojlariga ega bo'lgan o'quvchilar musiqiy qobiliyatlarini rivojlantirishning o'ziga xos xususiyatlari .....	209
<b>Durdona Ergasheva.</b> Yashirin zakovat nazariyasi.....	212
<b>Маъсума Мўминова.</b> “Сув” лексемасининг дунё тилшунослигида ўрганилиши .....	215
<b>Yashnarjon Jo'rayev.</b> Avtomaktablarda va ta'lim muassasalarida avtomobil haydovchilarini tayyorlash tizimini takomillashtirish .....	217
<b>Nodira Mamatkulova.</b> Sanoat korxonalarida moliyaviy barqarorlik .....	221
<b>Husniddin Amrillayev.</b> Oliy ta'lim muassasalarida virtual laboratoriyalar asosida o'quv jarayonini takomillashtirish .....	225
<b>Sevara Botirova.</b> O'smir yoshli o'quvchilarda kommunikativ ko'nikmalarni rivojlanishi xususiyatlari .....	228
<b>Nurbek Umarov.</b> Milliy dastur talablari asosida boshlang'ich ta'limda tenglamalarni o'rganishga yangicha yondashuv .....	231
<b>Shohida Mahkamova.</b> Musiqqa mashg'ulotlarida talabalarda millatlararo totuvlik hissinii shakllantirish.....	234
<b>Baxtiyor Turdimurodov.</b> Bo'lajak kasb ta'limi o'qituvchilarini tayyorlash jarayonida kreativ fikrlash ko'nikmasini shakllantirish texnologiyasi .....	237
<b>Farida Esanqulova.</b> Multimedia texnologiyalaridan foydalanishning tashkiliy-pedagogik shartlari.....	241
<b>Jaxongir Sagdullayev.</b> Yoshlar jinoyatchiligini oldini olishning nazariy asoslari .....	244
<b>Bakhtigul Isakulova.</b> Didactic games for building critical thinking skills.....	247
<b>Севара Хамидова.</b> Парадоксининг лингвокультурологик таҳлили .....	250
<b>Muxayyo Alikulova.</b> Modellashtirilgan qadriyatlardan maktabgacha yoshdagi bolalar tarbiyasini shakllantirishda foydalanish.....	253
<b>Suhrob O'ralov.</b> Tarix fanlarini integratsiyalashtirish tamoyili asosida o'qitishning ahamiyati.....	256
<b>Dilnoza Urazbayeva.</b> O'quvchilarga chet tilini o'qitishning ijtimoiy-pedagogik muammolari .....	259
<b>Baxtiyor Raxmanov, Azada Imamxodjayeva, Xurshida Ubaydullayeva, Dilshod Usmonov, Botirjon Sobirov, Muxammadjon Mirzaxmedov, Shuxrat Shermatov, Zabardast Buriyev, Ibrohim Abdurahmonov.</b> Artemizinin biosinteziga aloqador genlar asosida tuzilgan sun'iy genetik konstruksiyalarni agrobakteriyalar yordamida hayotga keltirish.....	262
<b>Habiba Jurabekova.</b> Shaxsning kommunikativ kompetentligi va raqamli hayot .....	265
<b>Azamat Usmanov.</b> Oliy ta'lim muassasalarining mamlakat ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyotidagi o'rni: xorijiy tajriba va milliy xususiyatlar.....	268
<b>Ozoda Abdumuminova.</b> Bo'lajak boshlang'ich sinf o'qituvchilarining kasbiy kompetentsiyalarini kreativ yondashuvlar asosida rivojlantirish .....	272
<b>Shukhrat Alikulov, Sherzod Zairov, Ravshan Ibragimov.</b> Laboratory and industrial studies of an increasing of the permeability of the uranium formation by influencing with electricity underground leaching.....	276
<b>Azimjon Qosimov.</b> O'zbekistonda davlat xizmati kadrlari masalasi .....	281
<b>Ирода Хамраева.</b> Ихтисослаштирилган таълим ташкилотлари ўқиш дарсларида ўқувчиларнинг китобхонлик ва коммуникатив	

5. Qarang, masalan: Becher T., Trowler P.R. Academic Tribes and Territories. – 2nd edn. – Buckingham: Open University Press/SRHE, 2001; Brennan J., King R., Lebeau Y. The Role of Universities in the Transformation of Society: An international research report. – London: ACU and CHERI, Open University, 2004; Hadjar A., Gross C. (eds.) Education Systems and Inequalities. – Bristol: Policy Press, 2015; Liu Ye Higher Education, Meritocracy and Inequality in China. – London: Springer, 2016. – 234 p.

