# 10-Mavzu: IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR. Aylana va Ellips

Buyuk vatandoshimiz Abu Rayhon Beruniy o'z kuzatishlari natijasida "Sayyora harakat davomida Quyoshga ikki marta yaqinlashadi va ikki marta uzoqlashadi" degan fikrni yozib qoldirgan. Beruniy xulosasini quyidagicha tushunish mumkin: sayyora oval shaklidagi traektoriya (harakat chiziq) bo'yicha harakatlanadi, ovalning markazida esa Quyosh joylshgan.

Beruniy Qadimgi Yunon matematikalari va astronomlarining asarlarini yaxshi o'rgangan. Xususan, u ellipsni va uning xossalarini bilgani holda o'zi aytgan traetoriya (ya'ni oval chiziq) afsuski ellips bo'ladi degan xulosaga kelmaydi. Taxminimizcha ellipsning ikkita teng huquqli fokuslari mavjudligi, Quyosh esa bir dona bo'lib, uni qaysi fokusga joylashtirish mumkinligi (ya'ni simmetriyaning buzilishi) va Quyosh ellipsning markaziga joylashtirilgan holda fokuslar qanday fizik ma'noga ega bo'lish mumkinligi kabi savollar Beruniyga Keplerdan olti asr avval to'la haqiqatga yetib kelishiga to'sqinlik qilgan.

Sayyoralar harakatining asl qonunlarini ochish mashhur nemis olimi Iogann Keplerga nasib etdi. Fan sohasida nihoyatda serg'ayrat va sinchkov Kepler astronomik jadvallarni (zijlarni) chuqur o'rganib, atroflicha tahlil qildi va XVII asr boshida o'zining uchta qonunini e'lon qildi. Bular:

1. Har bir sayyoraning orbitasi ellipsdan iborat va uning fokuslaridan birida Quyosh joylashgan.

2. Har bir sayyoraning radius-vektori teng vaqt ichida teng yuzalarni chizadi. *Sayyoraning radius-vektori* deb, vaqt o'tishi bilan o'zgarib boruvchi, shu sayyorani Quyosh bilan birlashtirib turuvchi yo'nalishli kesma tushuniladi.

3. Orbita radiusi kubining aylanish davri kvadratiga nisbati Quyosh sistemasidagi barcha sayyoralar uchun bir xil.

Orbitaning radiusi deganda, ellipsning katta yarim o'qi tushuniladi.
1684 yili Iondan qahvaxonalarining birida uch ingliz olimlari – tabiatshunos Robert Guk (Guk qonuni), astronom Egmund Gelley (Galley kometasi) va arxitektor Kristofor Ren (Iondandagi avliyo Pavel soborining muallifi) lar orasida munozara bo'lib o'tadi, suhbat mavzusi Quyoshga, ungacha bo'lgan masofa kvadratiga teskari proporsional kuch bilan tortiluvchi jismning traektoriyasi qanday bo'lishi kerakligi haqida edi.
Uchala olim ham buning ellips ekanligiga ishonchlari komil edi-yu, lekin buni qanday isbotlashni bilishmasdi, hatto Ren buni isbotlagan odamga mukofat e'lon qildi.

O’sha paytda 28 yoshda bo’lgan Galley Nyutonga murojaat qilishga ahd qilib, Kembridjga, uning oldiga yo’l oladi. Nyuton Galleyning savolini eshitishi hamon, darrov **“Elips”** deb javob beradi.

Quvonchdan hayratlangan Galley buni u qaerdan bilishini so’radi. **“Qaerdan? Buni men hisoblaganman”** – deb javob berdi Nyuton.

Galleyning iltimosiga ko’ra, Nyuton unga o’z hisoblarini yuborishga va’da berdi, ammo bu va’dani bajarish davomida butun boshli bir kitobni yozishga to’g’ri keldi. Ushbu kitobda avval mexanika qonunlari (hozirgi paytda Nyutonning uchta qonuni nomi bilan mashhur qonunlar) bayon qilingan va bu qonunlarga asoslanib tortilish kuchi orasidagi masofaning kvadratiga teskari proporsional degan farazga ko’ra tortiluvchi jismlarning harakat traektoriyalari topilgan.

Tarixiy bo’lib qolgan ushbu kitob 1687 yili **“Tabiiy falsafaning matematik asoslari”** nomi bilan (nashr harajatlarining bir qismini to’lagan Galleyning yordami tufayli) chop etildi.

