Chiziqli tenglamalar sistemasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi

ChTS haqida umumiy tushunchalar. Ma’lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi hamma tenglamalar chiziqli (1-darajali) bo’lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi noma’lumlar o’rniga ma’lum sonlar majmuini qo’yganda, sistemaning hamma tenglamalari ayniyatga aylansa, bunday sonlar majmuiga tenglamalar sistemasining yechimi (ildizi) deyiladi. Bunday sonlar majmui bitta bo’lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo’lib, bu sistema aniqlangan (tayin, muayyan) deb ataladi va bu tenglamalar sistemasi birgalikda deyiladi. Birgalikda bo’lgan sistema bittadan ko’p yechimga ega bo’lsa, bunday sistema aniq bo’lmagan sistema deyiladi.

Birgalikda bo’lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo’lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

Tenglamalar sistemasi birorta ham yechimga ega bo’lmasa, bunday sistemaga birgalikda bo’lmagan sistema deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini 0dan farqli songa ko’paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo’shish bilan hosil bo’lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo’ladi (bu xossadan kelgusida ko’p foydalaniladi).

Fan va texnikaning ko’p sohalarida bo’lganidek, iqtisodiyotning ham ko’p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini tuzishga iqtisodiyotdan misol qaraymiz.

1-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval.

Xom-ashyo xillari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom-ashyo sarflari**			**Xom-ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
1	**5**	**12**	**7**	**2000**
2	**10**	**6**	**8**	**1660**
3	**9**	**11**	**4**	**2070**

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Echish: Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2,3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda

$12x_2$, $7x_3$ bo’lib, uning uchun quyidagi tenglama o’rinli bo’ladi: $5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$. Yuqoridagiga o’xshash 2,3-xil xom ashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$
$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo’ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch nomag’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070 \end{cases}$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo’ldi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishni umumiy holda qaraymiz.

Ikki noma‘lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x va y noma‘lum sonlar, qolgan barcha sonlar esa ma‘lum. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22},$ lar sistema **koeffitsientlari**, b_1 va b_2 sonlar esa **ozod had** (son)lar deb ataladi.

(1) sistema bizga o’rta maktab kursidan ma‘lum . Uni yechishning o’riniga qo’yish, qo’shish va grafik usullari bilan tanishmiz.

Bu yerda (3.1) sistemani yechishning yana bir usuli ya‘ni uni determinantlardan foydalanib yechish usuli bilan tanishamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchisini $-a_{12}$ ga ko’paytirib hadlab qo’shamiz:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}. \qquad (2)$$

Shuningdek sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi

sini a_{11} ga ko’paytirib hadlab qo’shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})y=b_2a_{22}-b_1a_{12} \qquad (3)$$

hosil bo’ladi.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

belgilashlarni kiritamiz.

Sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinant sistemaning *asosiy* determinanti deb ataladi. Δ_x determinant Δ dagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida, Δ_y esa Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

(4) dan foydalanib (2) va (3) formulalarni

$$\left.\begin{aligned} \Delta\cdot x &= \Delta_x, \\ \Delta\cdot y &= \Delta_y \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Mumkin bo'lgan quyidagi hollarni qaraymiz.

I. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq 0$ bo'lsin. U holda (5) ning har bir tenglamasini Δ ga bo'lib

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (6)$$

berilgan sistemaning yechimini topish formulasiga ega bo'lamiz. (6) formulalar uning ixtirochisi Shvetsariyalik matematik Kramer(1704-1752)ning sharafiga Kramer formulalari deb ataladi.

II. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lsin.

Bu holda quyidagilardan biri bo'ladi.

1) $\Delta_x=\Delta_y=0$ bo'lsin. U holda (3.5) $0\cdot x=0$, $0\cdot y=0$ ko'rinishini olib berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega, chunki istalgan son bu tenglamalarni qanoatlantiradi.

2) Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi masalan $\Delta_x\neq0$ bo'lsin. U holda (5) ni birinchi tenglamasi $0\cdot x=\Delta_x\neq0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u yechimga ega emas. Demak, bu holda berilgan sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Xulosa. a) (1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq 0$, ya'ni $a_{11}a_{22}\neq a_{12}a_{21}$ yoki $\frac{a_{11}}{a_{21}}\neq\frac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda bu sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi Kramer formulalari (3.6) yordamida topiladi.

b) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ ya'ni $\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$ bo'lganda

(1) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas);

d) $\Delta=0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli ya'ni

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmaydi (birgalikda emas).

(1) sitemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. (1) sistemaning har bir tenglamasi to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalashi ayon.

$\frac{a_{11}}{a_{21}}\neq\frac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaydi. Demak har ikkala to’g’ri chiziq bitta nuqtada kesishadi. Ana shu kesishish nuqtasining koordinatalari (1) sistemasining yechimi bo’ladi.

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0 \quad \text{ya‘ni} \quad \frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$$

bo’lganda to’g’ri chiziqlar ustma-ust tushadi (sistema cheksiz ko’p echimlarga ega). $\Delta=0$ bo’lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli bo’lganda to’g’ri chiziqlar parallel bo’lganligi sababli ular kesishmaydi (sistema yechimga ega bo’lmaydi) ya‘ni birgalikda emas.

1-misol.

$$\begin{cases} 2x+5y=3, \\ 4x+10y=6 \end{cases}$$ sistema yechilsin.

Yechish.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=20-20=0, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}=30-30=0, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=12-12=0.$$

Sitemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko’paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Demak sistema bitta $2x+5y=3$ tenglamaga teng kuchli va cheksiz ko’p yechimlarga ega. y ga ixtiyoriy qiymatlar berib x ni $x=\frac{3-5y}{2}$ tenglamadan aniqlash yo’li bilan yechimlar topiladi.

Masalan, $y=0$ da $x=\frac{3}{2}$, $y=1$ da $x=-1$ va hokazo.

Bu geometrik nuqtai nazardan $2x+5y=3$ va $4x+10y=6$ to’g’ri chiziqlar bitta to’g’ri chiziq ekanini bildiradi.

2-misol.

$\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 10 & 6\end{vmatrix}=30\text{-}30=0,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=42\text{-}6=36\neq 0,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 10 & 2\end{vmatrix}=10\text{-}72=\text{-}6\neq 0.$$

Sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lib $\Delta_x\neq 0$, $\Delta_y\neq 0$ bo'lgani uchun sistema yechimga ega emas(birgalikda emas).

Uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0\end{cases}\qquad (7)$$

sistemani qaraymiz. Bu yerdagi x, y va z noma'lumlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. Ozod sonlari nolga teng bu sistema bir jinsli sistema deyiladi. (7) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz.

Faraz qilaylik $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$

bo'lsin. U holda sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z \end{cases}$$

ko’rinishida yozamiz. Bu sistema z ning har bir aniq qiymatida yagona yechimga ega bo’lib yechim Kramer formulalariga ko’ra

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z\,, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z$$

kabi topiladi. Determinantning xossalari (umumiy ko’paytuvchini determinant belgisidan chiqarish mumkinligi hamda ikkita ustunlarini o’rin almashtirganda determinantning faqatgina ishorasi o’zgarishi) dan foydalanib yechimni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot z\,, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot (-z) \qquad (8)$$

ko’rinishda yozamiz.

$$\frac{-z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \mathrm{K}$$

deb belgilasak $z=K\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$ bo'lib uni (3.8) ga qo'ysak

$$x=K\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix}, \quad y=-K\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix}, \quad z=K\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \quad (9)$$

qaralayotgan sistemaning yechimlari kelib chiqadi. (7) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. Sistemaning har bir tenglamasi koordinatalar boshidan o'tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi. Tekisliklarning har ikkitasi koordinatalar boshidan o'tganligi sababli ular kesishadi. Ikkita kesishuvchi tekisliklar to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Ana shu to'g'ri chiziq nuqtalarning koordinatalari sistemaning yechimi bo'ladi.