6. Batafsil ma'lumot uchun qarang: Gribanova G.I., Nasonkin V.V. Ta'lim sohasidagi davlat siyosatining gender jihatlari (Yevropa Ittifoqi mamlakatlari misolida). - Sankt-Peterburg: A.I. Gertsen nomidagi RDPU, 2014. – 45-b.

7. Qarang: Sorokin P. Ijtimoiy harakatchanlik / ingliz tilidan tarj. M.V. Sokolova. – M.: Akademiya: LVS, 2005.

8. Batafsil ma'lumot uchun qarang, masalan: Anderson E.S. The Democratic University: The Role Of Justice In The Production Of Knowledge // Social Philosophy And Policy, Social Philosophy and Policy. – 1995. – № 2. – P.186–219; Dworkin R. Sovereign Virtue: The Theory And Practice Of Equality. – Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 2002; Guinier L. The Tyranny Of The Meritocracy. – Boston: Beacon Press, 2015.

9. Qarahg: URL: <http://www.openu.ac.il/en/pages/default.aspx>

10. 21-asr uchun oliy ta'lim bo'yicha Jahon deklaratsiyasi: yondashuvlar va harakatlar (Parij, 1998-yil 5-9-oktabr). – URL: [http://www.conventions.ru/view\\_base.php?id=1496](http://www.conventions.ru/view_base.php?id=1496)



## НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА СО СМЕЩЕНИЯМИ В ПРОИЗВОДНЫХ

Нурилла Юлдашев,  
«Ташкентский институт инженеров  
ирригации и механизации  
сельского хозяйства» Национальный  
исследовательский университет, доцент

### Аннотация

Дана постановка задачи определения собственных и присоединенных функций для оператора Лапласа в  $s$ -мерном единичном шаре со смещением и производных. При  $s = 2$  получены условия существования присоединенных функций не выше третьего порядка и выполнено их вычисление. Случай произвольного  $s$  является предметом будущей работы.

**Ключевая слова:** оператор Лапласа, единичный шар в  $R^s$ , собственные значения, собственные и присоединенные функции при  $s = 2$ .

**Аннотация:** Мақоллада Лаплас оператори uchun siljish va hosilalarga ega bo'lgan  $s$ -o'lchovli birlik sharida xos funksiyalar va bog'liq funksiyalarni aniqlash masalasining bayoni berilgan.  $s = 2$  uchun uchinchi tartibdan yuqori bo'lmagan bog'liq funksiyalarning mavjudlik shartlari olinadi va ularni hisoblash amalga oshiriladi. Ixtiyoriy  $s$  uchun isbotlashlar muallifning keyingi ishlarida bajarilishi ko'zda tutilgan.

**Калит so'zlar:** Laplas operatori,  $R^s$  da birlik shari, xos qiymatlar,  $s = 2$  da xos va bog'liq funksiyalar.

### Annotation

The statement of the problem on the determination of eigen- and adjoint-functions for Laplace operator in  $s$ -dimensional unit ball with displacement in derivatives is given. For  $s = 2$  the conditions are obtained for the existence of adjoint functions of the not higher than three order and their computations is made. The case of arbitrary  $s$  is the subject of future work.

**Keywords:** Laplace operator, unit ball in  $R^s$ , eigenvalues, eigen adjoint functions for  $s = 2$ .

При нахождении собственных значений функций и при доказательстве существования решение задачи необходимую играет роль нахождения в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функ-

ций до второго порядка включительно в  $s$ -мерном единичном шаре задача определения собственных и присоединенных функций для оператора Лапласа со смещениями в производных.

Методом разделения переменных были решены краевые задачи для уравнения Гельмгольца в круге со смещениями внутри области в работах Б.В.Логинава и А.М.Нагорного, а также некоторые спектральные задачи Бицадзе – Самарского. Задача на собственные значения для оператора Лапласа со смещениями в производных для  $s$ -мерном единичном шаре ранее не была исследована.

Приведённые теоремы о существовании решения задачи доказывается методом Лагранжа вариации произвольных постоянных отдельно в подобластях с последовательным использованием сопровождающих граничных условий. А также использована свойства и общая теория непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, функции Бесселя и теория интегральных уравнений.

В классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до второго порядка включительно в  $s$ -мерном единичном шаре задача определения собственных и присоединенных функций для оператора Лапласа со смещениями в производных определяются условиями [1, 230]

$$(\Delta + \lambda)u = \frac{1}{r^{s-1}} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^{s-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Theta} u + \lambda u = 0, u \in C^{2+\alpha}(\Omega),$$

$$u'_r(r_0, \Theta) = u_r(1, \Theta), 0 < r_0 < 1, \Omega = \{r, r < 1, \Theta\} = (\Theta_1, \dots, \Theta_{n-1}),$$

где  $\Delta_{\Theta}$ -оператор Лапласа на единичной сфере  $S^{s-1}$ . Бесселя  $x^s(r) + \frac{1}{r} x' + \left[ \lambda - \frac{1}{r^2} (n + \frac{s}{2} - 1)^2 \right] x = 0$ . В предположении ограниченности решения смещение определяет собственные значения  $\lambda = \alpha^2 = \alpha^2(n)$  как корни уравнения

$$f(\alpha) = \alpha \left[ r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + (1 - \frac{s}{2}) \left[ r_0^{-\frac{s}{2}} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] = 0.$$

Если функция  $v(r, \Theta)$  имеет непрерывные вторые производные в подобластях  $\Omega_{r_0}$  и  $\Omega/\Omega_{r_0}$ , то периодичность функции и по  $\Theta$ , непрерывность и непрерывная дифференцируемость ее всюду в  $\Omega$  и смещение определяют сопряженную задачу  $(\Delta + \lambda)v = 0$  в  $\Omega_{r_0} \cup (\Omega/\Omega_{r_0})$ ,  $\Phi^{(2)}(r, \Theta) = v'_r(r_0 - 0, \Theta) = v'_r(r_0 + 0, \Theta)$ ,  $v'_r(1, \Theta) = 0$ ,  $r_0^{s-1} [-v(r_0 + 0, \Theta) + v(r_0 - 0, \Theta)] + v(1 - 0, \Theta) = 0$

Замечание 1. Условия сопряженной задачи возникают, если в прямой задаче вместо  $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$  предположить только  $u \in C^{2+\alpha}(\Omega_{r_0}) \cup C^{2+\alpha}(\Omega/\Omega_{r_0})$ .

Далее для простоты представления приведены результаты только в прямой задаче при  $s = 2$ . Используются справочные издания.

Теорема 1. Прямая задача имеет собственные значения  $\lambda = \alpha^2 = \alpha^2(n)$  определяемые условием  $f(\alpha) = J'_n(\alpha) - J'_n(\alpha r_0) = 0$  с собственными функциями  $\hat{O}_n^{(1)}(r, \Theta) = J_n(\alpha r)(c_{n1} \cos n\Theta + c_{n2} \cos n\Theta)$

Ей отвечает сопряженная задача  $(\Delta + \lambda)v = 0$   $v \in \tilde{N}^{2+\alpha}(\Omega_{r_0}) \cup \tilde{N}^{2+\alpha}(\Omega/\Omega_{r_0})$ ,  $v'_r(r_0 - 0, \Theta) = v'_r(r_0 + 0, \Theta)$ ,  $v'_r(1, \Theta) = 0$ ,  $v(1, \Theta) + r_0 [v(r_0 - 0, \Theta) - v(r_0 + 0, \Theta)] = 0$  с теми же собственными значениями и собственными функциями  $\Psi_n^{(1)}(r, \Theta) = \chi_n^{(1)}(r)(d_{n1} \cos n\Theta + d_{n2} \sin n\Theta)$ , [2, 45]

$$\chi_n^{(1)}(r) = D \begin{cases} [N'_{(n)}(\alpha r_0) - N'_{(n)}(\alpha)] J_n(\alpha r), & 0 \leq r < r_0 \\ J_n(\alpha) N_{(n)}(\alpha r_0) - N'_{(n)}(\alpha) J_n(\alpha r), & r_0 < r \leq 1. \end{cases}$$

Условие отсутствия (существования) присоединенных элементов  $\Phi^{(2)}(r, \Theta) = X_n^{(2)}(r)(c_{n1} \cos n\Theta + c_{n2} \sin n\Theta)$  с точностью до ненулевого множителя (обозначается  $\cong$ ) имеет вид

$$I_n^{(1)}(\alpha) = \int_0^1 \rho X_n^{(1)}(\rho) X_n^{(1)}(\rho) d\rho \cong (n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 n^2 - \alpha^2) J_n(\alpha r_0) \cong f'(\alpha) \neq 0 (=0)$$

Теорема 2. Пусть  $f(\alpha) = 0$  и  $f'(\alpha) = 0$ . Тогда  $X_n^{(2)}(r)$  определяется как ограниченное решение неоднородного уравнения Бесселя

$$X_n^{(2)''}(r) + \frac{1}{r} X_n^{(2)'}(r) + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) X_n^{(2)} = J_n(\alpha r)$$