Nyuton ushbu tortilish qonuniga bo’ysunib harakatlanuvchi har bir jism, tortilish markazi atrofida, konus kesimida hosil bo’ladigan chiziq bo’ylab harakat qilishini, shuningdek tortilish markazi ushbu chiziqning fokusida joylashishi kerakligini aniqladi.

Demak, jismning harakat traektoriyasi yo ellips, yo parabola, yoki giperbola bo’lishi kerak.

Ushbu qonun Quyosh sistemasiga nisbatan tatbiq etilsa, Keplerning sayyoralar harakati haqidagi birinchi qonuni kelib chiqadi.

Bunday xulosa planetalarning Quyosh atrofidagi harakati uchun ham, Oyning yer atrofidagi harakati uchun ham ta’lluqli. Shuningdek, atrofimizdagi barcha moddiy jismlarga aloqador bo’lganligi uchun ham, bu qonun butun olam tortilish qonuni deb ataladi.

Xususan, Nyuton isbotlagan tasdiqqa ko’ra, Quyosh sistemasiga kirib qolgan kosmik jism, yo Quyosh atrofida elliptik orbita bo’ylab davriy harakat qiladi, yo Quyosh sistemasiga parobola yoki giperbola bo’ylab kirib keladiyu va undan butunlay chiqib ketadi. Boshqacha traektoriyadagi harakat bo’lishi mumkin emas, masalan kosmik jism Quyosh sistemasiga kirib kelib uning atrofida ikki yoki uch marta aylanib, so’ngra undan chiqib keta olmaydi (albatta bu boshqariladigan kema bo’lmasa).

## ***IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR.***

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar $x$ va $y$ o’zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko’rinishi quyidagicha bo’ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

Bu tenglama ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Bu yerda A, B, C, D, E, F – haqiqiy o'zgarmas sonlar, bundan tashqari A, B yoki C lardan kamida bittasi noldan farqli.

Ushbu bobda sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola hamda porabalalarni qaraymiz. Bu egri chiziqlarning tenglamalarini topib, ular yordamida geometrik xossalarini o'rganamiz.

## ***A Y L A N A   V A   E L L I P S.***

### *1 – §. Aylana va uning tenglamasi.*

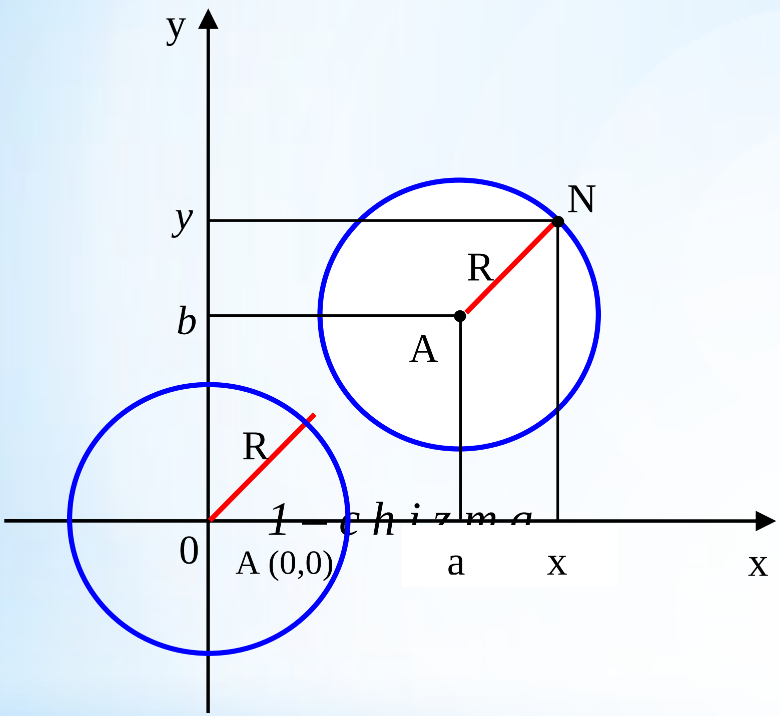
***T a' r i f.*** Markaz deb atalauvchi nuqtadan barobar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning to'plamiga aylana deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida aylananing radiusi $R$ va markazi A $(a\ ;\ b)$ nuqtada bo'lsin. $N\ (x\ ;\ y)$ aylanadagi ixtiyoriy nuqta. Aylananing ta'rifiga ko'ra: $AN=R$.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$AN = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Tenglikning ikkita tomonini kvadratga ko'tarib, AN=R ekanligini e'tiborga olsak $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (1.1) kelib chiqadi. (1-chizma)




