14- Ma’ruza “FAZODA TO`G`RI CHIZIQ VA UNING TURLI KO`RINISHDAGI TENGLAMALARI.

1. FAZODAGI TO‘G‘RI CHIZIQ.

Agar berilgan $\Delta_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ va $\Delta_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ tekisliklar parallel bo‘lmasa, u holda ular to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. Shu sababli, fazodagi to‘g‘ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig‘i sifatida qaraymiz. Demak, fazoda to‘g‘ri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

(1) to‘g‘ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi. Agar Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo‘lsa, (1) to‘g‘ri chiziqni ifodalamaydi. Demak, berilgan tenglamalar sistemasi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi ekanligini aniqlash uchun noma’lumlar oldidagi mos koeffitsiyentlarni proporsional emasligini tekshirish kerak ekan.

Bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab cheksiz ko‘p tekisliklar kesishadi. Bunday tekisliklarni tekisliklar dastasi deymiz. Agar shu dastaga tegishli ikkita tekislikning tenglamasi ma’lum bo‘lsa, shu dastaning boshqa tekisligini tenglamasi

$$\alpha\left(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1\right) + \beta\left(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0\right) = 0 \qquad (2)$$

bo‘ladi.

Bunga ishonch hosil qilish uchun, avval (2) tenglama tekislik tenglamasi ekanligini tekshiraylik. Buning uchun, (2) ni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$(\alpha A_1 + A_2\beta)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + (\alpha D_1 + \beta D_2) = 0$$

Agar bir vaqtda $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0,\ \ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0,\ \ \alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

bo‘ladi. Bu esa dastlabki farazga zid, chunki bu holda Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo‘ladi va ular to‘g‘ri chiziqni ifodalamaydi. Bu ziddiyat (2) tenglama ekanligini ko‘rsatadi. Bu tenglama 1-darajali tenglama bo‘lgani uchun *y* tekislikni ifodalaydi. Agar α, β larning biri, masalan $\alpha \neq 0$ bo‘lsa, u holda (2)ni quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

2. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi. Bizga fazoda to‘g‘ri chiziqning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va unga parallel bo‘lgan $\vec{a} = \{l, m, n\}$ vektor berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, $M\ (x,\ y,\ z)$ to‘g‘ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo‘lsin. U holda $\vec{a}$ va $\overrightarrow{M_0 M}$ vektorlar parallel bo‘ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (3)$$

kelib chiqadi. $\vec{a}$ vektor M nuqtaning to‘g‘ri chiziqda bo‘lishini ta’minlangani uchun uni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deb atashadi. (3) ni to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataymiz. Agar to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning bu tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirsa bo‘ladi. Haqiqatan, bizga (2) berilgan bo‘lsin. Bu sistemani aniqlaydigan tekisliklarni mos ravishda Δ_1 va Δ_1 deb belgilaylik. Ularning normal vektorlari $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun: 1) uning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasini bilish kerak; bu nuqtani topish uchun (2)dagi noma’lumlardan biriga qiymat berib, masalan $z = z_0$deb, (2) sistemani x va y larga nisbatan yechib, $x = x_0$, $y = y_0$larni topamiz; 2) to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi $\vec{a} = \{1, m, n\}$ vektorini topish kerak; qaralayotgan to‘g‘ri chiziq ikki tekislikning kesishish chizig‘i bo‘lgani uchun, u $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo‘ladi. Shuning uchun, $\vec{a}$ vektor sifatida $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo‘lgan ixtiyoriy vektorni, shu jumladan, ularning vektor ko‘paytmasini olish mumkin, ya’ni $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Misol. Berilgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-11=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

Yechish. Agar $x_0=1$ desak, sistemadan $y_0=2,\ z_0=1$ kelib chiqadi, demak, $M_0(1,2,1)$ ekan. Endi yo‘naltiruvchi vektorni topamiz. Sistemadan $\vec{n}_1=\{3,2,4\},\ \vec{n}_2=\{2,1,-3\}$larni aniqlaymiz.

U holda $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-10,17,-1\}$ bo‘ladi, bundan $l=-10,\ m=17,\ n=-1$ lar topiladi. Bularni (3)_ ga olib borib qo‘ysak:

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}$$

Agar (3) dagi nisbatlarni t ga tenglasak:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

bundan

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

kelib chiqadi. (4) ni to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi deb atashadi, t bu yerda parametr rolini o‘ynaydi. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi odatda to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini topish masalasida ishlatiladi.