с условиями  $X_n^{(2)'}(r_0) = X_n^{(2)'}(1)$ ,  $X_n^{(2)(k)}(r_0 - 0) = X_n^{(2)(k)}(r_0 + 0)$ ,  $k = 0, 1$  и имеет вид  $X_n^{(2)}(r) = -\frac{r}{2\alpha} J'_n(\alpha r)$ ,  $0 \leq r < 1$ . Условия отсутствия (наличия) третьего элемента ЖЦ  $X_n^{(3)}(r)$  определяется интегралом  $I_n^{(2)}(\alpha) = \int_0^1 \rho X_n^{(2)}(\rho) X_n^{(1)}(\rho) d\rho$  и совпадает с  $f''(\alpha) \cong (r_0^2 - 1) J'_n(\alpha) + 2(r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)) \cong 0$ .

Доказательство выполняется методом Лагранжа вариации произвольных постоянных отдельно в подобластях  $\Omega_{r_0}$  и  $\Omega/\Omega_{r_0}$  с последовательным использованием сопровождающих граничных условий.

Теорема 3. Одновременное выполнение условия  $f^{(k)}(\alpha) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  невозможно.

Доказательство выполняется исследованием системы  $f'(\alpha) = 0 \square (n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2) J_n(\alpha r_0) = 0$ ,  $f''(\alpha) = 0 \square 2J_n(\alpha) + 2r_0 J_n(\alpha r_0) + \alpha(r_0^2 - 1) J'_n(\alpha) = 0$ ,  $f'''(\alpha) = 0 \square (n^2 - \alpha^2) J_n(\alpha) + 2\alpha J'_n(\alpha) = 0$ .

Следствие. Жордановы цепочки прямой задачи обрываются на третьем элементе, т. е. имеют длину три.

Действительно, система  $f'(\alpha) = 0$ ,  $f''(\alpha) = 0$  разрешима, т. к. ее определитель  $\Delta_{12} = n^2(r_0^2 - 1) \neq 0$ .

Теперь в условиях  $f'(\alpha) = 0$ ,  $f''(\alpha) = 0$ ,  $f'''(\alpha) = 0$  выполним вычисление  $X_n^{(3)}(r)$ , являющегося решением неоднородного уравнения Бесселя с правой частью  $-\frac{r}{2\alpha} J'_n(\alpha)$  и теми же условиями смещения и гладкости. Действуя по Лагранжу, определим

$$\Gamma X_n^{(3)}(r) = \begin{cases} C_{11}^{(3)}(r) J_n(\alpha r) + C_{12}^{(3)}(r) N_n(\alpha r), & 0 \leq r < r_0, e \\ C_{21}^{(3)}(r) J_n(\alpha r) + C_{22}^{(3)}(r) N_n(\alpha r), & r_0 \leq r < 1, \end{cases}$$

$$C_{120}^{(3)} = 0, C_{11}^{(3)} = \frac{\pi}{4\alpha} \int_0^r \rho^3 N_n(\alpha \rho) J'_n(\alpha \rho) d\rho = \frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho - \frac{r^3}{12\alpha^2} + C_{110}^{(3)},$$

$$C_{12}^{(3)} = -\frac{\pi}{8\alpha^2} \int_0^r \rho^3 dJ_n^2(\alpha \rho) = -\frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho,$$

$$C_{21}^{(3)}(r) = \frac{\pi}{4\alpha^2} \int_0^r \rho^3 N_n(\alpha \rho) dJ(\alpha \rho) = \frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - \frac{r^3 - r_0^3}{12\alpha^2} -$$

$$C_{22}^{(3)}(r) = -\frac{\pi}{8\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^3 dJ_n^2(\alpha\rho) = -\frac{\pi}{8\alpha^2} r^3 J_n^2(\alpha r) + \frac{\pi}{8\alpha^2} r_0^3 J_n^2(\alpha r_0) + \\ + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + C_{210}^{(3)}, \\ + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho + C_{220}^{(3)}$$