Xulosa. Bir jinsli (7) sistema yagona yechimga ega bo'lishi yoki yechimga ega bo'lmasligi mumkin emas. U har doim cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas sistema).

3–misol.

$$\begin{cases} x+3y-2z=0, \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. (9) ga asoslanib

$$x=K\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=7K,\ \ y=-K\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-7K,\ \ z=K\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7K$$

larni hosil qilamiz. Shunday qilib berilgan sistemaning yechimlari x=7К, y=-7К, z=-7K tengliklar yordamida aniqlanadi. К ga aniq son qiymatlarini qo'yib sistemaning har xil yechimlarini topiladi.

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad (10)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x,y va z noma‘lum sonlar, qolgan barcha sonlar ma‘lum sonlar. a_{11}, $a_{12},...,a_{33}$ sistemaning koeffitsientlari, b_1,b_2, va b_3 ozod sonlar. Barcha ozod sonlar nolga teng bo’lganda (10) sistema **bir jinsli** deyiladi.

(10) sistemani yechish bilan shug’ullanamiz. Noma‘lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan uchinchi tartibli

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant (10) sistemaning **asosiy** determinanti deb ataladi. Berilgan sistemani yechish uchun sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} elementning algebraik to’ldiruvchisi A_{11} ga, ikkinchi tenglamasini a_{21} elementning algebraik to’ldiruvchisi A_{21} ga va uchinchi tenglamasini a_{31} elementining algebraik to’ldiruvchisi A_{31} ga ko’paytirib tenglamalarni hadma-had qo’shamiz.

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})y+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})z=$$

$$=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}. \qquad (11)$$

Birinchi qavs ichidagi ifoda Δ determinantning birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasi bo'lganligi uchun determinantning 7-xossasiga ko'ra $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\Delta$ bo'ladi. (11) dagi ikkinchi va uchinchi qavs ichidagi ifodalar Δ determinantni ikkinchi va uchinchi ustun elementlarini boshqa bir ustunning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganligi uchun determinantning 8-xossasiga ko'ra ular nolga teng bo'ladi. Shunday qilib (11) tenglik

$$\Delta_x=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31} \qquad (12)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

determinantni qaraymiz. E'tibor bersak bu determinant asosiy determinantdagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'lganligiga iqror bo'lamiz. Bu determinantning b_1, b_2, b_3, elementlarining algebraik to'ldiruvchilari mos ravishda Δ determinantning a_{11}, a_{21}, a_{31} elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga tengligini hisobga olsak $b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{13}=\Delta_x$ bo'lib (12) tenglik

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \quad (13)$$

ko'rinishini oladi.

Shunga o'xshash $\Delta \cdot y = \Delta_y$, $\Delta \cdot z = \Delta_z$ (3.14) tengliklarni hosil qilamiz, bunda

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Δ_y determinant sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga, Δ_z esa Δ dagi uchinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Mumkin bo’lgan qo’yidagi hollarni qaraymiz:

I. (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo’lsin. U holda (13) va (14) tenglamalarni har birini Δ ga bo’lib

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (15)$$

formulalarga ega bo’lamiz. (15) **Kramer formulalari** deb ataladi. Shunday qilib (3.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo’lganda sistema yagona yechimga ega bo’lib yechim Kramer formulalari (15) yordamida topilar ekan.