$N(x,y)$ aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo'lgani uchun (1.1) tenglama aylananing markazi $A(a,b)$ nuqtada bo'lgan kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Aylananing tenglamasi o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajalidir. Xususiy holda, agar aylananing markazi koordinatalar boshida bo'lsa, uning tenglamasi:

$$x^2+y^2=R^2 \quad (1.2)$$

(1.1) tenglamada qavslarni ochib va ba'zi bir ayniy almashtirishlarni bajarib, aylananing quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \quad (1.3)$$

Bu tenglamani 2–tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan solishtirganda aylana tenglamasi uchun quyidagi ikkita shart bajarilganini ko'rish mumkin: 1) $x$, $y$ koordinatalar ko'paytmasi bo'lgan $xy$li had qatnashmayapti; 2) $x^2$ va $y^2$ lar oldidagi koeffisientlar o'zaro teng, ya'ni $A = C \neq 0$; $B = 0$. Bu holda (1) tenglama $Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (1.4) ko'rinishda bo'lib aylanani tasvirlaydi.

Agar $a = -\dfrac{D}{A}$; $b = -\dfrac{E}{A}$; $R^2 = \dfrac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$ (1.5) bo'lsa, (1.4) tenglama (1.2) tenglamaga aylanadi va, aksincha (1.1) tenglamadan (1.5) formulalar yordamida (1.4) tenglamaga o'tish mumkin.

***Mumkin bo'lgan uchta holni ko'ramiz:***

1) $D^2 + E^2 - AF > 0$. Bu holda $\left(x + \dfrac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \dfrac{E}{A}\right)^2 = \dfrac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$ (1.6) tenglama va demak, unga teng kuchli bo'lgan (1.4) tenglama ham markazi $O_1\left(-\dfrac{D}{A}; -\dfrac{E}{A}\right)$ nuqtada bo'lgan, radiusi $R = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - AF}}{A}$ dan iborat aylanani aniqlaydi.

2) $D^2+E^2-AF=0$. Bu holda (1.6) tenglama $\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ushbu tenglamani va demak, unga teng kuchli bo'lgan (1.4) tenglamani haqiqiy yagona $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$ nuqtani tasvirlaydi.

3) $D^2+E^2-AF<0$ bo'lsa, (1.6) yoki (1.4) tenglamaning radiusi mavhum bo'lib, bu holda haqiqatda aylana mavjud bo'lmasa-da, umumiylik nuqtai nazaridan mavhum aylana deyiladi.

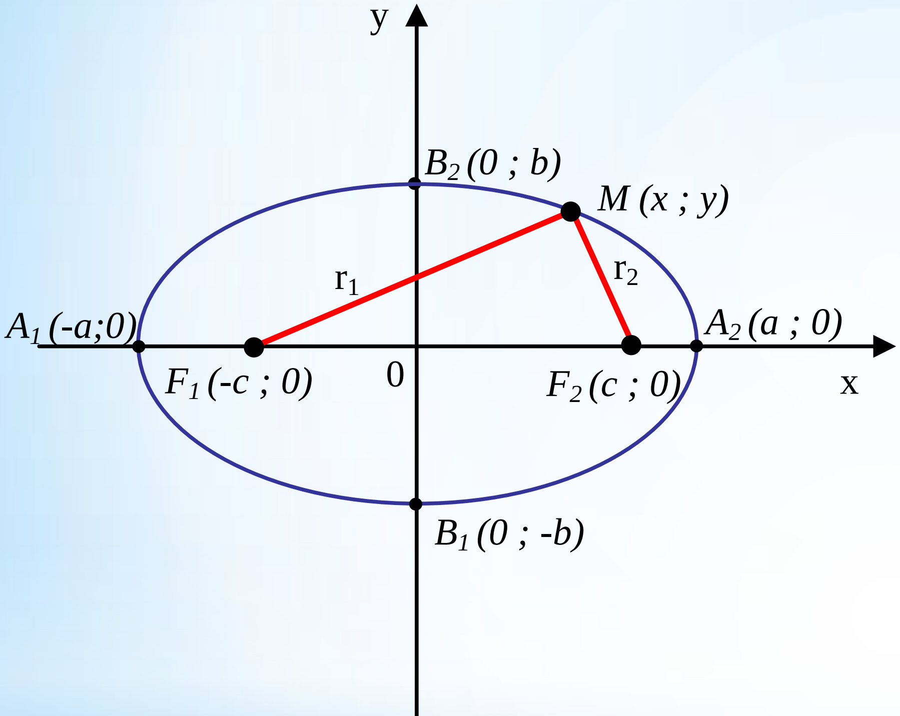
## 2 – §. ELLIPS VA UNING TENGLAMASI.

Yulduzli osmonni kuzatgan tadqiqotchilar orasida eng buyuklaridan biri, Ulug'bekdan so'ng ikkinchi bo'lgan Tixo Brage erishgan natijalar va hisoblashlardagi aniqliklar yana shubhalar manbai bo'lib qoldi. Endigi shubha sayyoralarning Quyosh atrofidagi harakat orbitalari (traektoriyasi) aylanadan iborat ekaniga bildirilar edi.

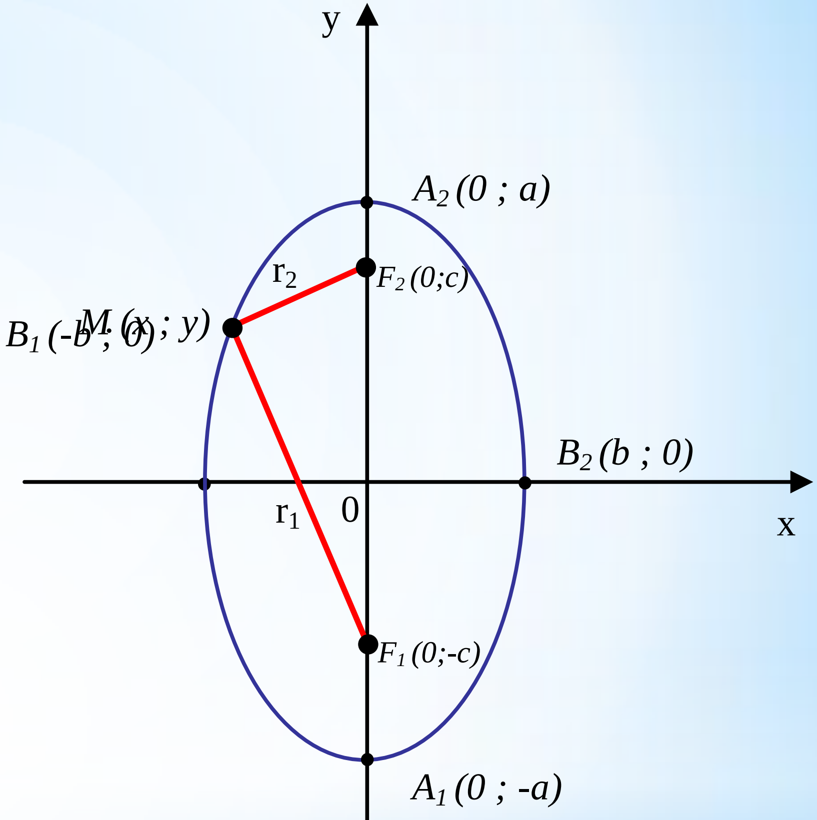
Haqiqatan, Tuxo Bragening shogirdi va yordamchisi, nemis astronomi Iogani Kepler ustozi tomonidan olingan ma'lumotlar asosida Marsning harakatini o'rgandi va bu sayyoraning traektoriyasi ellips ekanligini aniqladi.

Ellips, bu qanday chiziq? U haqida tasavvurga ega bo'lish uchun, bir bo'lak ip uchlarini bir varoq qog'ozning ikki nuqtasiga mahkamlanadi va bu ipni qalam uchi bilan tarang tortiladi. *(2 – chizma).*

Qalamni shu tarang holatda harakatlantirilsa, uning uchi qog'ozda chizadigan egri chiziq ellips bo'ladi.




*2 – c h i z m a.*




*3 – c h i z m a.*

**Boshqacha aytganda, ellips** – bu barcha, shunday $M$ nuqtalardan iborat bo'lgan yassi figuraki, bunda $M$ dan fokuslar deb ataluvchi $F_1$ va $F_2$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas songa teng (bu kattalik ($2a$), fokuslar orasidagi masofa $(2c)$ dan katta bo'lishi shart): $|MF_1| + |MF_2| = const = 2a$ (2.1)

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib, $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ va $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ni hosil qilamiz, demak, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ (2.2). Bu tenglamani soddalashtirgandan keyin: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ (2.3)

Ellipsning ta'rifiga ko'ra $2a > 2c$ bo'lgani uchun $a^2 - c^2$ son musbat: $a^2 - c^2 = b^2$ (2.4) belgilash kiritamiz. U holda (2.3) tenglama $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ yoki $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2.5) ko'rinishni oladi.

(2.5) tenglama fokuslari $Ox$ o'qda yotgan ellipsning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi. (2-chizma) (2.5) tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

Ellipsning simmetriya o’qlarini ellips o’qlari deb, ularning kesishgan nuqtasini ellips markazi deb ataymiz. Ellips fokuslari joylashgan o’q fokal o’q deyiladi.

Koordinatalar boshi uning simmetriya markazi deyiladi.

$F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ nuqtalar ellipsning koordinata o’qlari bilan kesishgan nuqtalari. Bu nuqtalar odatda ellipsning uchlari deyiladi. $AA_1 = 2a$ kesma ellipsning katta o’qi, $BB_1 = 2b$ kesma esa, ellipsning kichik o’qi deyiladi. $a$ va $b$ lar ellipsning yarim o’qlaridir.

Agar ellipsning fokuslari $Oy$ o’qda yotsa (3-chizma), uning tenglamasi $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$ (2.6) ko’rinishda bo’ladi.

Ellipsga doir hamma masalalarda ellipsning simmetriya o’qlari koordinata o’qlari bilan ustma – ust tushadi deb faraz qilinadi.

## 3 – §. ELLIPSNING EKSSENTRISITETI, FOKAL – RADIUSLARI, DIREKTRISALARI.

Ellipsning qanday ko'rinishda bo'lishi, ellipsning ekssentrisiteti deb ataluvchi miqdor bilan aniqlanadi.

***T a' r i f.*** Ellipsning ekssentrisiteti deb, fokuslar orasidagi $(2c)$ masofaning katta o'qi $(2a)$ nisbatiga aytiladi, ya'ni $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$ (3.1) yoki $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a}} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ (3.2).

$c < a$ bo'lgani uchun ellips ekssentrisiteti birdan kichik: $\varepsilon < 1$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatan, (2.4) formuladan $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon$ kelib chiqadi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: ellipsning ekssentrisiteti qanchalik kichik bo'lsa, uning kichik yarim o'qi $b$ katta yarim o'qi $a$ dan shuncha kam farq qiladi, ya'ni ellips fokal o'q bo'ylab shuncha kam tortilgan bo'ladi.

(3.2) formuladan ko'rinadiki, $b$ orta borsa $\varepsilon$ kichiklasha boradi va aksincha, $b$ kamaya borsa $\varepsilon$ kattalasha boradi. $b$ ning limiti nolga intilsa $\varepsilon = 1$ bo'lib, ellips ikkilangan kesmaga aylanadi.

Katta va kichik o'qlari teng bo'lgan ellips aylanadir, ya'ni b=a limit holda a radiusli aylana hosil bo'ladi: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ yoki $x^2+y^2=a^2$ (3.3). Bunda $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-a^2}=0$ va ellips fokuslari go'yo bitta nuqtada – aylana markazida birlashib ketadi. Aylana essentrisiteti nolga teng: $\varepsilon=\frac{0}{a}=0$.

Ellips va aylana orasidagi bog'lanishni boshqa nuqtai nazardan ham o'ranish mumkin. Yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsni a radiusli aylananing proeksiyasi deb qarash mumkin ([4], 134 bet).

***T a' r i f.*** Ellipsning fokuslaridan ixtiyoriy M(x;y) nuqtasigacha bo'lgan masofalar, M(x;y) nuqtaning fokal–radiuslari deyiladi va $r_1$=a+εx, $r_2$=a+εx (3.4) formulalar bilan aniqlanadi (4–cizma). Ellipsning ta'rifiga ko'ra: $r_1+r_2=2a$ (3.5)

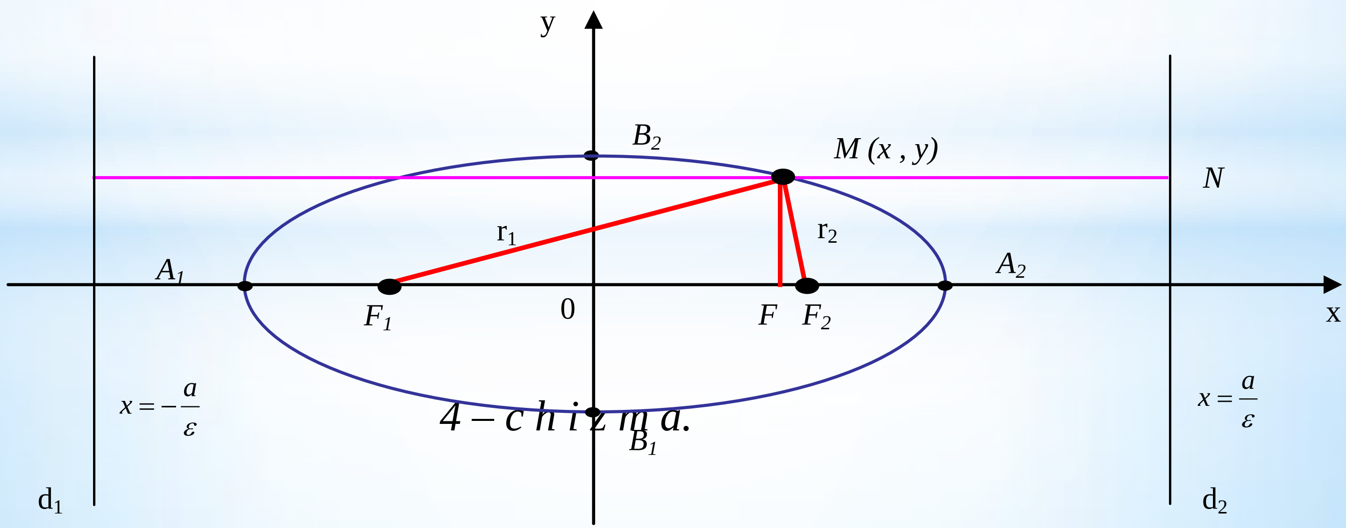
Demak, ellipsning har qanday nuqtasi fokal radiuslarining yig'indisi uning katta o'qiga teng.

***T a' r i f.*** Ellipsning direktrisalari deb ushbu $x=\frac{a}{\varepsilon}$ va $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ (3.6) tenglamalar bilan aniqlanadigan ikki to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Ellipsning direktrisalari y o'iga parallel va ellips markazidan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ uzoqlikda turgan to'g'ri chiziqlardir. $\varepsilon<1$ bo'lganligi uchun $\frac{a}{\varepsilon}>a$; demak, direktrisalar ellipsdan tashqarida joylashadi. (4-chizma). $|d_1d_2|-$ direktrisalar orasidagi masofa.

Markazning bir tomonida joylashgan direktrisa va fokus bir – biriga mos direktrisa va fokus deb ataladi.

Ellipsning nuqtalari bir – biriga mos fokus va direktrisaga nisbatan ushbu xossaga ega: ellipsning har bir nuqtasidan fokusgacha olingan masofaning o'sha nuqtadan mos direktrisagacha bo'lgan masofaga nisbatan ellipsning ekssentrisitetiga baravar. (isboti [6], 53-bet)




*4 – chizma.*

$d_1$ va $d_2$ direktrisalarning tenglamalari:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ va } x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ (3.6) yoki } x = \frac{-a^2}{c} \text{ va } x = \frac{a^2}{c} \text{ (3.7)}$$

Ellipsning ixtiyoriy M (x;y) nuqtasidan fokusgacha bo'lgan ($r_1$ yoki $r_2$) masofasining shu M (x;y) nuqtadan direktrisagacha ($d_1$ yoki $d_2$) bo'lgan masofaga nisbati ellipsning ekssentrisitetiga teng, ya'ni:

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon \text{ yoki } \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \text{ (3.8)}$$

Ellipsning o'qlri koordinata o'qlariga parallel bo'lib, simetriya markazi biror ($x_0$, $y_0$) nuqtda bo'lganda, uning tenglamasi

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \text{ (3.9) ko'rinishda bo'ladi.}$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning $M_1(x_1 ; y_1)$ nuqtasiga urinma bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi: $\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$ (3.10).