13 – MA’RUZA
“TEKISLIKNING UMUMIY KO`RINISHDAGI TENGLAMALARI VA ULARNI YASASH TEKISLIKKA DOIR ASOSIY MASALALAR ”.

I. Faraz qilaylik, *x*, *y*, *z* – ixtiyoriy o‘zgaruvchi miqdorlar bo‘lsin. Agar

$$F(x,\ y,\ z)=0 \qquad (1)$$

tenglik *x*, *y*, *z* larning faqat ayrim qiymatlaridagina o‘rinli bo‘lsa, u holda (1) ni *x*, *y*, *z* larga nisbatan tenglama deb ataymiz. Uchta son $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ (1) tenglamani qanoatlantiradi deymiz, agar (1) dagi noma’lumlar o‘rniga shu sonlarni qo‘yganda tenglik ayniyatga aylansa. (1) tenglamani qanoatlantiradigan har bir $x_0,\ y_0,\ z_0$ sonlar uchligiga fazoning $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasini mos qo‘yamiz. Bunday nuqtalarning geometrik o‘rnini **sirt** deb ataymiz, **(1) ni esa shu sirtning tenglamasi** deymiz.

Agar sirt tenglamasi berilgan bo‘lib, biror nuqtaning shu sirtda yotish yoki yotmasligini tekshirish talab qilingan bo‘lsa, u holda berilgan nuqtaning koordinatalarini tenglamaning noma’lumlari o‘rniga qo‘yish kifoya. Analitik geometriyaning vazifasi qaralayotgan sirtni uning tenglamasi yordamida o‘rganishdir.

Sirtning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasi uning **siljuvchi nuqtasi** deb ataladi. Misol sifatida sferaning tenglamasini tuzaylik. Sferaning ta’rifiga ko‘ra, sferaning markazi deb ataluvchi $C(a, b, c)$ nuqtadan sferaning siljuvchi nuqtasi orasidagi masofa r o‘zgarmasdir. Demak,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

yoki

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Agar sferaning markazi koordinatalar boshida bo‘lsa, u holda

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

Fazodagi analitik geometriyada asosan algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirtlar o‘rganiladi. Masalan, tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lgan sirt **1-tartibli sirt** deb ataladi. Tenglamasi

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \qquad (3)$$

bo‘lgan sirtlarni **2-tartibli sirtlar** deb ataymiz. Yuqorida ko‘rilgan misoldan sfera 2-tartibli sirt ekanligi kelib chiqadi.

II. 1-teorema. Dekart koordinatalar sistemasida tekislik 1-tartibli sirtdir.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida berilgan α tekisligida uning biror nuqtasi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ va unga perpendikulyar o‘tgan qandaydir $\vec{n}=\{A, B, C\}$ vektor berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, $M(x, y, z)$ tekislikning siljuvchi nuqtasi bo‘lsin. Bu nuqta α tekisligida yotishi uchun $\overline{M_0 M}$ vektor $\vec{n}$ ga perpendikulyar bo‘lishi shart, ya’ni $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$.

Vektorlarning perpendikulyarlik shartidan $\overline{M_0M}\circ\vec{n}=0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{4}$$

kelib chiqadi. Agar $M(x, y, z)$ nuqta α tekisligida yotmasa, (4) o‘rinli bo‘lmaydi, shu sababli (4) tenglik $M(x,y,z)$ nuqtaning o‘rnini to‘la aniqlaydi. Agar (4) dagi qavslarni ochib va $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ deb belgilasak,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

hosil bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekislikka perpendikulyar bo‘lgan nol bo‘lmagan har qanday vektor tekislikning **normal vektori** deb ataladi. Shu sababli, (4) tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo‘lgan va $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tgan **tekislik tenglamasi**ni ifodalaydi.

2-teorema. Dekart koordinatalar sistemasida har qanday 1-tartibli tenglama tekislikni aniqlaydi.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida (2) tenglama berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, x_0, y_0, z_0 lar shu tenglamaning biror yechimi bo‘lsin, ya’ni (2)ni qanoatlantiruvchi sonlar bo‘lsin. U holda

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \tag{6}$$

bo‘ladi. (2) dan (6) ni ayirsak

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

hosil bo‘ladi. Ma’lumki, bu tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo‘lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasidir. (4) tenglama (2) ga ekvivalent bo‘lgani uchun (2) ham *a* tekislikning tenglamasi bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekislikning (2) tenglamasini uning umumiy tenglamasi deb ataymiz.

