# 15-Mavzu: Kompleks sonlar

**5.3.1.** $z=x+iy$ кўринишдаги ифода *комплекс сон* дейилади, бунда $x$ ва $y$ — ҳақиқий сонлар, $i$ эса $i^2=-1$ тенглик билан аниқланади ва у *мавҳум бирлик* деб аталади.

$x$ ва $y$ сонлар $z$ комплекс соннинг мос равишда *ҳақиқий* ва *комплекс қисми* дейилади ва $x=\mathrm{Re}z$, $y=\mathrm{Im}z$ кўринишда белгиланади.

Агар $y=0$ бўлса, $z=x$ — ҳақиқий сон, агар $x=0$ бўлса, $z=iy$ — соф мавҳум сон бўлади. Шундай қилиб, ҳақиқий ва мавҳум сонлар $z$ комплекс соннинг хусусий ҳолидир.

Агар $z_1=x_1+iy_1$, ва $z_2=x_2+iy_2$ икки комплекс соннинг мос равишда ҳақиқий ва мавҳум қисмлари тенг бўлса, яъни $x_1=x_2$ ва $y_1=y_2$ бўлса, бу комплекс сонлар тенг дейилади, яъни $z_1=z_2$.

Мавҳум қисмларининг ишораси билангина фарқ қилувчи $z=x+iy$ ва $\bar{z}=x-iy$ комплекс сонлар *қўшма комплекс сонлар* дейилади.

**5.3.2.** Агар $z_1=x_1+iy_1$ ва $z_2=x_2+iy_2$ иккита комплекс сон берилган бўлса, улар устида алгебраик амаллар қуйидагича бажарилади:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$
$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+$$
$$+i(x_1y_2+x_2y_1),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+$$
$$+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Комплекс сонларни даражага кўтариш иккиҳадни даражага кўтариш каби бажарилади, бунда $i$ сонининг даражалари қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1 \text{ ва ҳ. к.}$$

Умуман, $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$.

1-мисол. Ушбу $z_1=3-i$, $z_2=-2+3i$, $z_3=4+3i$ комплекс сонлар берилган бўлсин. $z=\dfrac{z_1-z_2\cdot z_3}{z_1^3+z_3}$ ни ҳисобланг.

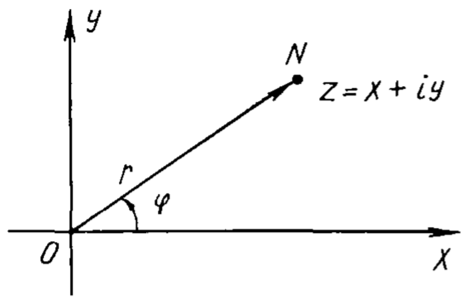
Ечиш. Кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$z_2\cdot z_3=(-2+3i)(4+3i)=(-8-9)+i(12-6)=-17+6i;$$
$$z_1-z_2\cdot z_3=(3-i)-(-17+6i)=(3+17)+i(-1-6)=20-7i;$$
$$z_1^3=(3-i)^3=27-27i+9i^2-i^3=(27-9)+i(-27+1)=18-26i;$$
$$z_1^3+z_3=(18-26i)+(4+3i)=(18+4)+i(-26+3)=22-23i.$$

Шундай қилиб,

$$z=\frac{20-7i}{22-23i}=\frac{(20-7i)(22+23i)}{(22-23i)(22+23i)}=\frac{(440+161)+i(460-154)}{22^2+23^2}=$$
$$=\frac{601}{1013}+i\frac{306}{1013}.$$

**5.3.3.** Ҳар бир $z=x+iy$ комплекс сон геометрик жиҳатдан $Oxy$ координаталар текислигининг $(x, y)$ нуқтаси ёки $\overline{ON}$ вектори билан тасвирланади. Комплекс сон тасвирланадиган $Oxy$ текислиги *комплекс текислик* дейилади ва $(z)$ каби белгиланади. $z=x$ ҳақиқий сонлар *ҳақиқий ўқ* деб аталувчи $Ox$ ўқ нуқталари билан тасвирланади. Соф мавҳум $z=iy$ сонлар *мавҳум ўқ* деб аталувчи $Oy$ ўқнинг нуқталари билан тасвирланади.