Отметим, что формула для вычисления интеграла  $\int \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho$  в справочных изданиях отсутствует, а для вычисления интеграла  $\int \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho$  имеется рекуррентная формула. Условие непрерывности  $\tilde{O}^{(3)}$  дает  $\tilde{N}_{110}^{(3)} - \tilde{N}_{120}^{(3)} = \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} C_{220}^{(3)} - \frac{r_0^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho$ , а из непрерывной дифференцируемости  $\tilde{O}^{(3)}$  при  $r = r_0$  следует  $\tilde{N}_{110}^{(3)} - \tilde{N}_{120}^{(3)} = \frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} C_{220}^{(3)} + \frac{r_0^3}{12\alpha^2} + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} \frac{J_n^2(\alpha r_0) N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho$ . Отсюда определяются  $\tilde{N}_{220}^{(3)}$  в виде

$$\text{Значение } \tilde{N}_{220}^{(3)} \text{ определяется также смещением} \\ \tilde{N}_{220}^{(3)} = \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) \\ X^{(3)}(r_0 - 0) = X^{(3)}(r_0 + 0) = X^{(3)}(1 - 0), C_{220}^{(3)} = -\frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) + [N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)]^{-1} \left\{ \frac{r_0 J_n(\alpha r_0)}{4\alpha^3} - \right. \\ \left. - \frac{J_n(\alpha)}{4\alpha^2} - \frac{1-r_0^3}{12\alpha^2} J_n'(\alpha) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n'(\alpha) \int_0^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n'(\alpha) \int_0^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho \right\}$$

что позволяет вычислить интеграл

$$\frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho = -\frac{J_n(\alpha)}{4\alpha^3 J_n'(\alpha)} - \frac{1-r_0^3}{12\alpha^2} \frac{J_n(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} \int_0^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \\ + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n'(\alpha) \int_0^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n'(\alpha)}{J_n'(\alpha)} \int_0^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho \left. \right\}$$

а вместе с ним выразить постоянную  $\tilde{N}_{220}^{(3)}$  через  $\tilde{N}_{110}^{(3)}$  и найденное значение  $\tilde{N}_{220}^{(3)}$ . Корректность задачи при малых изменениях  $r_0$  в любом промежутке  $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  дает возможность вычисления интеграла  $\int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho$ .

Если не исследовать предельную задачу при  $r_0 \rightarrow 0$ , а просто подставить найденные значения постоянных  $\tilde{N}_{110}^{(3)}$ ,  $\tilde{N}_{210}^{(3)}$  и  $\tilde{N}_{220}^{(3)}$  в формулу для  $\tilde{O}^{(3)}(r)$ , то получаем следующий результат. [3, 54]

Теорема 4. В условиях  $f^{(k)}(\alpha) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2$ , третий элемент жордановой цепочки  $\tilde{O}_n^{(3)}(r)$  имеет вид

$$\tilde{O}_n^{(3)}(r) = -\frac{r^3 J_n(\alpha r)}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho.$$

Замечание 2. Отметим расчеты [5; 6], где исследована соответствующая задача со смещениями в искомыми функциях.

Замечание 3. Общий случай  $s > 2$  является предметом будущей работы.

В  $s$ -мерном единичном шаре поставлена и исследована задачи определения собственных и присоединенных функций для оператора Лапласа со смещением и производных. При  $s = 2$  получены условия существования присоединённых функций не выше третьего порядка и выполнено их вычисление. Данные результаты будут основой исследовать задачи в более общего случай  $s > 2$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные. – М.: Наука. 1966. – 296 с.
- Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука. 1965. – 585 с.
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука. 1983. – 780 с.
- Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука. 1979. – 832 с.
- Логинов Б.В., Нагорный А.М. Об одной краевой задаче для уравнения Гельмгольца со смещениями внутри области // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. – 1987. – № 4. – С.182.
- Логинов Б.В., Нагорный А.М. О спектре одной задачи Бицадзе – Самарского // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С 2021.
- Abdullayev, A., Hidoyatova, M. Exact method to solve finite difference equations of linear heat transfer problems (2021) AIP Conference Proceedings, 2402, № 070021. DOI: 10.1063/5.0071430
- Abdullayev, A., Zhuvanov, K., Ruzmetov, K. A generalized solution of a modified Cauchy problem of class  $R_2$  for a hyperbolic equation of the second kind. Journal of Physics: Conference Series, (2021), 1889(2), DOI:10.1088/1742-6596/1889/2/022121
- Yuldashev, T.K., Islomov, B.I., Abdullaev, A.A. On Solvability of a Poincare–Tricomi Type Problem for an Elliptic–Hyperbolic Equation of the Second Kind. Lobachevskii Journal of Mathematics, (2021), 42(3), pp. 675. DOI: 10.1134/S1995080221030239
- Abdullayev, A.A., Ergashev, T.G. Poincare-tricomi problem for the equation of a mixed elliptico-hyperbolic type of second kind. Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Matematika i Mekhanika, (2020), (65), pp. 21 DOI 10.17223/19988621/65/1