Misol. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ to‘g‘ri chiziq bilan $2x + y + z - 6 = 0$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Avval to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini tuzib olamiz:

$$x = 2 + t, \;\; y = 3 + t, \;\; z = 4 + 2t$$

Endi bularni tekislik tenglamasiga olib borib qo‘yamiz:

$$2(2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 = 0$$

Bundan t=-1 topiladi, bu qiymatni parametrik tenglamasiga qo‘yib $x = 1, \;\; y = 2, \;\; z = 2$ larni topamiz.

3. To‘g‘ri chiziqga doir ayrim masalalar.

Faraz qilaylik, to‘g‘ri chiziqning ikki $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni olish mumkin. Agar $M(x, y, z)$ nuqta to‘g‘ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo‘lsa, u holda, $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{a}$ vektorlar parallel bo‘ladi. Berilgan koordinatalarga ko‘ra,

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$$
$$\vec{a} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$$

Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{5}$$

Oxirgi tenglik **ikki nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deb ataladi.

a) Endi faraz qilaylik, bizga

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ va } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Ular orasidagi burchak ularning yo‘naltiruvchi vektorlari $\vec{a}_1=\{l_1,\ m_1,\ n_1\},\ \ \vec{a}_2=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$ orasidagi burchakka teng. Shu sababli,

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\circ\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{l_1\,l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \tag{6}$$

bo‘ladi.

b) Agar to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lsa, u holda $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $cos\varphi=0$, shu sababli,

$$l_1\,l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \tag{7}$$

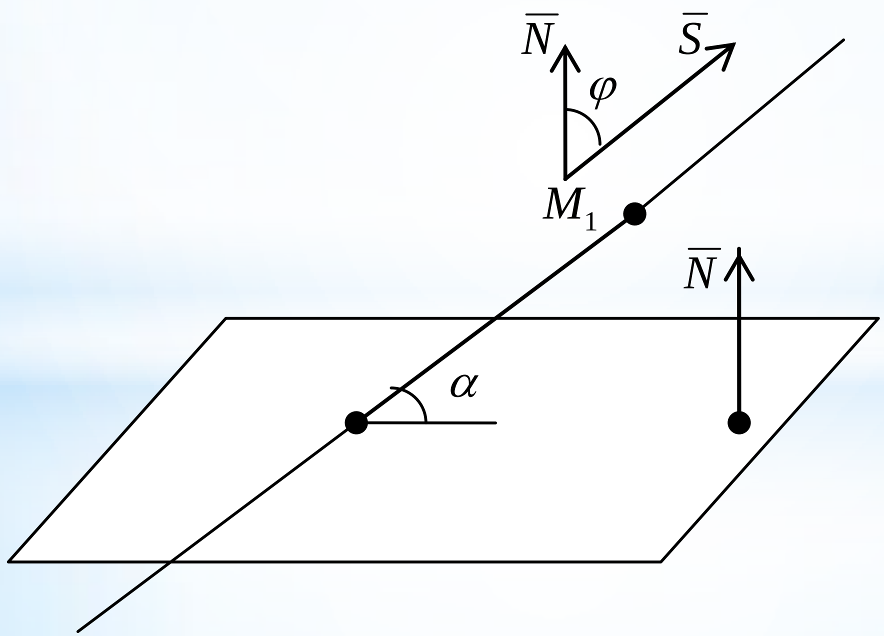
bo‘ladi. Bu tenglikni to‘g‘ri chiziqlarning **perpendikulyarlik sharti** deb ataymiz.

v) Agar to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ larning kolleniarlik shartidan

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \tag{8}$$

kelib chiqadi. Bu tenglik to‘g‘ri chiziqlarning **parallellik sharti** deb ataladi.

4. To‘g‘ri chiziq va tekislik. Bizga $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ to‘g‘ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik berilgan bo‘lsin.



Chizmadan ko‘rinadiki, to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak α va yo‘naltiruvchi vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi burchak φ lar yig‘indisi $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$, bundan $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$ yoki $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Shu sababli, φ ni topsak kifoya. Demak,

$$\cos\varphi=\cos\alpha=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad (9)$$

Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lsa, u holda yo‘naltiruvchi vektor normalga perpendikulyar bo‘ladi, shuning uchun

$$Al+Bm+Cn=0 \qquad (10)$$

bo‘ladi. Bu tenglik to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning **parallellik sharti** deyiladi. Agar to‘g‘ri chiziq bilan tekislik perpendikulyar bo‘lsa, u holda yo‘naltiruvchi vektor bilan normal vektor parallel bo‘ladi. U holda to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik sharti

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \qquad (11)$$

bo‘ladi.