22- шакл

$z$ комплекс сонига мос келувчи $N$ нуқтанинг ҳолатини $r$ ва $\varphi$ қутб координаталари билан ҳам аниқлаш мумкин (22- шакл). Бунда координаталар бошидан $N$ нуқтагача бўлган масофага тенг $r=|\overline{ON}|$ сони *комплекс соннинг модули* дейилади ва $|z|$ билан белгиланади; $\overline{ON}$ векторнинг $Ox$ ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган $\varphi$ бурчак *комплекс соннинг аргументи* дейилади ва у $\mathrm{Arg}z$ деб белгиланади.

Ҳар қандай $z=x+iy$ комплекс сон учун қуйидаги формулалар ўринлидир:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x},$$

бунда $\varphi=\arg z$ нинг бош қиймати $0\leqslant\arg z<2\pi$ шартни қаноатлантиради.

2- мисол. $z=-\sqrt{3}+i$ комплекс соннинг модули ва аргументини топинг.

Ечиш. $x=-\sqrt{3}$, $y=1$ бўлганлиги учун $r=\sqrt{x^2+y^2}=2$. $\mathrm{tg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ тенгламадан $\varphi$ аргументни топамиз:

$$\varphi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$

Шундай қилиб, $r=2$, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

**5.3.4.** Комплекс соннинг $z=x+iy$ кўринишдаги ифодаси комплекс соннинг *алгебраик шакли* дейилади.

Комплекс соннинг $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ кўринишдаги ифодаси унинг *тригонометрик шакли* дейилади.

Эйлернинг

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$$

формуласидан фойдаланиб, комплекс сон ёзилишининг *кўрсаткичли шаклига* эга бўламиз:

$$z=re^{i\varphi}.$$

2- мисолда $z=-\sqrt{3}+i$ комплекс соннинг модули $r=2$ ва аргументи $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ эканини аниқлаган эдик.

Шуларни инобатга олсак, бу соннинг тригонометрик ва кўрсаткичли шакллари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\quad z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}.$$

**5.3.5.** Комплекс сонларни кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, улардан илдиз чиқаришда комплекс сон ёзилишининг тригонометрик ва кўрсаткичли шаклларидан фойдаланилади:

Агар

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

бўлса, ушбу формулалар ўринлидир:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^n\cdot e^{in\varphi}.$$

Охирги формула *Муавр формуласи* дейилади.

Тригонометрик ёки кўрсаткичли шаклдаги комплекс сондан $n$ даражали илдиз чиқариш учун ушбу формуладан фойдаланилади:

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+$$
$$+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}.$$

$k$ га 0, 1, 2, ..., $n-1$ қийматлар бериб, илдизнинг $n$ та ҳар хил қийматларига эга бўламиз (бунда $\sqrt[n]{r}$ арифметик илдиз).

Илдизнинг барча $n$ та қийматларини тасвирловчи нуқталарнинг геометрик талқини маркази қутбда, радиуси $\sqrt[n]{r}$ бўлган айланага ички чизилган мунтазам $n$ бурчакнинг учларини англатишидан иборатдир.

3-мисол. $(-\sqrt{3}+i)^6$ ни ҳисобланг.

Ечиш. 2-мисол ва Муавр формуласидан фойдаланиб қуйидаги ечимга эга бўламиз:

$$z^6=2^6\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot 6+i\sin\frac{5\pi}{6}\cdot 6\right)=2^6e^{5\pi i}=$$

$$=64(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=-64.$$

4-мисол. $\sqrt[3]{-1}$ ни топинг.

Ечиш. $z=-1$ сон учун $r=1$, $\varphi=\pi$. Шу сабабли унинг тригонометрик шакли қуйидагича ёзилади:

$$z=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi).$$

$n$-даражали илдиз чиқариш формуласидан фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$w_k=\sqrt[3]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}=$$

$$=e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{3}},\ \text{бунда } k=0,\ 1,\ 2.$$

$k$ га кетма-кет 0, 1, 2 қийматларни бериб, илдизнинг учала қийматини топамиз:

$$w_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{\frac{i\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{i\pi}=-1,$$

$$w_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=e^{\frac{5\pi i}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**5.3.6.** Эйлернинг

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

формуласи даража кўрсаткичи комплекс ўзгарувчидан иборат кўрсаткичли функцияни тригонометрик функциялар орқали ифодалайди. Тригонометрик функциялар $\cos\varphi$ ва $\sin\varphi$ кўрсаткичли функциялар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$