Misol. $\vec{n} = \{2, 2, 3\}$ vektorga perpendikulyar bo‘lib, $M_0(1,1,1)$ nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. (4) ga asosan

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

yoki

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0$$

3-teorema. Agar ikki $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$ va $A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0$ tenglamalar bir tekislikni ifodalasa, u holda bu tenglamalarning mos koeffitsiyentlari o‘zaro proporsional bo‘ladi.

Isboti. Haqiqatan, agar teorema sharti o‘rinli bo‘lsa, u holda $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ vektorlar berilgan tekislikka perpendikulyar bo‘lishadi, demak, ular o‘zaro kolleniar. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra, A_2, B_2, C_2 sonlar A_1, B_1, C_1 sonlarga proporsional bo‘ladi. Agar proporsionallik koeffitsiyentini μ desak, $A_2 = A_1 \mu,\ B_2 = B_1 \mu,\ C_2 = C_1 \mu$. Agar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, u holda uning koordinatalari har bir tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$ va $A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0$ bo‘ladi. Agar ularning birini μ ga ko‘paytirib, ikkinchisidan ayirsak $D_2 - D_1 \mu = 0$ hosil bo‘ladi. Bundan esa,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \mu$$

kelib chiqadi.

III. Ma’lumki, *A*, *B*, *C*, *D* koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng bo‘lmaydi. (2) tenglamada bu koeffitsiyentlarning ayrimlari nolga teng bo‘lgan bir necha xususiy hollarni ko‘rib chiqaylik.

1) $D=0$; tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko‘rinishga keladi. Bu tenglamani $x=0$, $y=0$, $z=0$ sonlar qanoatlantiradi, ya’ni tekislik koordinatalar boshidan o‘tadi.
2) $C=0$; tenglama $Ax+By+D=0$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tekislikning normal vektori $\vec{n}=\{A,B,0\}$, z o‘qiga perpendikulyar, demak, tekislikni o‘zi shu o‘qga parallel o‘tadi.
3) $B=0$, $C=0$; bunda $Ax+D=0$ ga ega bo‘lamiz. Uning normal vektori $\vec{n}=\{A,0,0\}$ y va z o‘qlariga perpendikulyar, u holda tekislik Oyz tekisligiga parallel o‘tadi. Xususan, agar

$D=0$ bo‘lsa, $x=0$ hosil bo‘lib, bu tekislik $O\ y\ z$ koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushishiga ishonch hosil qilamiz.

Yuqoridagidek fikr yuritib, $Ax+Cz+D=0$ tenglama y o‘qiga parallel tekislikni, $By+Cz+D=0$ tenglama x o‘qiga parallel tekislikni aniqlashiga ishonch hosil qilamiz. Bularning xususiy holi sifatida, $y=0$ tenglama $O\ x\ z$ koordintalar tekisligining, $z=0$ esa $O\ x\ y$ tekisligining tenglamasi ekanligini ko‘ramiz.

1) A, B, C, D koeffitsiyentlarning birortasi ham nolga teng bo‘lmasin. U holda ozod hadni tenglikning o‘ng tomoniga o‘tkazib, tenglamani – D ga bo‘lib yuboramiz:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$$

yoki

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

Agar $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$ belgilashlar kiritsak,