II. (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo’lsin. U holda qo’yidagilardan biri sodir bo’ladi.

a) Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (10) sistema yechimga ega bo’lmaydi. Haqiqatan, aniqlik uchun $\Delta_x\neq0$ deb faraz qilsak bu holda $\Delta\cdot x=\Delta_x$ (13) tenglik $0x=\Delta_x\neq0$ ko’rinishiga ega bo’lib, u x ning hech bir qiymatida bajarilmaydi.

b) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lsin. Bu holda (10) sistema yo yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

4–misol. $\begin{cases} 2x+3y+z=2, \\ x-4y+2z=4, \\ 4x+6y+2z=0 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. Bu yerda

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

chunki determinantning birinchi va uchinchi satr elementlari proporsional.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantning birinchi satrini –1 ga ko’paytirib ikkinchi satrning mos elementlariga qo’shsak

$$\Delta_x = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

hosil bo’ladi. Bu determinantni uning birinchi ustun elementlari bo’yicha yoyib hisoblaymiz. $\Delta_x = 4\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot(-5) = -40 \neq 0.$

Demak berilgan sistema $\Delta=0$, $\Delta_x \neq 0$ bo’lganligi sababli yechimga ega emas.

5-misol.

$$\begin{cases} x + y - 2z = -2, \\ 2x + 2y - 4z = -4, \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblash yo'li bilan $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Qaralayotgan sistema yechimga ega emas, chunki sistemaning birinchi va uchinchi tenglamalari bir-biriga zid. Haqiqatan, sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib uchinchisiga qo'shsak 0=6 qarama-qarshilikka kelamiz.

6-misol.

$$\begin{cases} 3x+2y-z=5, \\ 6x+4y-2z=10, \\ x-3y+z=-2 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblab $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ekanligini topamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Shuning uchun berilgan sistema

$$\begin{cases} 3x+2y-z=5, \\ x-3y+z=-2 \end{cases}$$

uch noma‘lumli ikkita tenglamalar sistemasiga teng kuchli. Bu sistema cheksiz ko’p yechimlarga ega. Yechimlar noma‘lumlardan biri masalan *x* ga aniq qiymatlar berib sistemadan *y* va *z* ni topish orqali aniqlanadi.

Izoh.

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \end{cases}$ sistema $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{a_{13}}{a_{23}} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ shartda aniqmas bo’ladi.

Xulosa. a) Uch noma‘lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo’lganda yagona yechimga ega bo’lib yechim Kramer formulalari (15) yordamida topiladi.

b) $\Delta=0$ bo’lib Δ_x , Δ_y, Δ_z determinantlardan aqalli birortasi noldan farqli bo’lganda (3.10) sistema yechimga ega emas.

d) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo’lganda (10) sistema yo yechimga ega emas yoki cheksiz ko’p yechimlarga ega.

Uch noma'lumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

sistemani qaraymiz. x=0, y=0, z=0 sistemaning yechimi bo'lishi ko'rinib turibdi. Bu holda kamida bitta ustuni nolga teng bo'lganligi uchun $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lib (13) va (14) tengliklar $\Delta\cdot x=0$, $\Delta\cdot y=0$, $\Delta\cdot z=0$ (17) ko'rinishga ega bo'ladi. Agar (16) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsa u yagona x=0, y=0, z=0 yechimga ega bo'ladi. Qaralayotgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ham ega bo'la oladimi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. (16) sistema noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan. Sistema noldan farqli yechimlarga ega, masalan $x \neq 0$ bo'lsin. U holda (17) ning birinchi tenglamasi $\Delta\cdot x=0$ dan $\Delta=0$ kelib chiqadi.

Teskarisi, ya'ni sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lganda sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishini ko'rsatish ham mumkin.

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

Umumiy holda n noma'lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (18)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ozod had (son) lar hamda $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ koeffitsientlar ma'lum sonlar.

Yuqorida keltirilgan Kramer qoidasi noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lgan istalgan (18) ko'rinishdagi sistama uchun o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda u yagona yechimga ega bo'lib, yechim Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, \ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}, \qquad (19)$$

yordamida topiladi. Bu yerdagi Δ determinant (18) sistemaning noma‘lumlari oldidagi koeffitsientlaridan tuzilgan bo’lib, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n}$ determinantlar undagi birinchi, ikkinchi va hokazo n–ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo’ladi.

Shuni aytish joizki, sistemadagi noma’lum (tenglama)lar soni orta borgan sari uni Kramer usuli bilan yechish qiyinlasha boradi.