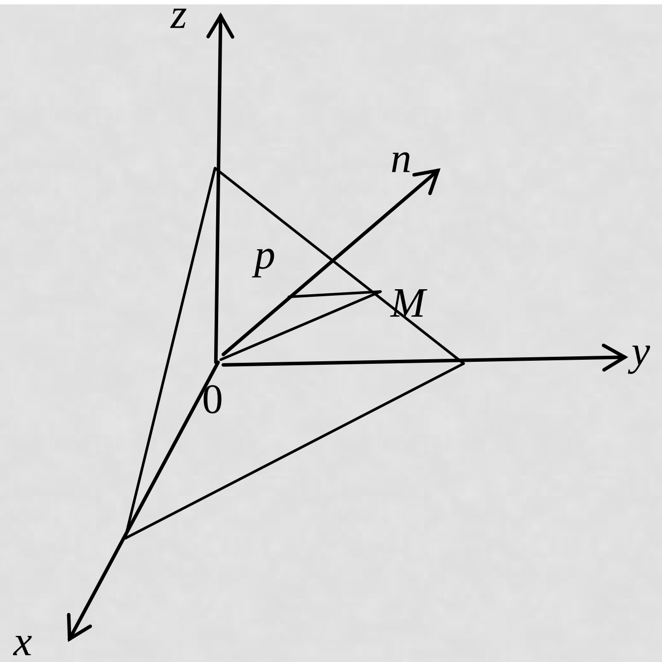
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (6)$$

hosil bo‘ladi. (6) tenglamani tekislikning kesmalardagi tenglamasi deb atashadi.

IV. Faraz qilaylik, bizga π tekisligi, uning normali $\vec{n}$ va koordinatalar boshidan tekislikkacha bo‘lgan masofa *p* berilgan bo‘lsin. $\vec{n}$ vektorning koordinata o‘qlari bilan tashkil etgan burchaklari α, β, γ bo‘lsin. Agar $\vec{n}_0$,$\vec{n}$ vektorning orti bo‘lsa, u holda

$$\vec{n}_0=\{cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma\}$$

bo‘ladi. Tekislikning siljuvchi nuqtasini *M*(*x*, *y*, *z*) desak, uning radius-vektori $\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$ bo‘ladi. Chizmadan ko‘rinadiki, $n\,p_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM}=p$



Ma’lumki,

$$n\,p_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM} = \left|\vec{n}_0\right| \cdot n\,p_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM} = \vec{n}_0 \circ \overrightarrow{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

Bundan,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (7)$$

(7) tenglama **tekislikning normal tenglamasi** deyiladi.

Agar tekislikning tenglamasi (2) ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, uni normal tenglamami yoki yo‘qmi ekanligini

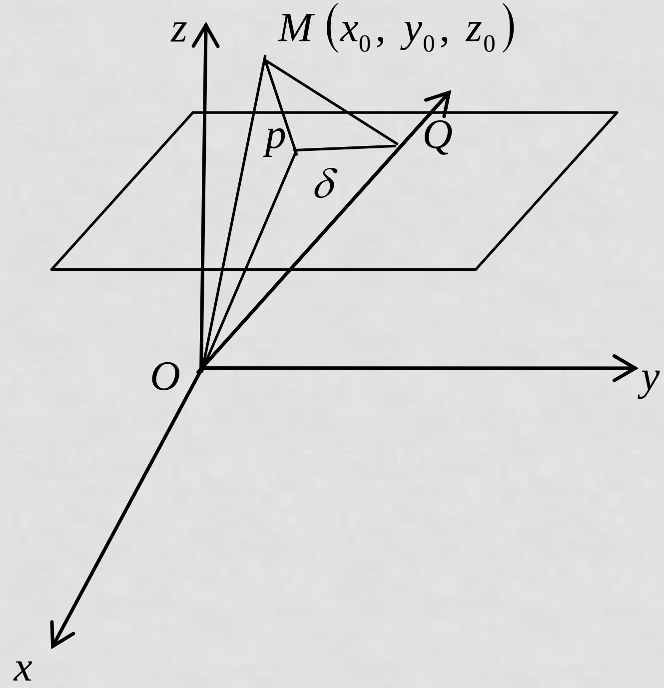
$$\mu = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \qquad (8)$$

ifodaning qiymatiga qarab aniqlaymiz: agar $\mu=1$ bo‘lsa, (3) normal tenglama bo‘ladi, aks holda (3) ni $\pm\mu$ ga bo‘lib

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z\mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (9)$$

hosil qilamiz. Bu tenglama normal bo‘lishi uchun endi (9) dagi ishoralardan birini ozod had D ning ishorasiga teskari qilib olinsa kifoya. (2) tenglama μ ifoda yordamida normal ko‘rinishga keltirilgani uchun $\frac{1}{\mu}$ ni normallovchi ko‘paytuvchi deb ataladi.

V. Nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa. Faraz qilaylik, π tekislik va unda yotmagan biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan π tekislikkacha bo‘lgan d masofani topish talab qilingan bo‘lsin. Berilgan tekislikning normali $\vec{n}_0$ ni qurib olamiz. Agar M_0 nuqta va koordinatalar boshi π tekislikning har xil tomonlarida joylashgan bo‘lsa, u holda M_0 nuqtaning π tekislikdan chetlanishi deb + *d* ga, aks holda – *d* ga aytamiz.



M_0 nuqtani normalga proyeksiyalaylik. U holda chizmadan ko‘rinadiki,

$$\delta = PQ = OQ - OP$$

$$OP = p, \quad OQ = np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}$$

ekanligini e’tiborga olsak,

$$\delta = np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} - p$$

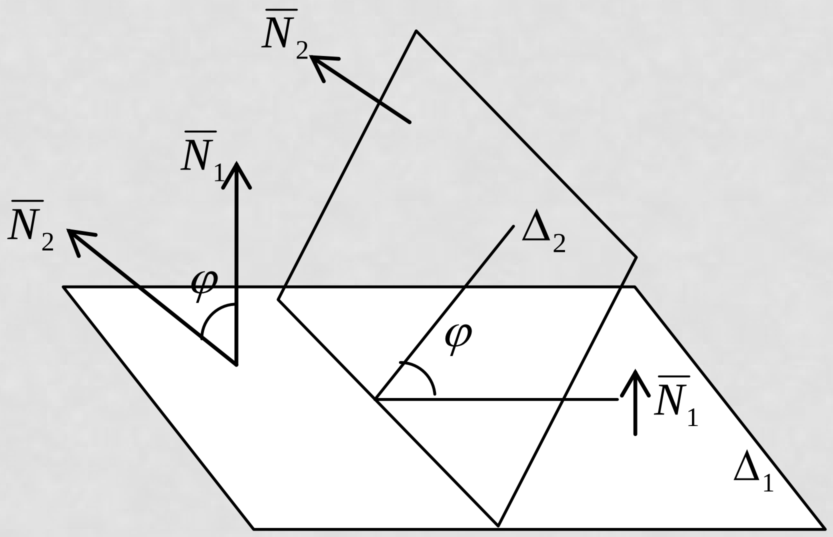
$$np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma$$

bo‘lgani uchun

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \qquad (10)$$

formulaga ega bo‘lamiz. U holda

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \right|$$



VI. Ikki tekislik orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $\Delta_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ va $\Delta_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ tekisliklar berilgan bo‘lsin. $\vec{N}_1 = \{A_1,\, B_1,\, C_1\}$ va $\vec{N}_2 = \{A_2,\, B_2,\, C_2\}$ berilgan tekisliklarning normal vektorlari. Chizmadan ko‘rinadiki, tekisliklar orasidagi burchak ularning normallari orasidagi burchakka teng. Shuning uchun normal vektorlar orasidagi burchakni qidiramiz.

Ma’lumki,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \circ \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}$$

yoki

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (11)$$

Agar $\Delta_1 \perp \Delta_2$ bo‘lsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo‘ladi. U holda $\cos\varphi = 0$ va (11)ga asosan $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$. Bu tenglikni tekisliklarning perpendikulyarlik sharti deb atashadi. Agar Δ_1 tekislik Δ_2 tekislikka parallel bo‘lsa, u holda $\vec{N}_1$ vektor $\vec{N}_2$ vektorga kolleniar bo‘ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

bo‘ladi. Bu munosabat tekisliklarning parallellik sharti deb ataladi.

VII. Uch nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi. Bizga Δ tekislikning uchta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Agar $M(x, y, z)$ shu tekislikning siljuvchi nuqtasi bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar Δ tekislikda yotadi, ya’ni ular komplanar bo‘ladi.

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

ekanligidan va vektorlarning komplanarlik shartidan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi.