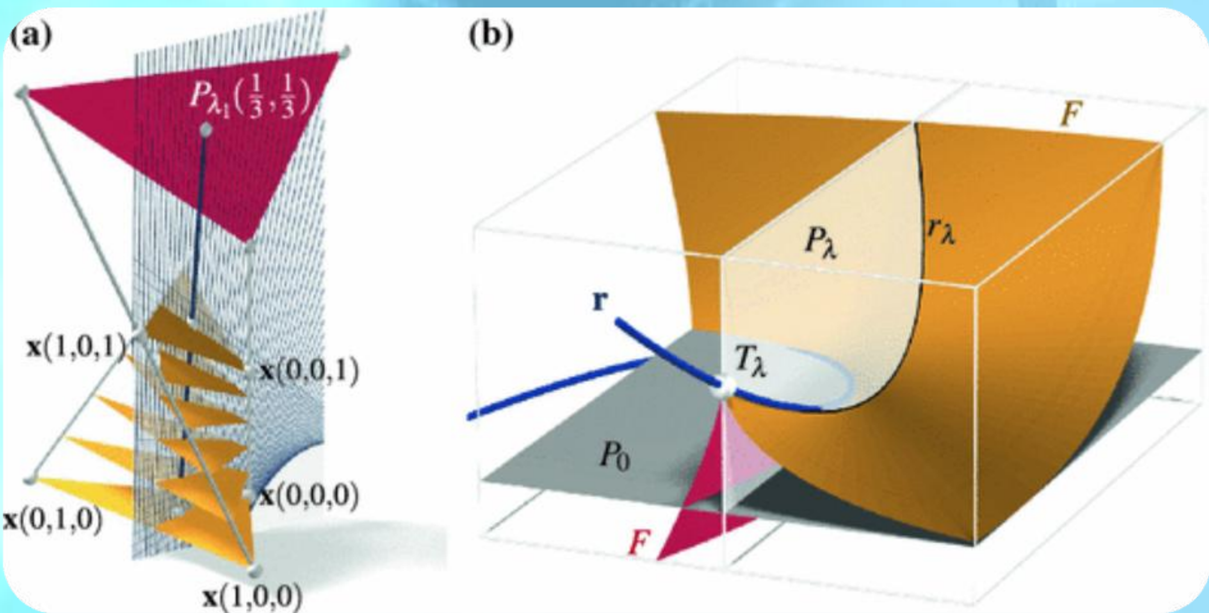
D.F.KUCHKAROVA, A.A.QAXXAROV

AMALIY GEOMETRIYA



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

AMALIY GEOMETRIYA

TOSHKENT – 2021

UO‘K:
КВК
Ch Amaliy geometriya. - T.: 2021.
ISBN

Ushbu o’quv qo’llanmada parametrlash nazariyasiga asoslangan affinaviy almashtirishlar va kompyuter grafikasidagi tasvirlash masalalari ko’rib chiqilgan. Sirt hosil qilishning parametrik uslubiga egri chiziqlar va sirtlarni approksimatsiya va interpolatsiyalashga, shuningdek egri sirtlarni diskretlashtirishga alohida e’tibor qaratiladi.

Qo’llanmada amaliy geometriyaning hozirgi zamon dolzarb masalalari ko’rib chiqilgan. Ushbu qo’llanma magistrantlar, “Chizma geometriya va muhandislik grafikasi” o’qituvchilari va barcha muhandis mutaxassislari uchun mo'ljallangan.

***

В учебном пособии рассматриваются аффинные преобразования, основанные на теории параметризации и задачи представления фигур в компьютерной графике. В параметрическом методе формирования поверхностей особое внимание уделяется аппроксимации и интерполяции кривых и поверхностей, а также задаче выбора криволинейных поверхностей.

В пособии рассматриваются актуальные вопросы прикладной геометрии. Это учебное пособие предназначено для магистров и доктарантов, преподавателей начертательной геометрии и инженерной графики, а также инженерам, интересующимся вопросами геометрии.

***

This textbook gives affine transformations based on the theory of parametrization and the problem of representing figures in computer graphics. In the parametric method of shaping surfaces, special attention is paid to the approximation and interpolation of curves and surfaces, as well as the problem of choosing curved surfaces.

This textbook deals with topical issues of applied geometry. This study guide is intended for masters and doctoral students, teachers of descriptive geometry and engineering graphics, and engineers interested in geometry.

.

UO‘K:
КВК

Mualliflar:
D.F.Kuchkarova, A.A.Qaxxarov

KIRISH

So’nggi yillarda, oliy ta'lim doirasida ko’p universitet fanlari shu jumladan, Chizma geometriya va muhandislik grafikasi fani mazmuni tarkibiy o’zgartirish munosabati bilan qayta ko’rib chiqilmoqda. Agar ilgari Chizma geometriya va muhandislik grafikasi fani ikkita asosiy vazifaga duch kelgan bo’lsa: tekislikdagi uch o’lchovli narsalarning tasviri va uch o’lchovli ob'ektlar bilan bog'liq bo'lgan metrik va pozitsion muammolarning proektsion chizmalari bo'yicha yechish, hozirda ilm-fan va texnologiyaning ko'plab sohalarida to'liq foydalanish o'rnini bosadigan hisoblash amaliyoti ishlab chiqilishi va qo'llanilishi tufayli, Chizma geometriya apparatlaridan modellashtirish, loyihalash, hisoblash sifatida foydalanishning asosiy imkoniyati mavjud edi. Shu bilan birga, talabaga mustaqil ravishda loyihalashtirish imkoniyati beriladi va vazifalarni tanlashda talabaning kelajakdagi ixtisosligi hisobga olinadi.

Mashinasozlik, qurilish va arxitekturaning turli sohalarida geometrik modellashtirish usullari bilan muhandislik muammolarini hal qilish shuni ko'rsatdiki, universitetlarda grafik fanlarni o'rganishning an'anaviy vositalari va usullari etarli emas va ular fanning boshqa sohalari, xususan, hisoblash geometriyasi, kompyuter grafikasi va boshqalar bilan to'ldirilishi kerak.

Muhandislik grafikasi va kompyuter grafikasi - bu kompyuter texnikasini rivojlantirishning zamonaviy darajasi sharoitida dizayner uchun mashinalar, mexanizmlar, binolar, inshootlar va boshqalar tasvirlari darajasida eng maqbul kompyuter yordamida loyihalashtirish texnologiyasini amalga oshirishga imkon beradigan asosiy qo'llab-quvvatlovchi tizimlaridan biridir. Kompyuter grafikasi vositalarini CAD - (computer aided design) tarkibiga kiritish dizaynerlar tomonidan kompyuterlarning keng qo'llanilishiga yordam beradi. Ko'p vaqt talab qiladigan chizilgan va hisoblash-grafik ishlarini avtomatlashtirishga imkon beradi. CAD yordamida dizayn va ishlab chiqarish texnologiyasida hech qanday aniq o'zgarishlar va yaxshilanishlarni emas, balki texnologiyaning turli sohalarida sifat jihatidan yangi texnologiyalarga o'tishni ta'minlash mumkin. Turli sohalari natijalari asosida matematika va hisoblash geometriya yangi fan - muhandislik geometriya paydo bo'lgan ba'zi masalalar ko’rib chiqilmoqda.

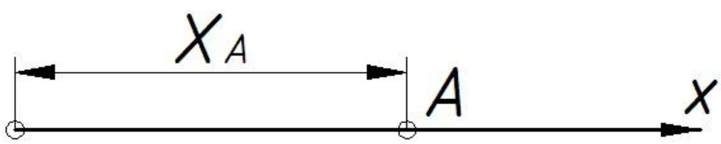
1. GEOMETRIK SHAKLLARNING PARAMETRLASHTIRISH

Mashinasozlik va qurilish ob'ektlarini matematik modellashtirish uchun CADda har bir ob'ekt haqida uning shakli va fazoviy holati to'g'risidagi geometrik ma'lumotlarning zarur va yetarli ekanligi muhimdir. Bunday ma'lumotlarning raqamli namoyishi uchun ma'lum bir fazoviy mos yozuvlar tizimi tanlangan bo'lib, u bilan ob'ekt qattiq bog'langan. Eng keng tarqalgan - dekart to'g'ri burchakli koordinatalar tizimidir. Fazodagi har bir geometrik figura bir qator mustaqil shart-parametrlar bilan aniqlanadi.

Parametr deganda, qiymatlari to'plam elementlarini bir-biridan ajratish uchun foydalaniladi. Geometrik masalalarda ko'plab geometrik figuralar ko'rib chiqiladi va parametrlari geometrik kattaliklar - masofalar, burchaklar va boshqalardir. Har bir figurani parametrlar sonini hisoblash figurani parametrlash deb ataladi. Muayyan raqamni belgilaydigan parametrlar soni uning parametrli raqami deb ataladi.

1.1. NUQTA TO'PLAMLARI

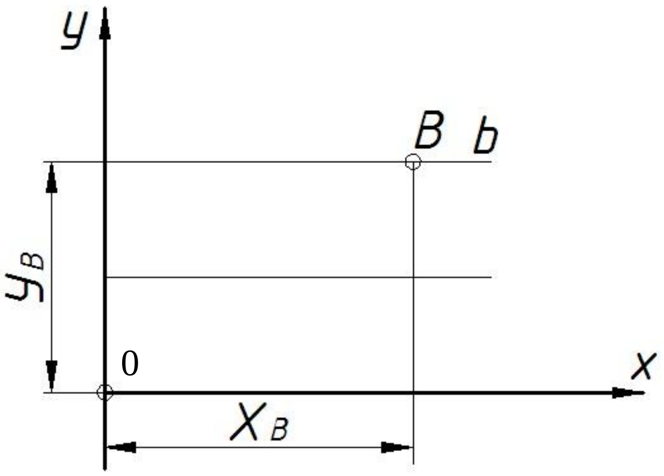
Geometrik modellashtirishda asosiy geometrik shakllar nuqtalar, chiziqlar (to'g'ri chiziqlar va egri chiziqlar), tekisliklar (sirtlar) dir. Ushbu raqamlarni va ular joylashgan joyni nuqta to'plamlari sifatida ko'rib chiqamiz. Har bir nuqta *A* bitta parametr-masofa bilan chiziqdagi nuqtalar to'plamidan tanlanishi mumkin. (1-rasm)da *A* nuqtani X_A masofa orqali belgilash mumkin.



1-rasm.

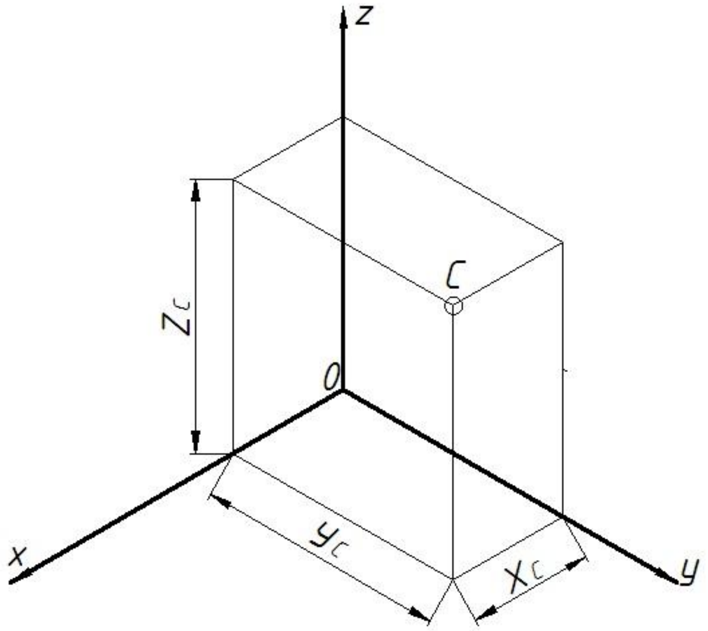
To'plam *n* -parametrik deb nomlanadi, agar bitta elementdan ajratib olish uchun *n* parametr ko'rsatilishi kerak bo'lsa va u bilan belgilanadi ∞^n bu erda ∞ cheksiz to'plam: *n* - ko'rsatkich, parametrlar sonini bildiradi . Shunday qilib, chiziqdagi nuqtalar bitta parametrli to'plamni hosil qiladi, u ∞^1 bilan belgilanadi.

B nuqtaning tekislikdagi o'rni ikkita parametr bilan aniqlanadi, masalan, dekart koordinatalari X_B va Y_B (2-rasm). Agar parametrlar sifatida *x* va *y* parametrlarini hisobga olgan bo'lsak, ∞^2 nuqtalar to'plamini hosil qilamiz.



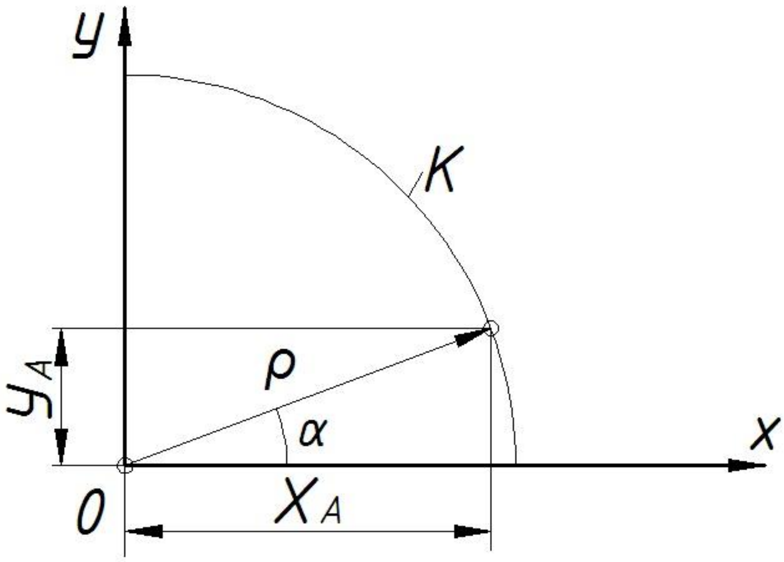
2-rasm

Fazodagi barcha nuqtalar uchta parametrli to'plamni tashkil etadi ∞^3. Har bir *C* nuqta ushbu to'plamdan uchta parametrni belgilash yo'li bilan tanlanadi, masalan, uning uchta koordinatasini X_C, y_C, Z_C belgilanadi (3-rasm).



3-rasm.

Parametrlar har xil qiymatga ega bo'lishi mumkin, ammo ularning to'plami uchun ularning soni o'zgarishsiz qoladi. Shunday qilib, tekislikdagi nuqtalar to'plamining parametrlari dekart (*x* , *y*), qutbli (*p*, *α*) koordinatalar va boshqalar bo'lishi mumkin (4-rasm). To'plamning bitta elementini tanlashga imkon beradigan parametrlar soni to'plamning kattaligi yoki tubliligi deb ataladi. Modellashtirishda nuqtalar E^0 nol o'lchovli, E^1 bir-o'lchovli bo'lib bir yuzasi (tekislik) E^2 ikki o'lchamli E^3 uch o'lchamli bir nuqta, deb hisoblanadi. Ko'rib chiqilgan nuqta to'plamlarining har birini quyi o'lchamdagi to'plamlar mahsuloti sifatida olish mumkin. Shunday qilib E^2 tekislikdagi nuqtalar to'plami bitta parametrli to'g'ri chiziqlar to'plamining hosilasi, masalan, koordinata o'qlaridan biriga parallel va har bir to'g'ri chiziqning nuqtalari to'plami sifatida ifodalanishi mumkin: $\infty^1\infty^1 = \infty^2$



4-rasm.

Uch o'lchovli fazo E^3 bir parametrli fazoviy to'plami, masalan, koordinatalardan biriga parallel va har bir tekislikdagi ikki parametrli nuqtalar to'plami mahsuloti bilan ifodalanishi mumkin $\infty^1\infty^2 = \infty^3$

Bitta yoki bir nechta parametrlarni o'rnatish (bog'lash) to'plam o'lchamining pasayishiga olib keladi. Shunday qilib, parametrni o'rnatish $У_B$ (2-rasmga qarang) dan tekislikdagi ikkita parametrli to'plamlar to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan bitta parametrli to'plamlarni tanlaydi. Berilgan qiymatni ko'rsatganda *p=const* (4- rasmga qarang) doiraga tegishli nuqtalar *K* to'plami tanlangan. Uch o'lchovli nuqta fazosining parametrlaridan birini bog'lash ba'zi sirt yoki tekislikdagi ikki parametrli nuqtalar to'plamini tanlashga olib keladi. Shunday qilib, *z=const* berilgan bo'lsa, biz *x0y* ga parallel ravishda tekislikning ikki parametrli to'plamlarini olishimiz mumkin.

Fazodagi barcha nuqtalari E^3 ga tegishli ifodasini turli xildagi sferik sirtda joylashgan deb tasavvur qilib bo'ladi. $x^2+y^2+z^2=R^2$ $0\leq R\leq\infty$.

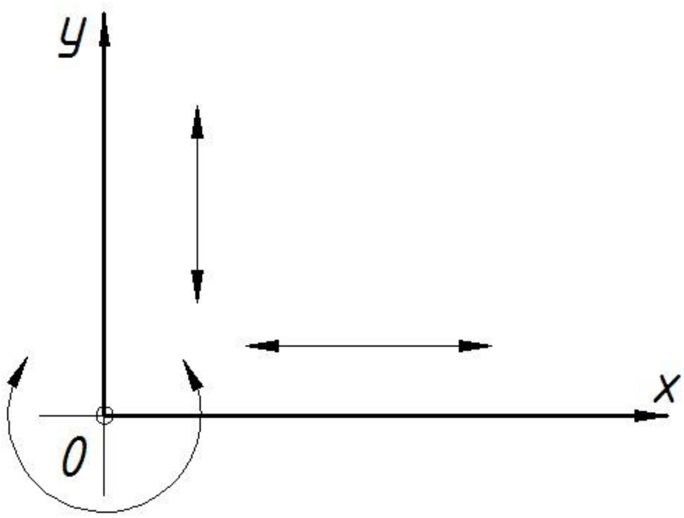
Sirtlar ajratilganda, agar *R=const* holda ikkita parametrli shar hosil bo'ladi. Bunday holda, faqat ikkita parametr, masalan *x* va *y* mustaqil va *z* (uchinchi parametr) qiymati dastlabki ikkitasiga bog'liq. Agar sirt *z=const* uchun radiusi o'zgaruvchan aylanaga tegishli bo'lgani uchun $0\leq R\leq\infty$, ikkita parametrli to'plamini hosil qilamiz. Bu holda, parametrlar faqat bitta , masalan *x* mustaqil hisoblanadi. Ikkinchi parametrning qiymati *y*-birinchisiga bog'liq.

1.2. SHAKLI VA HOLAT PARAMETRLARI

Bir xil o'lchamdagi nuqta to'plamlari turli geometrik shakllarni hosil qiladi. Shunday qilib, bitta parametrli to'plamlarga tegishli tekislik va aylana sezilarli farqga ega: aylana radius va tekislikdagi shakli-qiymati bilan (markazning koordinatalari bilan), to'g'ri chiziq esa faqat tekislikdagi holati bilan aniqlanadi. Geometrik figuralarni parametrlar umumiy sonini hisoblaganda ularni shakl va holat parametrlarini bir vaqtda hisoblab, aniqlanadi. $P=P_{sh}+P_h$,. P_{sh} , P_h.- shakl va holat parametrlari.

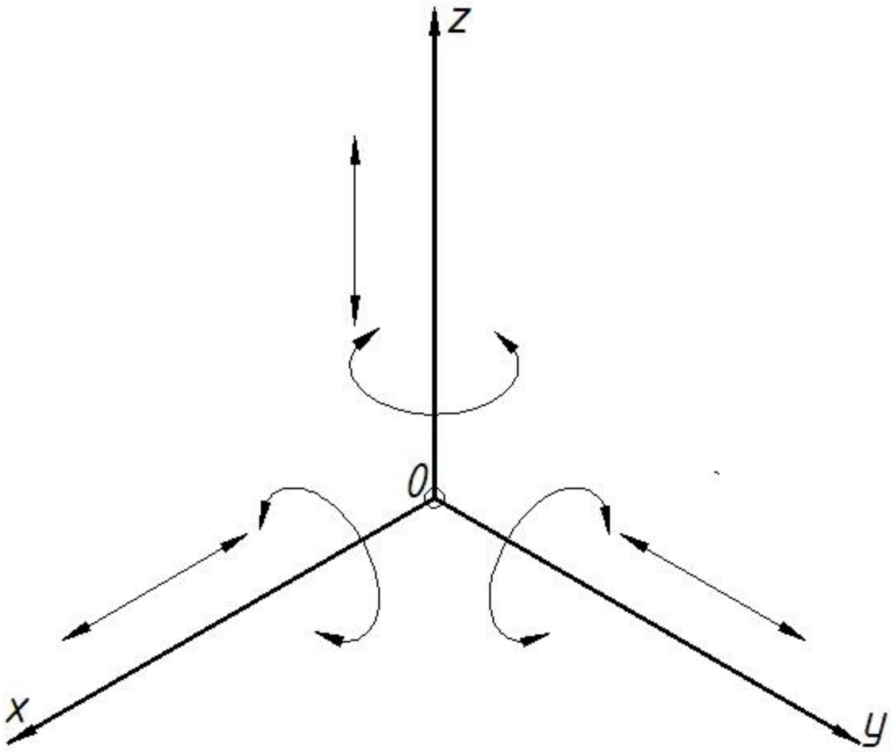
Shakl parametrlarini belgilash to'plamdan kongruent shakllar to'plamini tanlaydi. Shunday qilib, uchburchakning uch tomonining o'lchamlarini o'rnatib, biz barcha uchburchaklar to'plamidan kongruentlarni tanlaymiz.

Uchburchakning tekislikdagi o'rnini aniqlash uchun, masalan, uning uchlaridan birining koordinatalarini va undan chiqadigan tomonning yo'nalishini belgilashingiz mumkin. Har qanday tekis figuraning tekislikdagi o'rni uchta parametrdan oshmasligi bilan belgilanadi, chunki tekislikdagi har qanday figura markaz atrofida aylanish harakatiga va ko'chish harakatiga ega. Har ikki o'qning har biriga nisbattan (5-rasm). Shuni yodda tutish kerakki, barcha figuralar holat parametrlarining maksimal sonini belgilashni talab qilmaydi. Masalan, aylananing tekislikdagi holati fazodagi figuraning erkinlik darajalari soni sifatida aniqlanadi .



5-rasm.

Shaklning fazodagi o'rni oltidan ko'p bo'lmagan parametrlar bilan belgilanadi, chunki fazodagi har qanday figura oltidan ortiq erkinlik darajasiga ega emas: aylanish va ilgarilanma harakatlari o'qlari bo'ylab (6-rasm). Bunday figuralar mavjudki, ularning fazodagi o'rni kamroq sonli parametrlar bilan belgilanadi. Masalan, aylanish sirtning holati beshta parametr bilan belgilanadi, chunki bunday sirtni o'z o'qi atrofida aylanish harakati kordinata tizimining o'qi bo'ylab siljishi fazodagi sirt o'rnini o'zgartirmaydi. Sfera holati atigi uchta parametr bilan aniqlanadi, chunki sharning markaz atrofida har qanday aylanishi natijasida uning holati o'zgarmaydi.

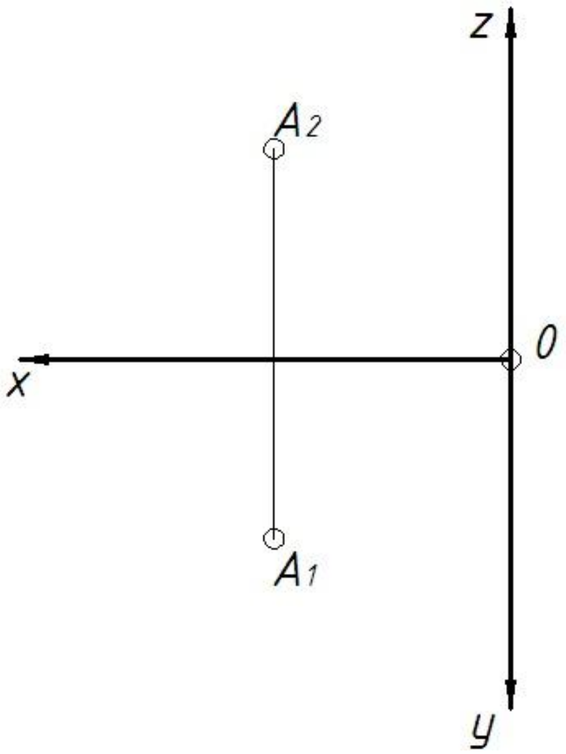


6-rasm.

Shakl parametrlariga ega bo'lmagan va faqat o'z holati bilan farq qiladigan figuralar - nuqta, to'g'ri chiziq va tekislikdir.

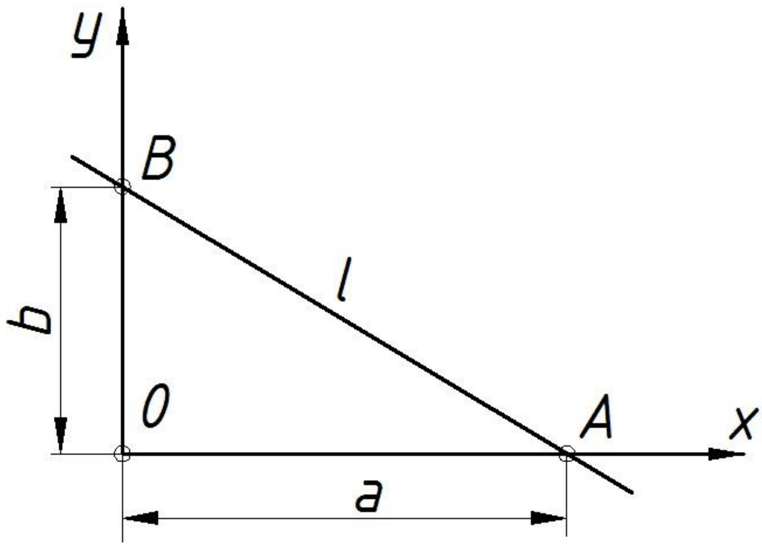
1.3. KOMPLEKS CHIZMADA ELEMENTAR GEOMETRIK SHAKLLARNI CHIZMASI.

Geometrik shakllarni kompleks chizmada belgilash ratsional hisoblanadi, agar shaklni fazoda aniqlaydigan parametrlar soni, uni chizmada o'rnatish uchun zarur bo'lgan parametrlar soniga teng bo'lsa. Tekislikdagi nuqtani ikkitasi bilan, fazoda esa uchta dekart koordinatalari bilan aniqlash shartlariga asoslanib, nuqta proektsiyasini qurish uchun foydalaniladigan parametrlar sonini hisoblaymiz $A(A_1, A_2)$ (7-rasm).Proektsiya A_2 sirtda $x0z$. U ikkita parametr (x, z), proektsiya A_1 - bittasi (y) bilan o'rnatiladi, chunki nuqta holati A_1 to'g'ri chiziqda bitta A_2 A_x parametr o'rnatilishi bilan aniqlanadi.



7-rasm

A nuqta ***x*** o’qida ***a*** kesma orqali va ***B*** nuqta y o’qida ***b*** kesma orqali ***l*** to’g’ri chiziqni belgilaydi. (8-rasm)



8-rasm.

Bu to’g’ri chiziqning tenglamasi

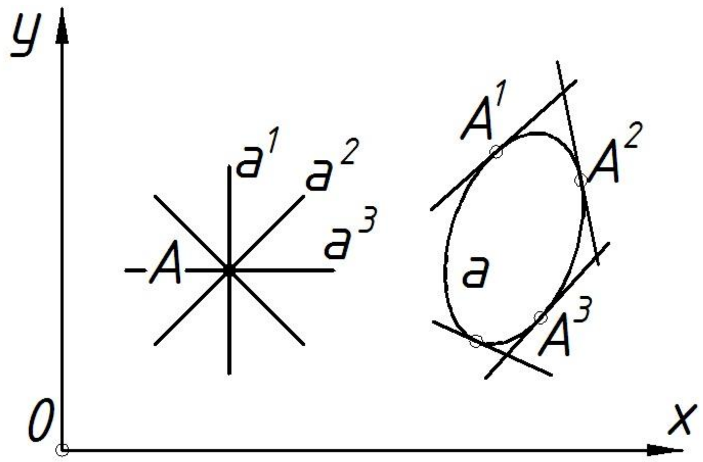
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Bu yerda *a, b* to'g'ri chiziqning parametrlari.

Ushbu parametrlar qiymatlari to’g’ri chiziqni tekislikda holatini aniqlaydi. Koordinatalar *x* va *y* to'g'ri chiziqning parametrlari emas, chunki ular to'g'ri chiziqning o'rnini emas, balki faqat to'g'ri chiziqdagi nuqta o'rnini aniqlaydi.

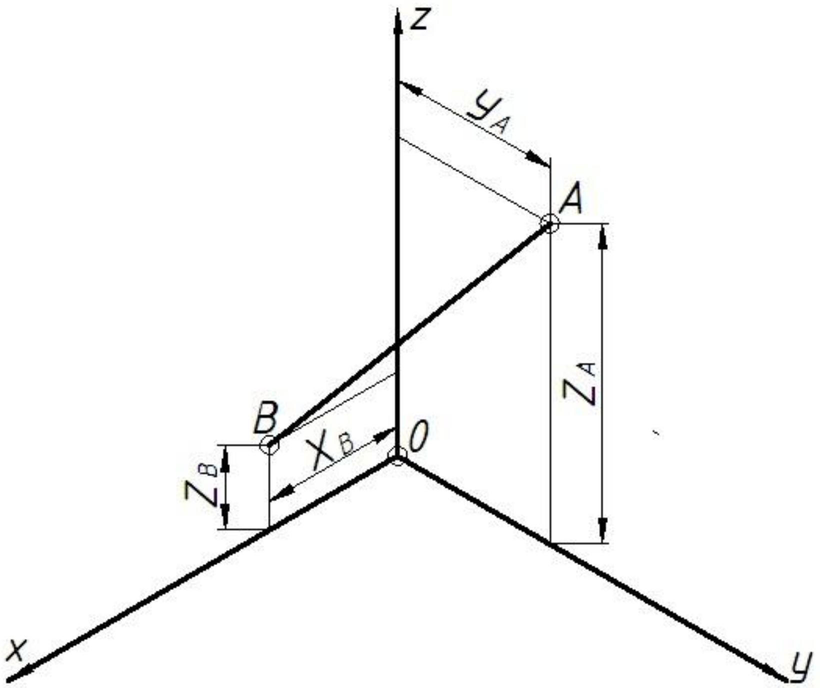
Agar *a* va *b* parametrlarni erkin deb hisoblansa, u holda butun tekislik ikki parametrli to'g'ri chiziqlar to'plami bilan to'ldiriladi, bu to'g'ri chiziqlar maydoni deb ataladi. Bitta parametrli to’g’ri chiziq maydonini hosil qilish uchun bitta parameter (a yoki b) aniq bo’lishi kerak.

Bu holda ikki parametrli to’g’ri chiziqlar to’plami nurlar bandiga aylanadi (9-rasm).



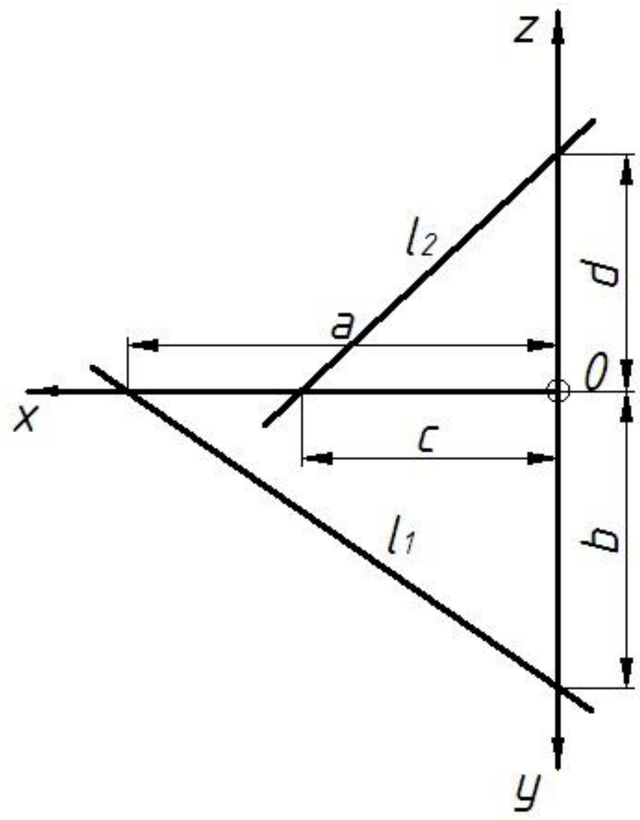
9-rasm.

E^3 fazoda to'g'ri chiziq to'rt parametr bilan aniqlanadi, ular, xususan, sirtlarning koordinatalari bilan kesishish nuqtalarining koordinatalari bo'lishi mumkin (10-rasm). Agar barcha parametrlar – $У_A$, Z_A, X_B, Z_B erkin deb hisoblansa, biz to'rt parametrli to'g'ri chiziqlar to'plamini hosil qilamiz. Ushbu to'plamning bitta parametrini bog'lashda uch parametrli to'plam ajralib chiqadi, bu chiziqlar majmuasi deb nomlanadi (masalan, berilgan chiziqni kesib o'tuvchi barcha chiziqlar). To'g'ri chiziqlar to'plamining ikkita parametri fazodagi ikkita to'g'ri chiziqning kesishishi sharti bilan bog'liq bo'lishi mumkin (masalan, ikkita kesishgan to'g'ri chiziq) va ikkita parametrli to'g'ri chiziqlar to'plami ajratilgan bo'lib, ular to'g'ri chiziqlarning kongruensiya deb nomlanadi. Uchta parametrni bog'lashda (masalan, uchta egri chiziq to'g'ri chiziqlari bilan kesishganda), egri sirtni tashkil etadigan bitta parametrli to'g'ri chiziqlar to'plami tanlanadi.



10-rasm.

Umumiy vaziytdagi to’g’ri chiziqni kompleks chizmada ko’rsatish uchun to'rtta parametr talab qilinadi. Ular *a*, *b*, *c*, *d*, to'g'ri chiziq kesmasi proektsiyalari koordinata o'qlari bo'yicha Π_1 va Π_2 tekislikdagi kesilgan kesmalardir (11-rasm).

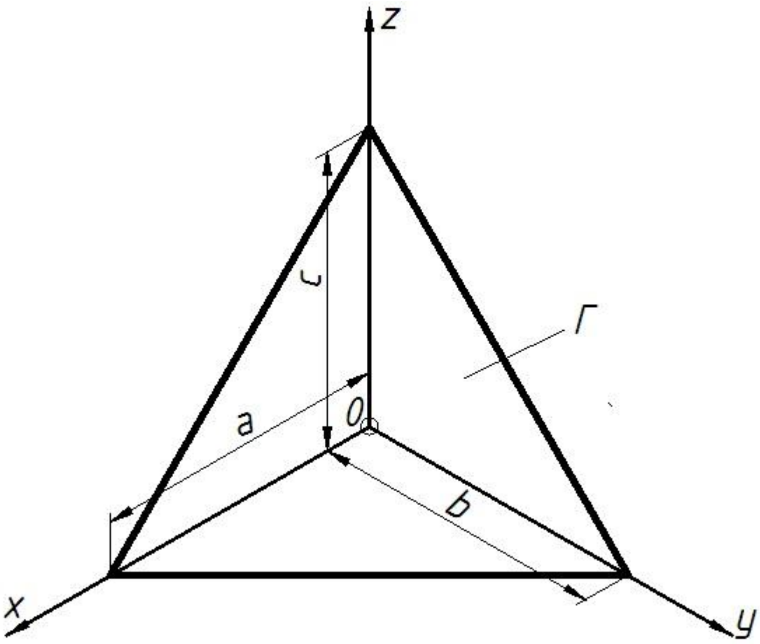


11-rasm.

E^3 sirt a, b, c kesmalari bilan belgilanadi(12-rasm). Bunday holda, tekislikning tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

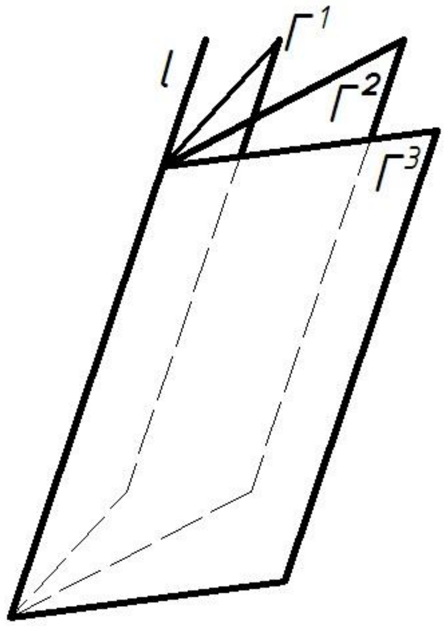
ko’rinishga ega bo'ladi, bu erda a, b, c ushbu tekislik uchun parametrlar doimiy qiymatlardir.



12-rasm.

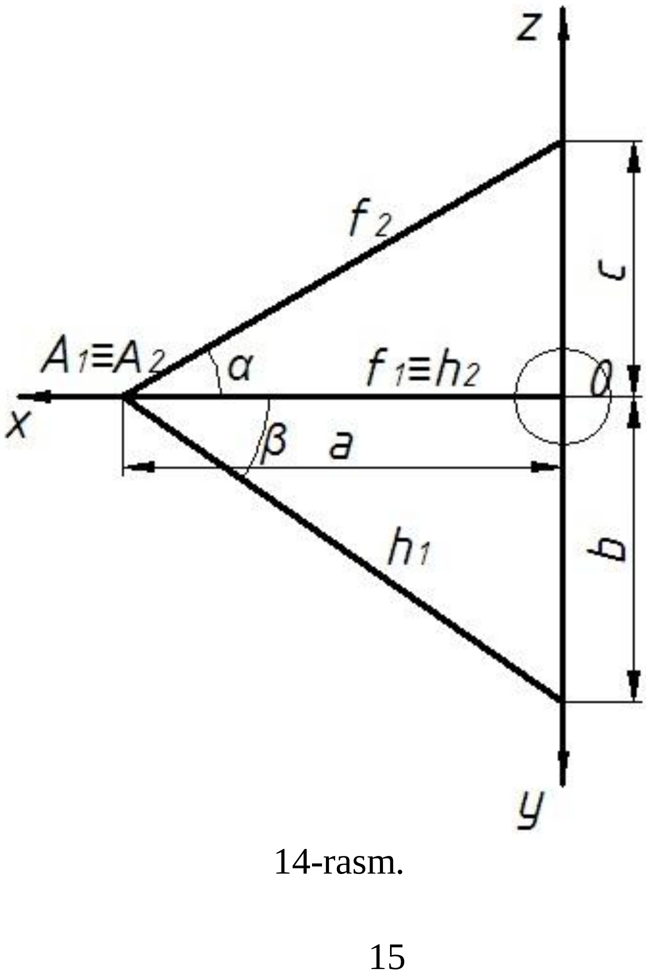
Agar barcha uchta parametr a, b, c - erkin deb hisoblansa, biz fazoni to'ldiradigan uch parametrli sirtlar to'plamini olamiz. Bitta parametrni bog'lash fazodan ikki parametrli sirtlar to'plamini tanlashga olib keladi. Bunday to'plamning alohida ko'rinishi - bu bitta nuqta orqali o'tadigan sirtlar to'plami. Ushbu amallar ∞^1 tekisliklar to’plamiga olib keladi.

Muayyan holatda, bitta parametrli sirtlar to'plami umumiy kesishish chizig'iga ega. Bunday to'plam sirtlar to'plami deb ataladi va ularning umumiy chizig'i ***l*** - bu to'plamning o'qi (13-rasm). Agar ***l*** xosmas chiziq bo’lsa, bir qator parallel tekisliklar olinadi.



13-rasm.

Kompleks chizmada tekislik koordinata o'qlarida *a, b, c* kesmalar bilan belgilanishi mumkin (14-rasm). Bu yerda *f* va *h* chiziqlari shu tekislikning (Π_2 va Π_1) proektsiya tekisliklari bilan kesishgan natijasidir va shunga mos ravishda *f* - frontal, *h* - gorizontal izlari deyiladi. *f* va *h* izlari x_1 o'qi bo'yicha kesib o'tadi va ularning proektsiyalari f_1 va h_2 O_X ga to'g'ri keladi. Ko'rsatilgan chizmada *f* va *h* izlari koordinata x_A nuqtasi va α, β nishablik burchaklari bilan ko'rsatilishi mumkin.



14-rasm.

Uchta nuqta orqali berilgan tekislikni klassik usulda belgilashda to'qqizta parametr talab qilinadi, ulardan oltitasini olib tashlash kerak, ular berilgan nuqtalarning tekislikdagi o'rnini aniqlaydi. Fazoda ∞^{9} uchta nuqta, bitta tekislikda va - ∞^{6}, fazoda $\infty^{9}/\infty^{6} = \infty^{3}$ tekisliklar. Ularning har biri unga tegishli har qanday uchlik nuqtalarini belgilash orqali aniqlanadi.

MASHQLAR

1. *n* - burchakli tekis figura shakl va holat parametrlarini tekislikda va fazoda aniqlang.
2. Silindrni va konusni fazodagi belgilaydigan parametrlarning sonini va turini aniqlang. Ulardan shakl va holat parametrlarini tanlang. Ushbu parametrlar yordamida silindrning ortogonal proeksiyalarini aniqlang.
3. Xos va xosmas nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chizilar to’plamini aniqlang. Har bir holatda bitta to'g'ri chiziqni tanlash uchun qancha parametr kerak? Ushbu nurlardan qancha tekis chiziqlar tekislikning ixtiyoriy nuqtasi orqali o'tadi?
4. Bir tekislikda yotmagan va to'g'ri chiziq va aylanani kesib o'tgan ikkita parametrli to'g'ri chiziqlar to'plamini fazoda ko'rsating. Bunday to'plamning nomi nima?
5. Ixtiyoriy ellipsga urinmalar to’plamini yasang va uni parametrini aniqlang.
6. Nechta to’g’ri chiziq fazoning va tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o’tishi mumkin?

2. FIGURALARNI O'ZARO MOSLIK, PARELLELLIK VA PERPENDIKULYARLIKNING GEOMETRIK SHARTLARI

Geometrik figurani aniqlash uchun moslik, parallellik va perpendikulyarlikning geometrik shartlarini belgilash bir qator parametrlarni belgilashga tengdir. Geometrik shartga teng parametrlar soni o'lchov deb ataladi va p^y bilan belgilanadi. Qiymat p^y ma'lum bir turdagi geometrik figuralar to'plamining o'lchamlari va ushbu shartni qondiradigan raqamlar to'plamining farqi bilan belgilanadi.

Muayyan geometrik shartni qondiradigan ko'rsatkichni ko'rsatish uchun zarur bo'lgan parametrlarni hisoblashda, ushbu shartning o'lchamini olib tashlash uchun ma'lum bir turdagi raqamlar uchun parametrlarning umumiy sonidan kelib chiqadi.

2.1 MOSLIK

Nuqtaning to`g`ri chiziqqa tegishli bo`lishi sharti tekislikdagi bitta parametrga va fazodagi ikkita parametrga teng bo`ladi, bu sirt ∞^2 fazodagi barcha nuqtalar to`plami o`lchamlari farqi sifatida olinadi. ∞^3 o'lchamlari ∞^1 nuqtaning to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lish shartini qondirish uchun:

$$p^y_{E^2} = 2 - 1 = 1;$$
$$p^y_{E^3} = 3 - 1 = 2.$$

Demak, tekislikda (2-1=1) va fazoda (3-2=1) to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan nuqtani belgilash uchun bitta parametr kerak bo'ladi.

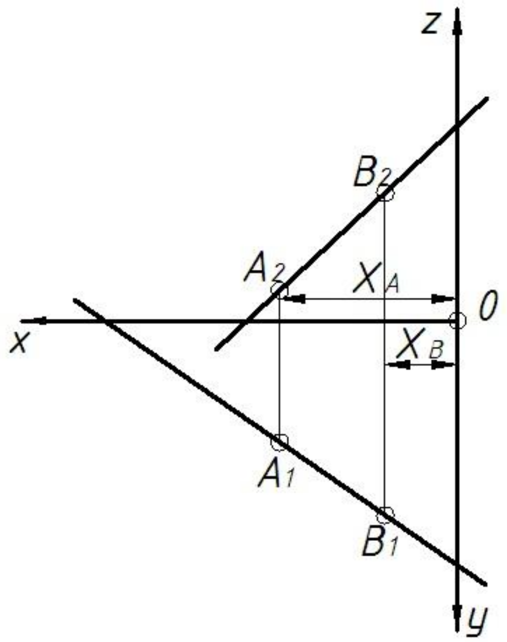
To'g'ridan-to'g'ri tekislikka tegishli bo'lish sharti ikkita parametrga teng, chunki E^3 dagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plamining o'lchami tekislikdagi tekis chiziqlarda to'rtga (∞^4), tekislikda to’g’ri chiziq esa (∞^2) tengdir. Bu yerdan p^y=4-2=2. Shunga o'xshash tarzda biz tekislikka tegishli bo'lgan nuqtada p^y=3-2=1 shartini olamiz. Ham to'g'ri chiziqni, ham tekislikni bir nuqtani o'rnatish uchun ikkita parametr talab qilinadi.

Ba'zi geometrik figuralarning parametrlanishiga misollar keltiraylik.

Sirtda chiziq kesmasini aniqlash uchun chiziqni aniqlaydigan ikkita parametr kerak; bittasi chiziqning boshlanish nuqtasini, ikkinchisi chiziq uzunligini belgilaydi. Jami to'rt parametrni oladi, bitta (uzunlik) - shakl parametri, ikkinchisi - holat parametrlari. Joylashuv parametrlari soni $P_n=P-P_ф=4-1=3$ mos bo’ladi.

Fazoda to'g'ri chiziqni ko'rsatish uchun to'rt parametr kerak va ikkitasi - boshlang'ich nuqtani va maydonlarni aniqlash uchun, ya'ni. $P=6;$ $P_n=6-1=5$. Shunday qilib, fazoda kesmani aniqlash uchun beshta holat parametri va bitta shakl patrametri talab qilinadi .

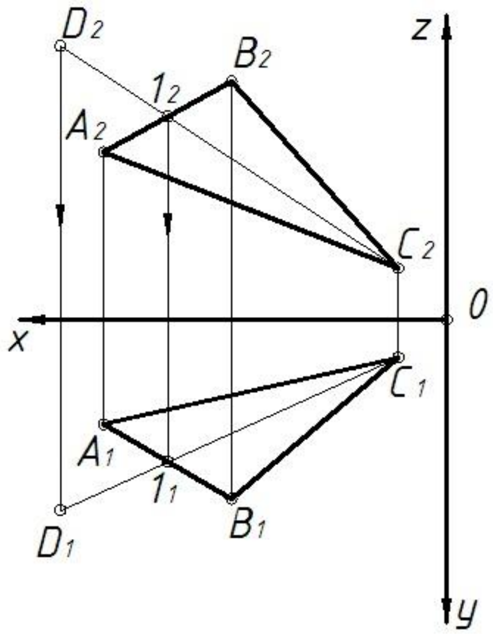
AB kesmada A_1B_1 va A_2B_2 proektsiyasini qurish uchun (15-rasm) oltita parametr kerak bo’ldi - to'rttasi ***l*** to'g'ri chiziq proektsiyalarini belgilash uchun ikkitasi - A va B nuqtalarni to'g'ri chiziqda x_A va x_B qiymatlarini aniqlash uchun.



15-rasm.

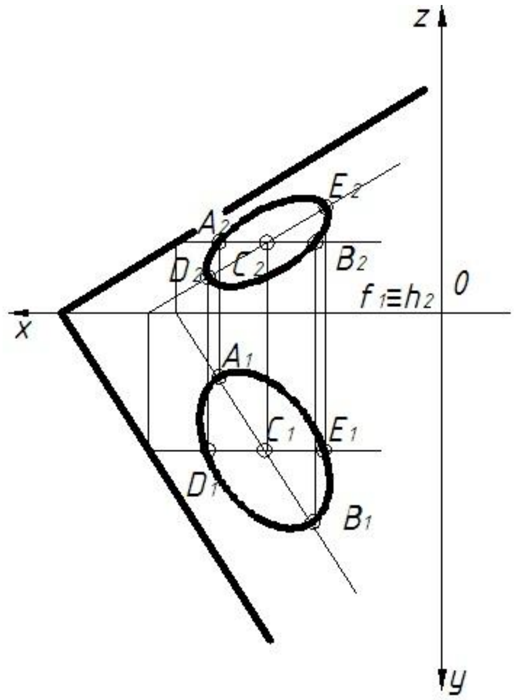
ABC uchburchakning uch parametrlarni aniqlashda, tekislikni aniqlash, qo'shimcha uchta parametrlari, qirralarini aniqlab o'lcham qo'yish va uchta tomon tekisliklari yo'nalishini aniqlash lozim. Shunday qilib, parametrlari soni $P=9$, holat parametrlar bo'lgan $P_n=9\text{-}3=6$ aniqlanadi, parametrlar tekisligi va fazoda bir uchburchakni uning uch uchlari koordinatalari orqali berilishi mumkin.

D nuqtaning proektsiyalarini aniqlash *ABC* tekisligiga tegishli ikki parametr yetarlicha x_D, z_D (D_2) ni belgilaydi, shuning uchun y_D (D_1) nuqtadan tekislikka tegishli (16-rasm).



16-rasm.

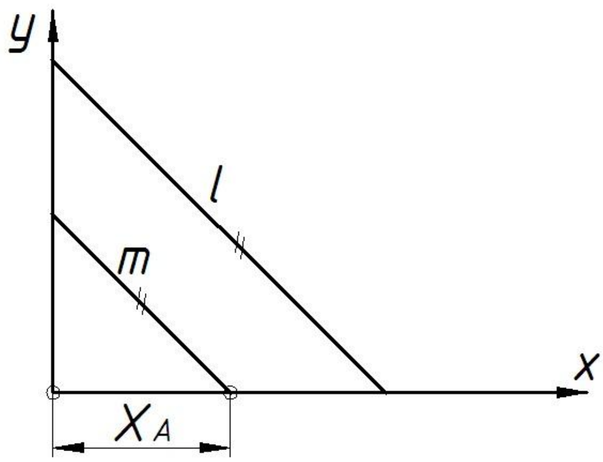
Uning umumiy holatidagi tekislikka tegishli bo'lgan aylananing proektsiyalarini belgilashda tekislikni aniqlash uchun uchta parametr, ikkitasi – markazni *C* tekislikda o'rnatish uchun, va bitta - radius uchun faqat oltita parametr kerak (17-rasm). Aylana proyeksiyasi, tekislikning umumiy vaziyati, qurilgan ellips, *AB*, *DE* ikkita diametrli tutashma asosida yasalgan. Bunday holda, shakl parametri bitta (*R*) holat parametrlari $P=6\text{-}1=5$ ga teng. *AB* va *DE* doiralarining diametrlari mos parallel ravishda Π_1 va Π_2 tekisliklarda to'liq proyeksiyalanadi.



17-rasm.

2.2. PARALLELLIK

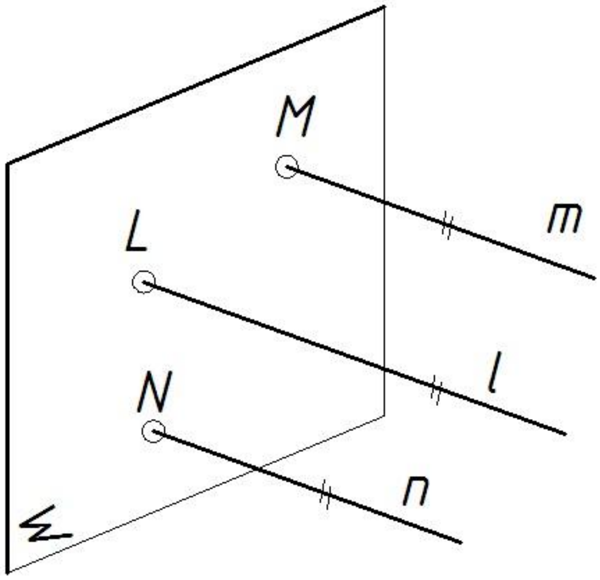
Parallel chiziqlar. Tekislikdagi ikkita to'g'ri chiziqning parallellik sharti o'lchovi (18-rasm) 1 ga teng, chunki sirtda barcha to'g'ri chiziqlar ∞^2 va berilgan chiziqlar parallellik shartini qondiradigan to'g'ri chiziqlar ∞^1 mosdir.



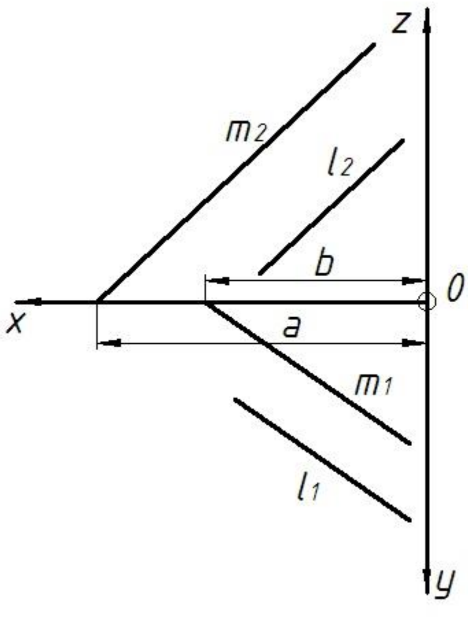
18-rasm.

18-rasmda $P^y=2\text{-}1=1$ olingan to'g'ri chiziq chizish uchun $m//l$ bitta parametr x_A o'rnatiladi.

Ikki to'g'ri chiziqning fazodagi parallellik sharti o'lchovi quyidagicha aniqlanadi. Fazodagi jami to'g'ri chiziqlar E^3-∞^4 berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar - ∞^2 masalan, ma'lum bir tekislikka tegishli *l* nuqtalar to'plamidan o'tgan ∞^2 berilgan *L, M, N* ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar to'plami Σ (19-rasm). Binobarin, to'g'ri chiziqni kompleks chizmada chizish uchun *m//l* ikkita parametr bo'lishi kerak, masalan *a* va *b* (20-rasm).

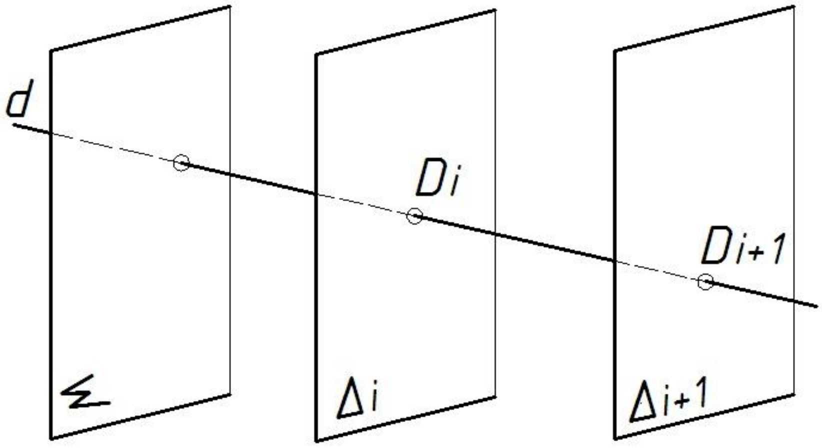


19-rasm.



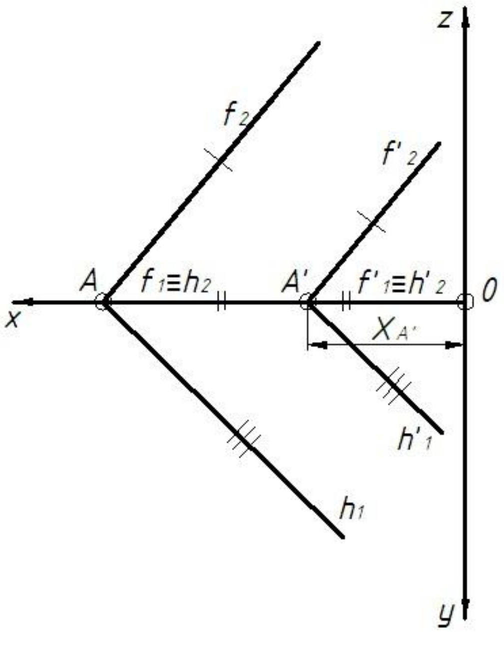
20-rasm.

Parallel tekisliklar . Fazoda faqat ∞^3 tekisliklar bo'lganligi va berilganlarga parallel bo'lganligi sababli ∞^1 (perpendikulyar ∞^1 va D_i ga tegishli bo'lgan *d* ga Σ yoki Σ kesishgan boshqa bir to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalarning har biri orqali o'tishi 21-rasm), ikkita tekislikning parallelligi holatining o'lchami $P^y = 3\text{-}1=2$.



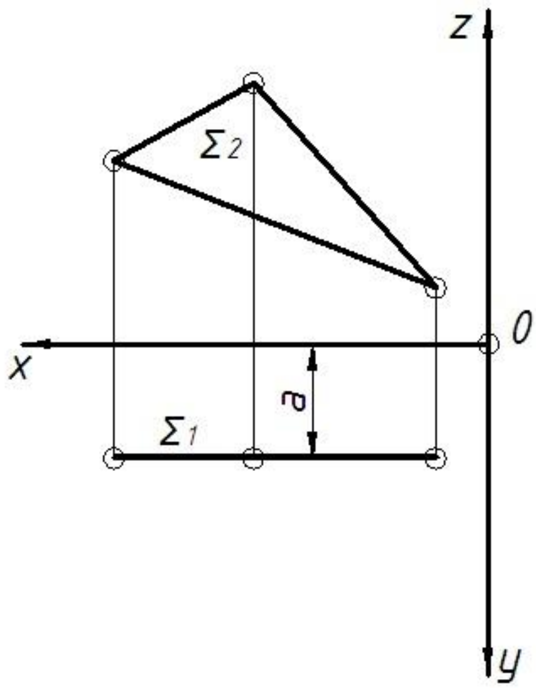
21-rasm.

Shuning uchun berilganga parallel tekislikni aniqlash uchun faqat bitta parametrni ko'rsatish kerak. Ma'lumki, tekisliklar o'zaro parallel, agar ulardan birining kesishgan ikkita chizig'i mos ravishda ikkinchisining kesishgan ikkita chizig'iga parallel bo'lsa. Shuning uchun Δ ga parallel bo'lgan *Σ(f,h)* tekislikni qurish uchun (22-rasm), masalan, x'_A qiymatiga ega bo'lgan A^1 nuqtani o'rnatishingiz mumkin. , keyin $f^1//f$, $h^1//h$ bo'ladi.



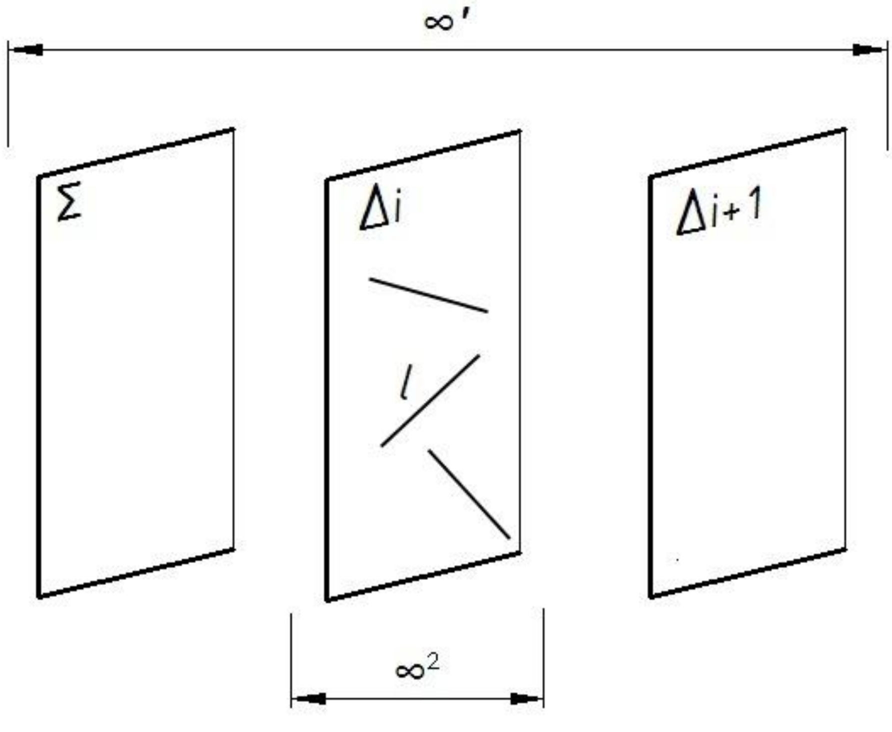
22-rasm.

Koordinata tekisliklaridan biriga parallel bo'lgan tekislik uchun parametrni o'rnatish kerak 23 - rasmda ko'rsatilganidek, *a*- bu tekisliklar orasidagi masofa. $Σ//Π_2$



23-rasm.

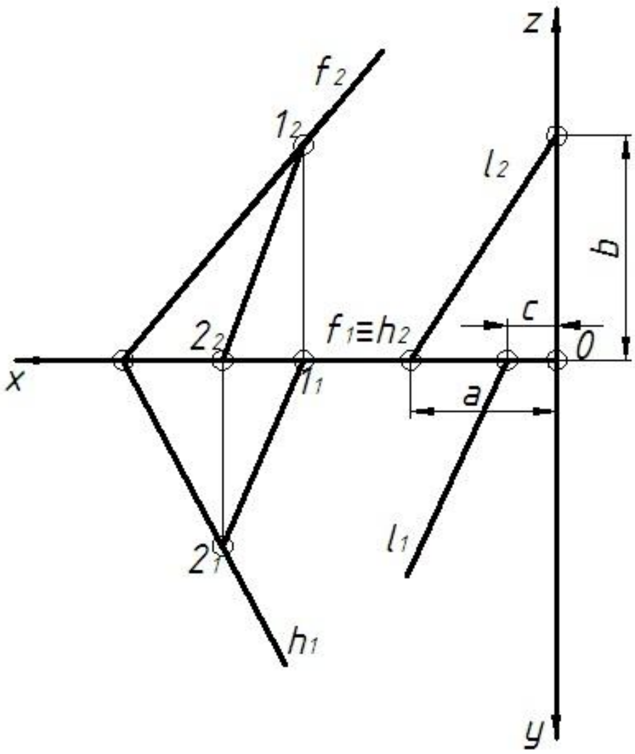
Parallel chiziq va tekislik. (24-rasm) da ko’rsatilgan bir nechta Δ_i tekisliklar Σ parallel, ∞^1 ham ularning har biri tegishli to’g’ri chiziq $l\,\infty^2$ tashkil qiladi, tekislikka parallel ravishda tekis chiziqlar Σ, ∞^1 ∞^2 ∞^3 bo’ladi. Shunday qilib, to'g'ri chiziq va tekislikning parallelligi holatining o'lchovi $P^y=4\text{-}3=1$.



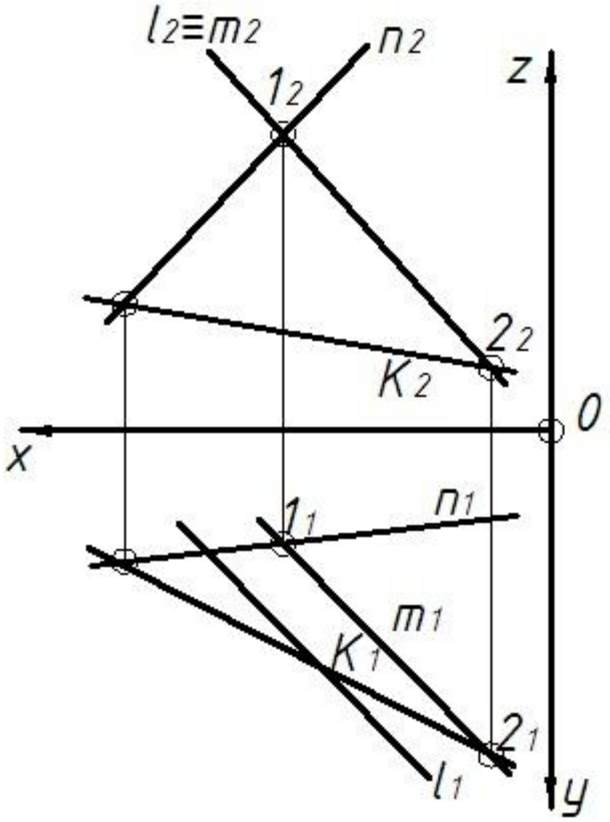
24-rasm

Shuning uchun tekislikka tekis chiziqning proektsiyasini o'rnatish uchun uchta parametr talab qilinadi. Masalan, tekislik Σ (f, h) o'rnatilsin (25-rasm). To'g'ri chiziq l ni Σ ga parallel qilib qurish kerak. Biz chiziqning uchta parametrini belgilaymiz l: a, b, c. Bu chiziqda, tekislik ma'lum kamida bitta chiziqqa parallel bo’lsa, masala yechiladi. Shuning uchun to'rtinchi parametr parallellik shartidan aniqlanadi. Tekislikka tegishli 1 2-chiziq l ga paralel.

26-rasmda ko’rsatilgan, Σ ga tegishli m to'g'ri chiziqni aniqlab, proektsiyalarning ($m_2 \equiv l_2$) birida l ga to'g'ri keladigan, $\Sigma(k, n)$ tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni qurish algoritmini ko'rsatadi. To'g'ri chiziqni qurish uchun $l \parallel \Sigma$ va bu holda uchta parametr talab qilinadi: l_2 ni o'rnatish uchun va bitta - $l_1 \parallel m_1$ ni qurish uchun.

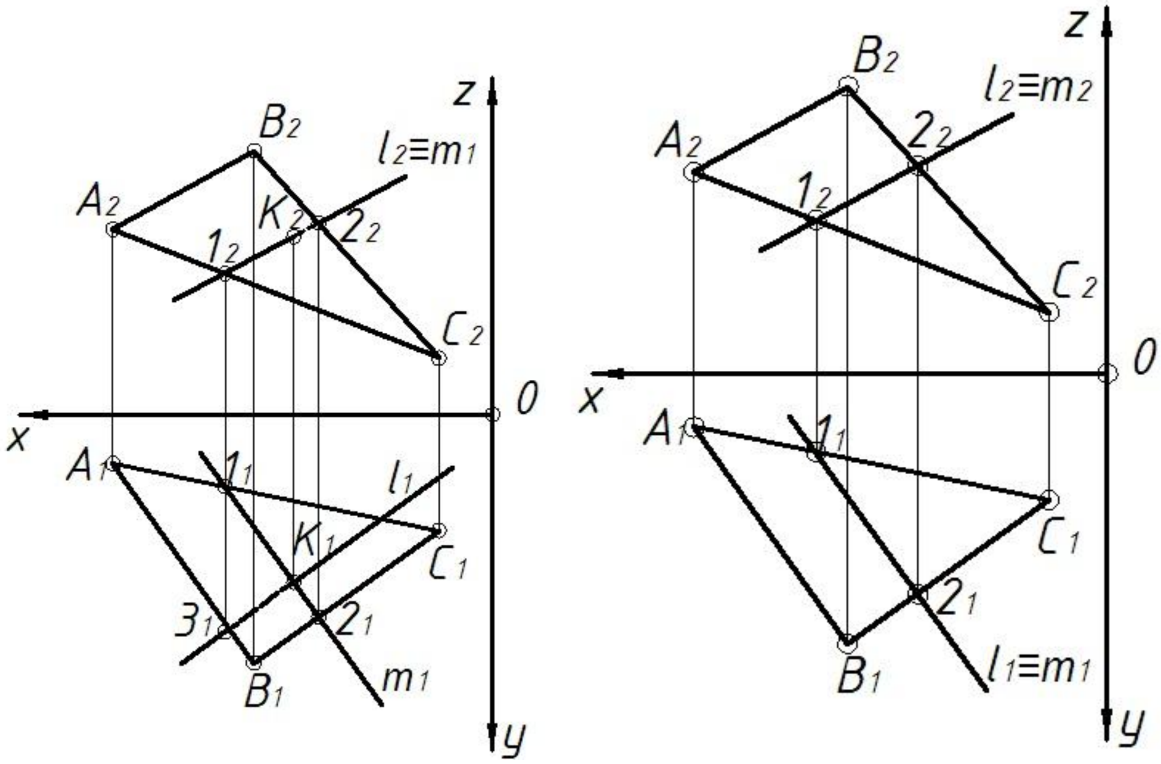


25-rasm.



26-rasm

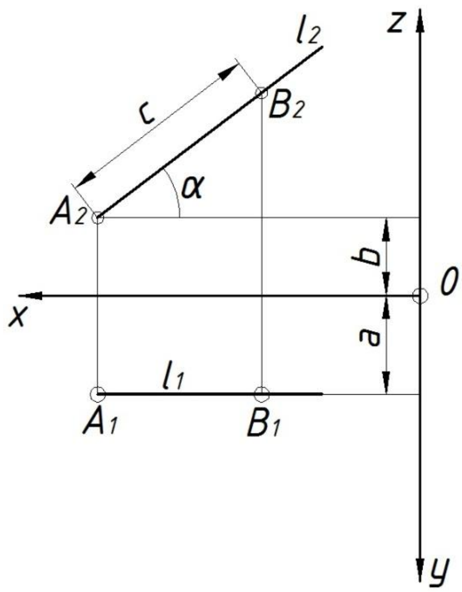
Proektsiyalarning biriga berilgan *l* chiziq bilan to'g'ri keladigan $m \in \Sigma$ to'g'ri chiziqni qurish algoritmidan foydalanib, *l* va Σ ning nisbiy holatini aniqlash mumkin. Agar $l \parallel m$ bo'lsa, u holda $l \parallel \Sigma$… .. (26-rasm); agar $l \equiv m$…. bo'lsa, $l \subset \Sigma$. (27-rasm, a); Agar $l \cap m = K$ bo'lsa, u holda $l \cap \Sigma = K$, ya'ni. to'g'ri chiziq *l* tekislikni *K* nuqtada kesib o'tadi. (27-rasm, b)



a *b*

27-rasm.

Bunday holda, tekislikning biriga proektsiyalari mos keladigan nuqtalar yordamida chiziqning ko'rinishi aniqlanadi. Bunday nuqtalar raqobatlashuvchi nuqtalar deb ataladi. Masalan, shakl *1* va *3* nuqtalaridan. Π_2 ustidagi (27-rasm, a). 3 nuqta katta *y* koordinataga ega bo'lib ko'rinadi. Shuning uchun *3K* kesma Π_2 da ko'rinadi. Agar chiziq *l* koordinata tekisliklaridan biriga parallel bo’lsa, uni sozlash uchun uchta parametr kerak bo'ladi, ular l // Π_2 a, b kesmalari va α burchak bo'lishi mumkin. (28-rasm).

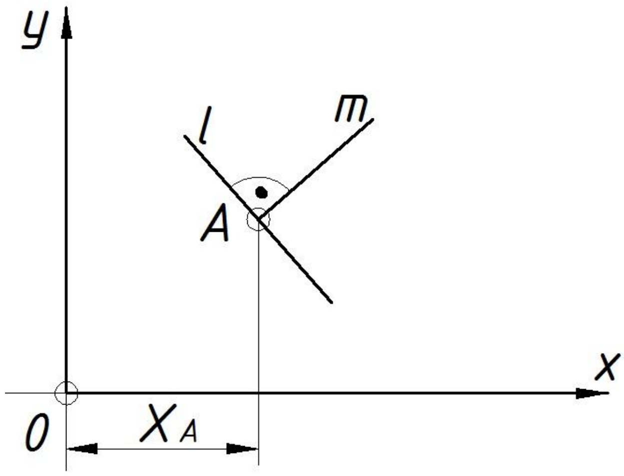


28-rasm.

2.3. PERPENDIKULYARLIK HOLATI

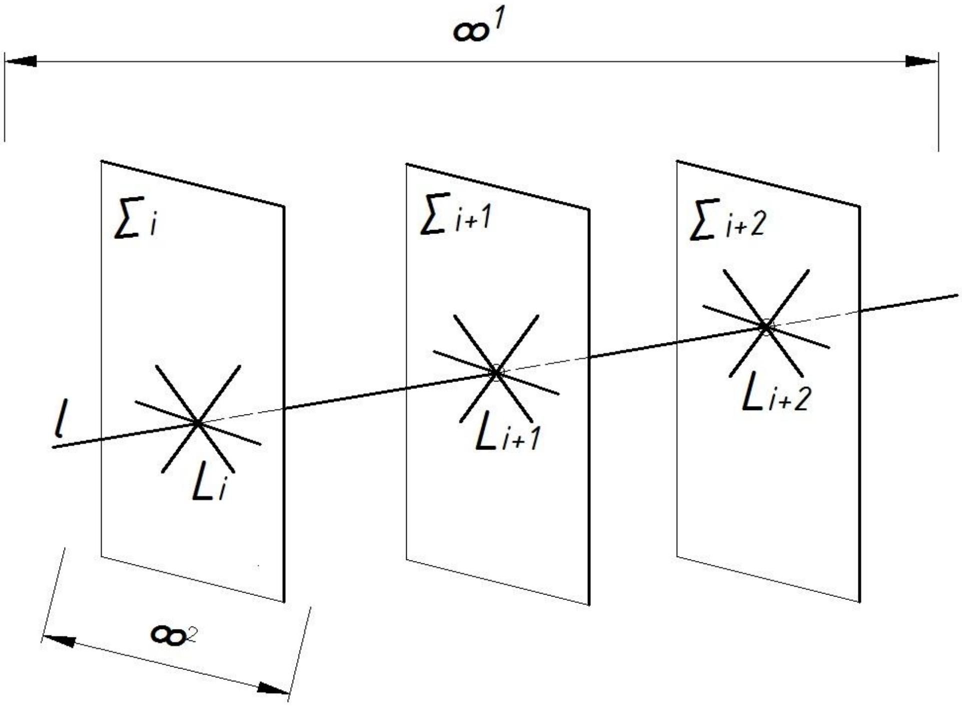
Ikki chiziqning perpendikulyarligi.

Barcha tekislikdagi chiziqlar ∞^2 tashkil qiladi, tekislikdagi berilgan chiziqqa perpendikulyar chiziqlar esa ∞^1 tashkil qiladi, chunki bitta perpendikulyar chiziqning ∞^1 nuqtalarining har biri orqali o'tadi. Demak, P^V=2-1=1 tekislikdagi ikkita to'g'ri chiziqning perpendikulyarligi holatining o'lchovi. $m \perp l$ to'g'ri chiziqni qurish uchun bitta parametr kerak (29-rasmdagi x_A).



29-rasm.

Fazoda o'zaro perpendikulyar chiziqlarni belgilashda bizda quyidagilar mavjud: jami ∞^4 chiziqlar mavjud, ma'lum bir chiziqning perpendikulyarligi sharti ∞^3 bilan belgilanadi (kesishgan va uchrashmas chiziqlar tomonidan qondiriladi). (30-rasm) da *l* chiziqqa Σi tekislikning barcha chiziqlari perpendikulyar, bunday tekisliklar ∞^1 tashkil qiladi. Shunday qilib $\infty^2\infty^1 = \infty^3$ ni olamiz, ya'ni berilgan chiziqqa perpendikulyar bo'lgan uchta parametrli to'g'ri chiziqlar to'plami mavjud.



30-rasm.

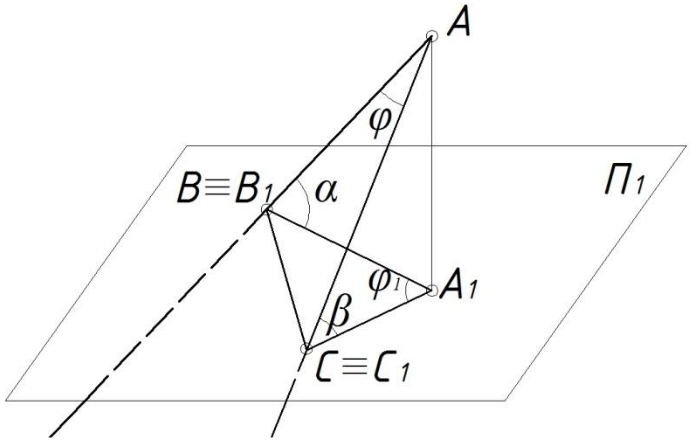
Shunday qilib, fazodagi ikkita to’g’ri chiziq perpendikulyarlik sharti o’lchovi 1 ga teng, P^Y=4-3=1. Agar chiziqlar kesishsa P^Y=4-2=2 teng.

Demak, o’zaro perpendikulyar kesishuvchi to’g’ri chiziqlar uchun ikkita parametr berilishi kerak, uchrashmas to’g’ri chiziqlar uchun uchta parametr talab qilinadi.

Kompleks chizmada o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlarni qurish algoritmini ko'rib chiqamiz. (31-rasm)da ixtiyoriy φ burchakni φ_1 ortogonal proektsiyasi berilgan, uning tomonlari proyeksiya tekisliklarini α va β burchaklar orqali kesishadi.

$$cos\varphi_1 = \frac{cos\varphi - sin\alpha\, sin\beta}{cos\alpha\, cos\beta}$$

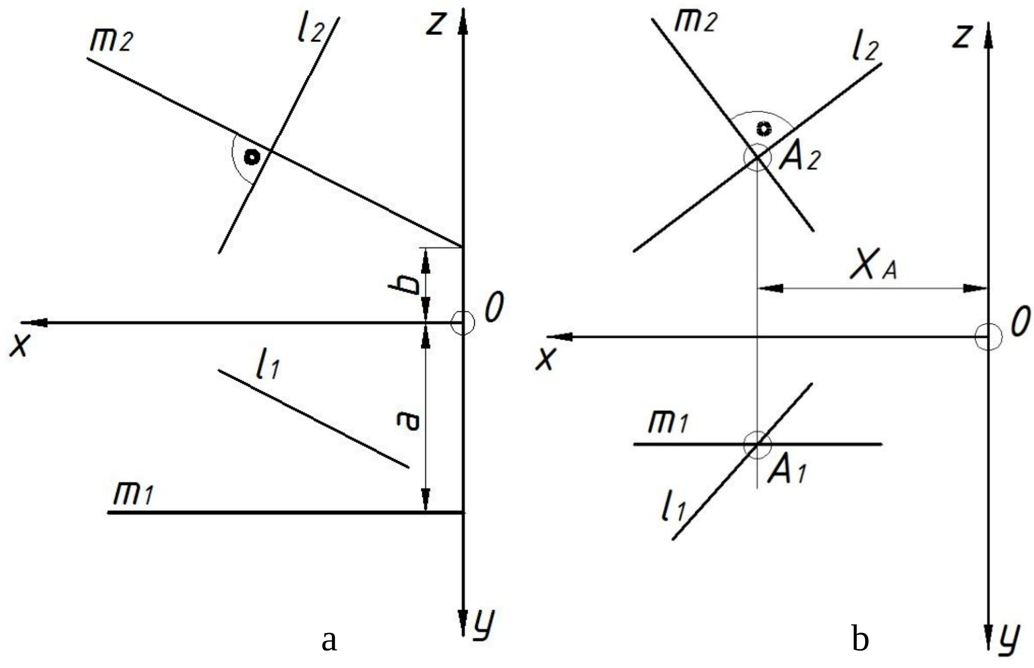
bu erda to’g’ri burchak ikkala tomoni proektsiyalar tekisligini kesib o'tuvchi bo’lib, $cos\varphi_1 = -tg\alpha\, tg\beta$ o’tmas burchakka proyeksiyalanadi.



31-rasm

Agar to'g'ri burchakning bir *AB* tomoni Π_1 proektsiyalar tekisligiga parallel bo’lsa, ikkinchisi *AC* esa unga perpendikulyar emas deb hisoblasak, u holda $\alpha=0$, $\cos\varphi_1=0$, ya'ni $\varphi_1=90^0$.

Shunday qilib, bir tomoni tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri burchak proektsiyasi ushbu tekislikka to’g’ri burchak bo’lib proektsiyalanadi. Teskari fikr xam to’g’ri agar bir tomoni proyeksiya tekisligiga parallel bo'lgan burchakning ortogonal proektsiyasi to'g'ri burchak bo'lsa, u holda proektsiyalangan burchak ham to'g'ri bo'ladi.

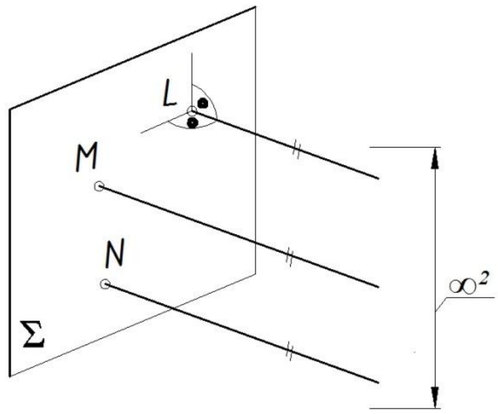


a b

32-rasm.

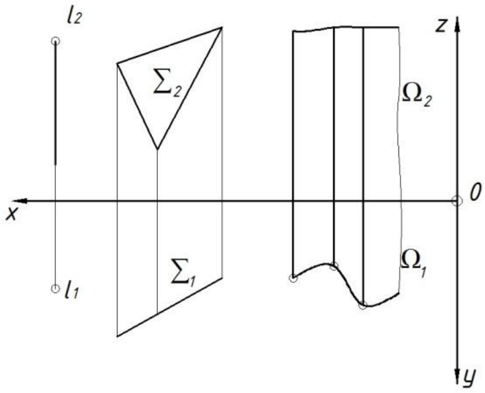
(32-rasm, a)da ikkita kesishgan *l* va *m* to'g'ri chiziqlardan iborat to’g’ri burchakni proektsiyalari berilgan, (32-rasm, b)da uchrashmas *l* va *m* chiziqlardan iborat to’g’ri burchakni proektsiyalari berilgan. Bundan tashqari, (32-rasm, a)da berilgan umumiy vaziyatdagi *l* to'g'ri chiziqqa perpendikulyar *m* chiziqni proektsiyalarini belgilash uchun x_A, bitta parametr kerak bo’ladi. (32-rasm, b)da ikkita *a* va *b* parameter kerak bo’ladi. Ikkala holatda ham parametrlar o’lchovi bittaga qisqardi. Bu yerda m_1 // OX parallellik shartining $p^y = 1$ o'lchovi bilan izohlanadi.

To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi. Umuman olganda, Σ^3 fazoda $-\infty^4$ to’g’ri chiziqlar mavjud, shulardan $-\infty^2$ tekislikka perpendikulyar, chunki mavjud to’g’ri chiziqlardan ∞^2 tekislikdagi *L, M, N*,… .. har bir nuqtasiga bitta perpendikulyar chizish mumkin. (33-rasm). Demak, to'g'ri chiziq va tekislik perpendikulyarligi holatining o'lchovlari $p^y = 4\text{-}2 = 2$.

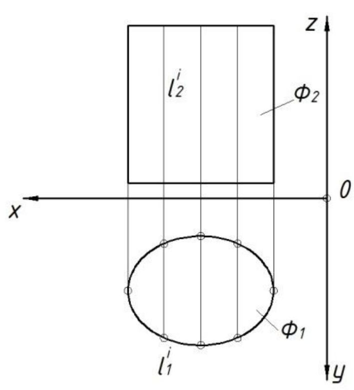


33-rasm.

Darhaqiqat, proyektsiya tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni belgilash uchun ikkita parametr yetarli, masalan, l_1 gorizontal chiziqning ikkita koordinatasi (34-rasm, bu erda $l \perp P_1$). Proyeksiya tekisliklariga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlar gorizontal, frontal va profil proyeksiyalovchi deb nomlanadi. Ularning ushbu tekisliklarda proektsiyalari nuqtalarga aylanib, boshqa tekisliklarga to’g’ri o’ziga teng kesma bo’lib proektsiyalanadi. Agar biz biron bir sirtni bitta parametrli to’gri chiziqlar to'plami sifatida tasavvur qilsak, biz proektsiyalovchi figuralarni hosil qilamiz. (34-rasm)da shuningdek Σ silindrsimon sirtni Ω tekislikni gorizontal ravishda proektsiyalashganini va (35 –rasm) Φ elliptik silindrni ko’rishimiz mumkin.

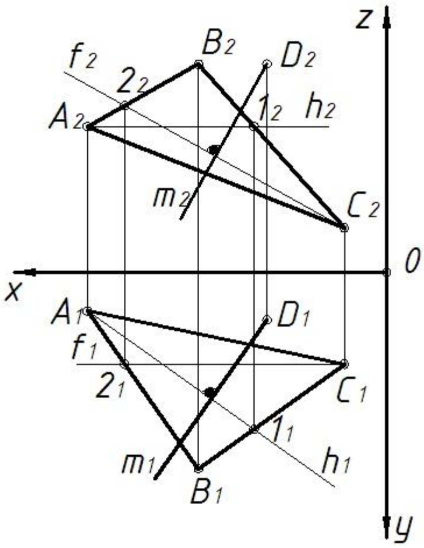


34-rasm.



35-rasm.

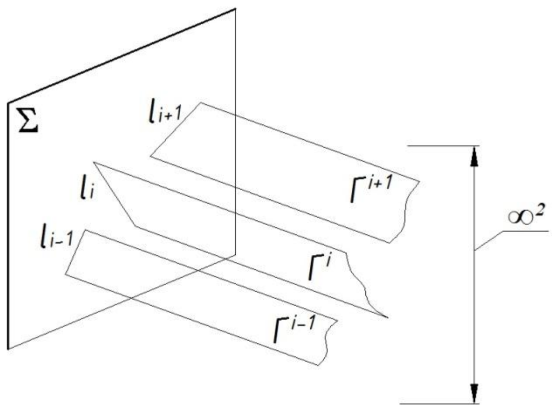
Ba'zi masalalarni yechishda umumiy vaziyatdagi tekislikka perpendikulyarni qurish kerak. Bunday holda, agar ushbu tekislikka tegishli bo'lmagan ma'lum bir nuqta orqali tekislikka perpendikulyar chizilgan bo'lsa, unda E^3-dagi yagona to'g'ri chiziqni ajratib turadigan to'rtta parametr quyidagicha taqsimlanadi: ikkitasi - ma'lum bir nuqtaga tegishli bo'lish sharti uchun va ikkitasi - tekislikka perpendikulyarlik sharti uchun. *ABC* tekisligi va tekislikka tegishli bo'lmagan *D* nuqta berilsin (36-rasm). Ikki to'g'ri chiziqning kesishishining to'g'ri burchagi proektsiyasining xususiyatini hisobga olgan holda, biz frontal *f* va gorizontal *h* ni tekislikda o'rnatamiz, so'ngra perpendikulyar $m_2 \perp f_2$ va gorizontal $m_1 \perp h_1$ ning frontal proektsiyasini bajaramiz.



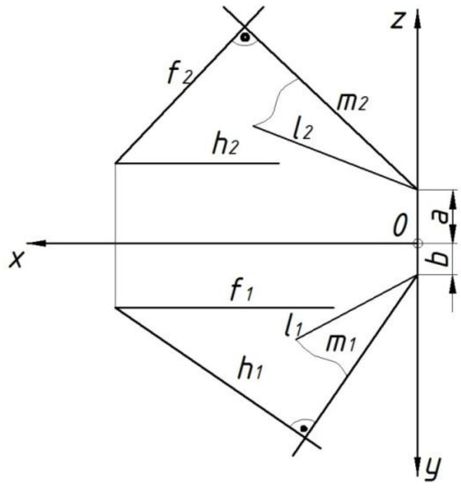
36-rasm.

Ikki tekislikning perpendikulyarligi. Ikki tekislikning perpendikulyarligi shartining parameter o'lchovi quyidagicha aniqlanadi:
E^3 fazoda barcha tekisliklarning soni ∞^3 teng, va berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekisliklarning soni ∞^2 (tekislikdagi chiziqlar soni bo'yicha (37-rasm),
bu yerda $p^y = 3\text{-}2 = 1$

Shunga asoslanib, chizmada tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislikni aniqlash uchun ikkita parametr (*a* va *b*. 38-rasmda *l* ixtiyoriy to'g'ri chiziq, $\Gamma(m, l) \perp \Sigma(f, h)$ o'rnatilishi kerak.



37-rasm.



38-rasm.

Ko'rib chiqilayotgan geometrik shartlar asosida geometrik figuralar proektsiyalarining metrik va pozitsion xususiyatlari aniqlanadi [1].

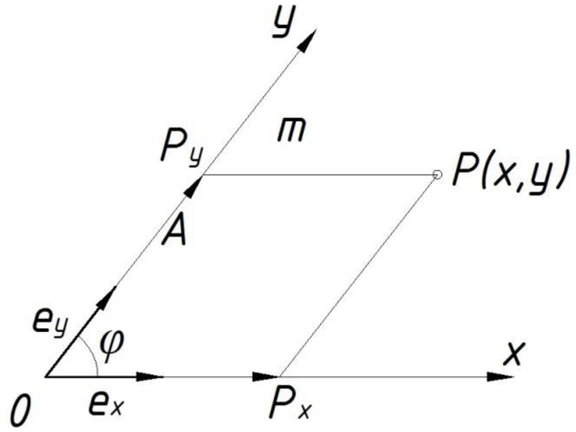
MASHQLAR

1. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va ba'zi to'g'ri chiziqlariga parallel bo'lgan umumiy vaziyatdagi tekislikning proektsiyasini toping; Ushbu holatlarning har biriga ixtiyoriy qancha parametrni tanlashingiz mumkin?
2. Berilgan uchta kesishgan to'g'ri chiziqni umumiy holatida kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqni chizing. Parametrlash nazariyasi bo'yicha yechimlar sonini asoslang.
3. Parallellik va to’g’ri chiziqlarning perpendikulyarlik holatini hisobga olgan holda, tekislikda uchta juft yon tomoni, ikki juft parallel va ikki juft perpendikulyar tomonlari bilan parallelogramm, to’rtburchak, olti burchakni o’rnatish uchun zarur bo’lgan parametrlar sonini hisoblang.
4. Parallellik va perpendikulyarlik shartlarining o'lchovlarini hisobga olib, parallelepiped, kubni aniqlash uchun zarur bo'lgan parametrlar sonini aniqlang.

3. AFFIN QAYTA TUZISHLAR

3.1. KOORDINATALI TIZIMLAR

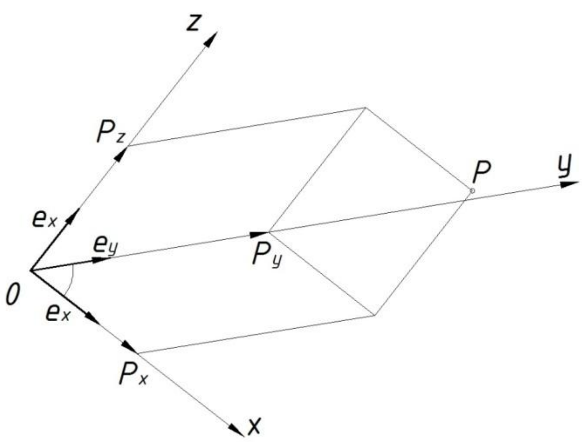
Koordinata tizimi – bu shunday qoidalar to’plami har bir ob'ekt (nuqta)ga raqamlar to'plamini x_1, x_2, x_3 (koordinatalarni) mos qo’yadi. Koordinatalar soni fazoning o’lchamlari bilan belgilanadi.



39-rasm.

Afin va Dekart koordinata tizimlari tekislikda shaklda ko'rsatilgan sxema bo'yicha nuqtalar va haqiqiy sonlar o'rtasida yakka o’zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. (39-rasm)da $y=OP_y$ и $x=OP_x$ yo'naltirilgan kesmalarining qiymatlari afin yoki dekart koordinatalar deyiladi. Agar birlik koordinatalari $e_y \neq e_x$ kesmalari farq qilsa, tizim afin deyiladi. Agar $e_y = e_x$, $\varphi \neq 90^0$,, - qiyshiq dekart, agar $e_y = e_x$, va $\varphi = 90^0$ - to'g’ri burchakli dekart tizimi deyiladi. Agar musbat x va y o’qlarini orasidagi burchak π dan kam bo’lsa va soat yo’nalishi bo’yicha qarshi harakatlansa, afin yoki dekart koordinatalar tizimi o'ng tizimi deb ataladi.(39-rasm)da ko'rsatilgan tizimdek.

(40-rasm)da fazodagi affin koordinatalar tizimining sxemasi keltirilgan. Agar koordinatalar o'qlari o'zaro perpendikulyar bo'lsa va ulardagi birlik kesmalari teng bo'lsa, tizim to'g’ri burchakli dekart sistemasi deb ataladi. Agar O_x, O_y, O_z o'qlari fazoning istalgan nuqtasidan qaralganda, O_x va O_y o'qlari tekislikda o'ng koordinata tizimini hosil qilsa, o'ng tizimini hosil qiladi. (40-rasm)da ko'rsatilgan tizimdek.



40-rasm.

Affin va dekart koordinatalari tizimlari kompyuter grafikalarida ishlatiladigan asosiy tizimidir. Bu yerda nuqta koordinatalari odatda vektor - qator [x y], [x y z] yoki ustunli vektor sifatida qaraladi.

Kompyuter grafikasida bir xil koordinatalar tizimi ham keng qo'llaniladi, bu yerda n o'lchovli fazoda ob'ektni $n + 1$ o'lchovli fazoga aks ettirishga asoslangan.

Affin koordinatalari tizimi Oxy va tekislikda koordinatalari [x y] bo'lgan ixtiyoriy nuqta berilsin. Ixtiyoriy [x y 1] sonlar mutanosib [x_1 x_2 x_3] sonlarning har qanday aniq P nuqtaning berilgan Oxy affin tizimida koordinatalari deyiladi. Ta'rifga ko'ra, P[x y] nuqtaning bir hil koordinatalari istalgan [hx hy h] ($h \neq 0$) bo'lishi mumkin va aksincha, har qanday [x_1 x_2 x_3] uchun topilishi mumkin.

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

Xuddi shu tarzda, uch o'lchovli fazoda [x y z] affin koordinatalari bo'lgan nuqtaning bir hil koordinatalari [hx hy hz h] ($h \neq 0$) bo'lishi mumkin.

3.2. QAYTA TUZISHLAR VA AKS TASVIRLAR HAQIDA UMUMIY TUSHUNCHALAR. AFFIN QAYTA TUZISHLAR.

Agar har bir $x \in [M]$ elementi $y \in [M^1]$ elementi bilan bog'langan bo'lsa, u holda M to'plamni M^1 to'plamga xaritasi berilgan deymiz. y elementi x elementining tasviri, x element esa y elementning ustunligi. To‘plamni o‘ziga xaritalashga to‘plamli qayta tuzish deyiladi.

M to'plamni M^1 to'plamga birma-bir xaritasi deyiladi, agar:

1) har bir $x \in [M]$ elementga, shuningdek, bitta $y \in [M^1]$ rasmga ega.

2) har bir $y \in [M^1]$ elementiga faqat bitta $x \in [M]$ *x прообраз мавжуд.*

To'plamning o’zaro bir qiymatli moslik o'zgarishi - bu to'plamni o'ziga o’zgarishidir.

M to'plamining birlamchi E qayta o’zgarishi deb, uning har bir elementi $x \in [M]$ o’sha elementiga qayta mos kelishidir.

Agar A - bu M to'plamning o’zaro bir qiymatli mosligi bo’lsa, unda A^{-1} bilan belgilangan teskari qayta tuzish mavjud.

A va B ikkita qayta tuzish bo'lsin, va y element - bu B o'zgarishi ostidagi x elementning tasviri, z elementiga - A o'zgarishi ostida y elementning tasviri. Keyin A va B ko’paytirishning natijasi AB bilan belgilanadi, bu z elementi x elementiga mos keladigan qayta tuzishdir. Ikkita o’zaro bir qiymatli moslik o’zgarishlar ko’paytirishi xam o’zaro bir qiymatli moslikdir.

Qayta tuzishlar quyidagi xossalarga ega: $A (BC) = (AB) C$. Ammo umuman aytganda: $AB \neq BA$, lekin $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Geometrik shaklga kelsak, uning tavsiflovchi qayta tuzishlar uchun parametrlar tushunchasini kiritish mumkin.

Tasvirning shakli va holatiga qarab, ularni aniqlaydigan kattaliklar qayta tuzish parametrlari deyiladi. Ularning soni qayta tuzish o'lchamini aniqlaydi.

Analitik o'zgarishlarni quyidagicha ko'rsatish mumkin. Agar M va M_1 nuqtalarining to'plamlari P tekisligida joylashgan bo'lib, bir-biri bilan jipslashilsa Oxy affin dekart koordinatalar tizimiga mos qilinsin, u holda tenglamalar

$$\bar{x} = \varphi(x, y, \alpha_1, \dots \dots, \alpha_n);$$
$$\bar{y} = \psi(x, y, \beta_1, \dots \dots, \beta_n)$$

[x y] koordinatalarini va $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta 1, \dots$, β_n parametrlarining o'ziga xos son qiymatini hisobga olgan holda, $\bar{x}, \bar{y}$. tasvirning koordinatalarini aniqlash mumkin. Bu yerda $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta 1, \dots$, β_n sonlar o'zgarishning o'lchamini aniqlaydi.

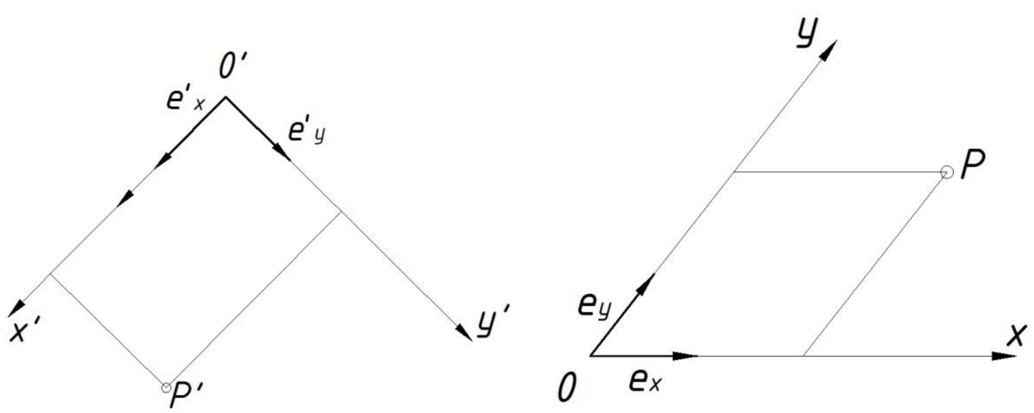
Masalan, gomotetiya o'zgarishini quyidagicha yozish mumkin: $\bar{x} = kx$; $\bar{y} = ky$, bu yerda k - o'xshashlik koeffitsienti, ya'ni, gomotetiya markazi koordinatalar boshida joylashgan bo'lib va berilgan figuraga o'xshash ∞^1 to'plam mavjud. Umumiy holda, markazning o'rnini belgilaydigan yana ikkita parameter qo'shiladi.

O'zgarishlarni berish umumiy usuli – bir biriga mos keladigan nuqtalarni aniqlash. Tekis figuralarni o'zaro bir qiymatli moslik birma-bir o'zgartirishda ikki parametrni ko'rsatishga tengdir.

Darhaqiqat, ∞^4 tekisligida faqat quyidagi parametrlar mavjud (parametrlar x_i, y_i, x_j, y_j), shundan ∞^2 nuqtalar o'zaro bir qiymatli moslikka ega. Ushbu to'plamlarning quvvatlarini ayirsak, kerakli natijani olamiz. Xuddi shunday, fazoni o'zaro bir qiymatli moslik uchta parametrni ko'rsatishga teng ekanligini ko'rsatish mumkin.

Matematikada va ko'plab amaliy fanlarda, xususan, kompyuter grafikasida affinaviy qayta tuzishlar ko'p xollarda quyidagicha berilishi mumkin.

Tekislikda (fazoda) qaysi bir affin koordinata tizimi Oxy ($Oxyz$) va boshqa bir yangi tizim $O'x'y'$ ($O'x'y'z'$) berilgan bo'lsin. Bunda tekislikning (fazoning) birinchi koordinatalar tizimida P nuqtasiga yangi koordinatalar tizimidagi P' nuqta mos kelib asl koordinatalarga ega bo'lsa, affin qayta tuzish deyiladi.



41-rasm.

(41-rasm, b)da P' nuqta *Oxy* va *O'x'y'* koordinatali tizimlar tomonidan berilgan affin qayta tuzishning (41-rasm, a-rasm) *P* nuqtaning tasviri.

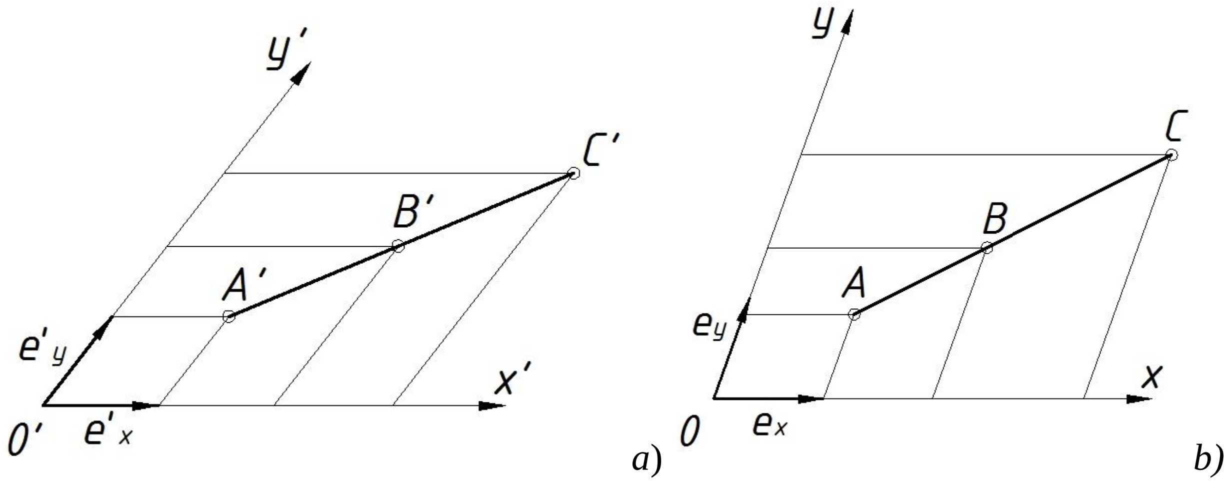
3.2.1. AFFINAVIY QAYTA TUZISHLARNING ASOSIY XUSUSIYATLARI

1. Dastlabki koordinatalar tizimidagi ba’zi tenglamalarni qondiradigan nuqtalar to’plami yangi tizimdagi koordinatalari bir xil tenglamani qondiradigan nuqtalar to’plamiga aylantiriladi. Xususan, to'g'ri chiziq tekis chiziqqa, tekislik tekislikka aylantiriladi. Buning natijasi, berilgan va o'zgartirilgan figuralarning o'zaro bog'liqligini va parallelligini saqlab qolishdir.

2. Agar uchta A, B va C nuqta to'g'ridan-to'g'ri teskari tasvirga tegishli bo'lsa (42-rasm, a), va A′, B′ va C′ to'g'ridan-to'g'ri rasmga tegishli bo'lsa (42-rasm, b), bu affin ta'rifidan kelib chiqadigan kesmalarning nisbati o'zgarmaydi.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} = \lambda$$

Ushbu nisbat ko'pincha (ABC) - (A′B′C′) deb yoziladi va oddiy uch nuqtali nisbat deyiladi. Buning natijasi affinaviy qayta tuzish paytida geometrik figuralarning maydonlari va hajmlari nisbatini saqlab qolishdir.

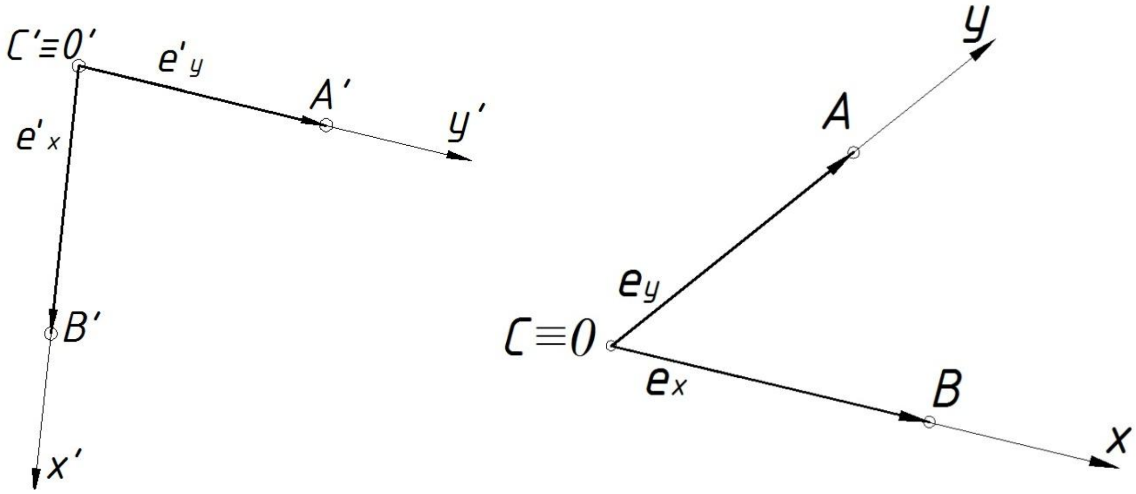


a) *b*)

42-rasm.

3. Bitta to'g'ri chiziqqa (tekislikka) tegishli bo'lmagan dastlabki uch (to'rt) nuqtani yangi uchta (to'rt) nuqtaga aylantiradigan tekislikning (fazoning) yagona o'zgarishi mavjud, u ham bitta to'g'ri chiziqqa (tekislikka) tegishli emas.

4. 3-rasmda berilgan *A*, *B* va *C* (43-rasm, a) va yangi *A′, B′* va *C′* (43, b-rasm) nuqtalarning uchovlari affin koordinatali tizimlarini aniqlaydi. Tekislikning affinaviy qayta tuzishni *Oxy* va *O'x'y'* o'ziga xos tarzda aniqlaydi.

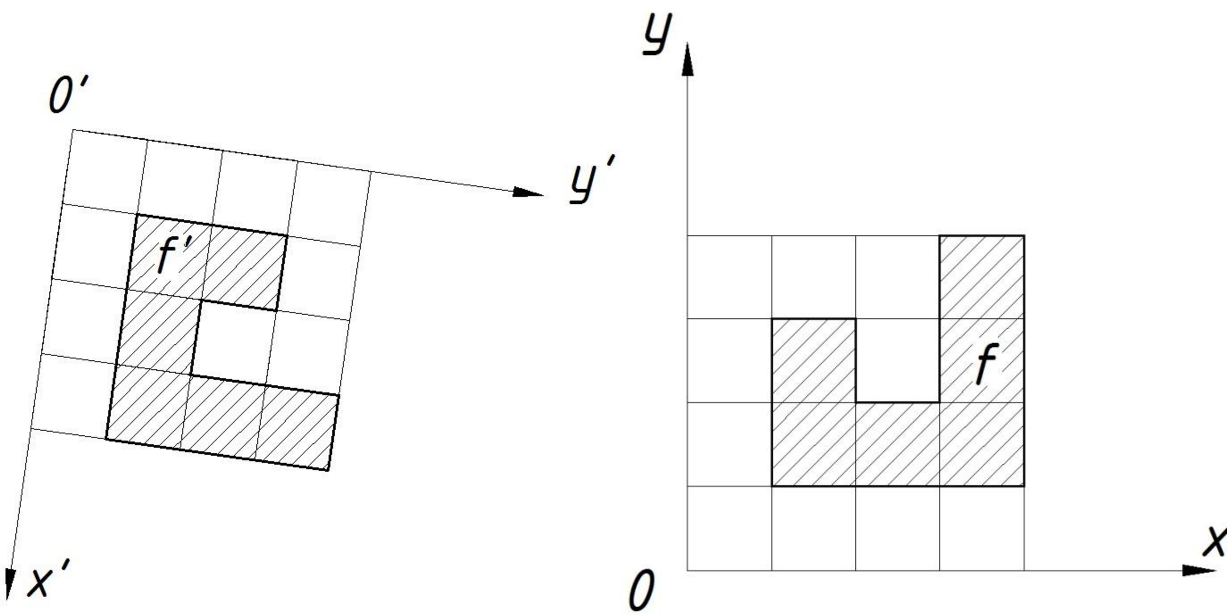


43-rasm.

Uch juft nuqta tekislikning affinaviy o'zgarishini aniqlagani uchun va har bir juftlik ikkita parametrni ko'rsatishga teng, bunday o'zgarish oltita parametrga bog'liq. Shunga ko'ra, fazoning affinaviy o'zgarishi o'n ikki parametrga bog'liq, chunki u to'rt juft nuqta bilan belgilanadi va har bir juftni E_3 da ko'rsatish uchta parametrni ko'rsatishga tengdir.

4. Agar berilgan va yangi koordinata tizimlari to'g’ri burchakli dekart tizimlari bo’lsa, o'qlari bir xil birlik masshtablariga ega bo'lsa, u holda geometrik figuralarning barcha metrik xususiyatlari qayta tuzish jarayonida saqlanib qoladi. Ushbu o'zgarish harakat deb ataladi.

44-rasmda, *Oxy* (44-rasm, a) va *O'x'y'* (44-rasm, b) to'g’ri burchakli dekart koordinatalar tizimlar tomonidan berilgan affinaning qayta tuzish *f* figuraning shaklini o'zgartirmasligini, faqat uning tekislikdagi o'rnini o’zgarishini ko'rsatadi.



44-rasm.

Xos affinaviy qayta tuzish - bu uni belgilaydigan koordinatali tizimlar bir xil nomdagi (ikkalasi xam o'ng yoki ikkalasi xam chap) o'zgarishdir. Agar ushbu shart bajarilmasa, affinaviy qayta tuzish xosmas deb nomlanadi.

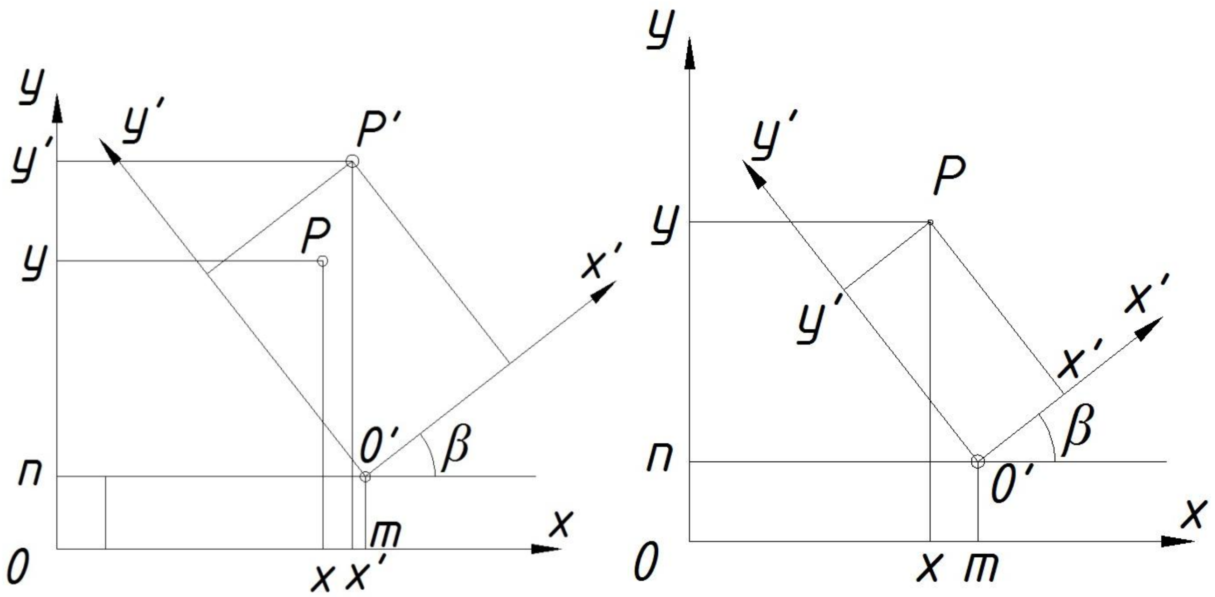
3.2.2. TEKISLIKNING AFFINAVIY QAYTA TUZISHI.

Analitik geometriya kursidan ma'lumki, agar ikkita dekart yoki affin koordinata tizimlari berilgan bo'lsa, u holda *Oxy* tizimidagi *O′x′y′* koordinatalar tizimida koordinatalari [*x* *y*] bo'lgan *P* nuqta formulalar bo'yicha [*x′* *y′*] koordinatalar bilan aniqlanadi.

$$\begin{matrix} x' = ax + by + m; \\ y' = cx + dy + n, \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

bu yerda *a, b, c, d* - e_x va e_y vektorlari bo'yicha e'_x va e'_y vektorlarning kengayish koeffitsientlari; *m, n*- yangi koordinatalar *O′* dastlabki koordinatalar tizimiga nisbatan.

Xuddi shu formulalar affinaviy qayta tuzishni belgilaydi. Ammo bu holda [*x* *y*] *Oxy* tizimidagi *P* nuqtaning koordinatalari, [*x′* *y′*] esa xuddi shu *Oxy* koordinatalar tizimidagi *P′* nuqtaning koordinatalari. 45-rasmda (1) formulalarni talqin qilishdagi farqi ko’rsatilgan. 45.a rasmda koordinata tizimini qayta tuzishi ko’rsatilgan, 45.b rasmda - tekislikni affinaviy qayta tuzishi ko’rsatilgan.



45-rasm.

45-rasmda ko’rsatilgan ikkala koordinatali tizimda birlik masshtablari teng to'g’ri burchakli dekart tizimi bo’lib, bu holda (1) formulalar quyidagicha bo’ladi.

$$\begin{matrix} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + m; \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + n \end{matrix} \qquad (2)$$

(2) formulalar bir dekart *Oxy* tizimidan *O'x'y'* ikkinchisiga o'tishni va shu bilan birga xos harakatni belgilaydi. Noxos harakat uchun ular quyidagi shaklga ega.

$$x' = xcos + ysin\theta + m;$$
$$y' = xsin\theta - ycos\theta + n \qquad (3)$$

Agar $m \neq 0$ va $n \neq 0$ bo'lsa, u holda (1) ni matritsa yozuvida ko'rsatish uchun asl va o'zgartirilgan nuqtalarni bir hil koordinatalarda [*x y 1*], [*x' y' 1'*] da ko'rsatish kerak. Matritsa yozuvlari quyidagi shaklga ega.

$$[x'y'1'] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [ax + by + m \quad cx + dy + n \quad 1] \qquad (4)$$

Bular (1) formula bilan mos keladi.

$$T = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

matritsa har qanday nuqtalar to'plamini o'zgartira oladigan geometrik operator sifatida talqin etiladi. 3-xususiyatga ko'ra, tekislikning affinaviy qayta tuzishi uch juft nuqta bilan aniqlanadi, ya'ni quyidagicha yozilishi mumkin

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} T$$

Kvadratlarni o'chirish

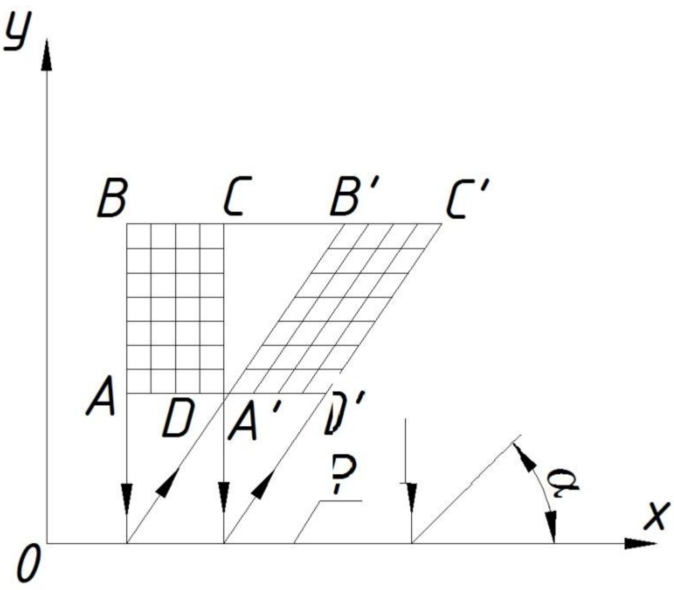
yoki ramziy tarzda

$$B=AT,$$

bu yerda *B, A* - mos ravishda o'zgartirilgan va o'zgartiriluvchi nuqtalarning matritsasi.

Uchala matritsa ham kvadrat (3x3) bo'lganligi sababli, qayta tuzish $T = A^{-1} B$ operatori berilgan uchta juft nuqta koordinatasidan aniqlanishi mumkin, bu erda A^{-1} *A* matritsaga teskari matritsa.

Kompyuter grafikalarida affinaviy qayta tuzishlarning eng keng tarqalgan maxsus holatlari 1-jadvalda keltirilgan. Ular oddiy (koordinatalar boshi atrofida aylanish) va murakkab (ixtiyoriy markaz atrofida aylanish) ga bo'linadi. Ikkinchisida, matritsa operatorini yozish uchun qayta tuzish shartli ravishda uchta qayta tuzish natijasi bilan ifodalanadi, ularning birinchisi qayta tuzish apparati bilan birga koordinata tizimiga nisbatan ma'lum bir joyga ko'chirish apparatini olib keladi, ikkinchisi ko'rsatilgan ko'chirishni amalga oshiradi, uchinchisi esa figurani dastlabki holatiga qaytaradi.



46-rasm.

46, 47-rasmlarda ko’chish deb nomlangan qayta tuzish sxemalari ko'rsatilgan. Ushbu qayta tuzish shakllarning maydonlarini saqlaydi.

Ko’chish - bu uchta parametrli qayta tuzish, chunki uni ko’chish o'qi (ikkita parametr) va α burchagi (bitta parametr) bilan belgilash mumkin. Agar ko’chish o'qni masalan, O_x o'qi bilan jipslashsa, u holda ko’chish faqat bitta parametrga - α burchagiga bog'liq bo'ladi (46-rasm). Nuqta koordinata o’qlaridan biri bo’ylab siljiganida, figuraning har bir nuqtasi shu o’q bo’ylab boshqa koordinataning qiymatiga mutanosib miqdorda siljiydi.

Ox o'qi bo'ylab qayta tuzish quyidagicha bo’ladi.

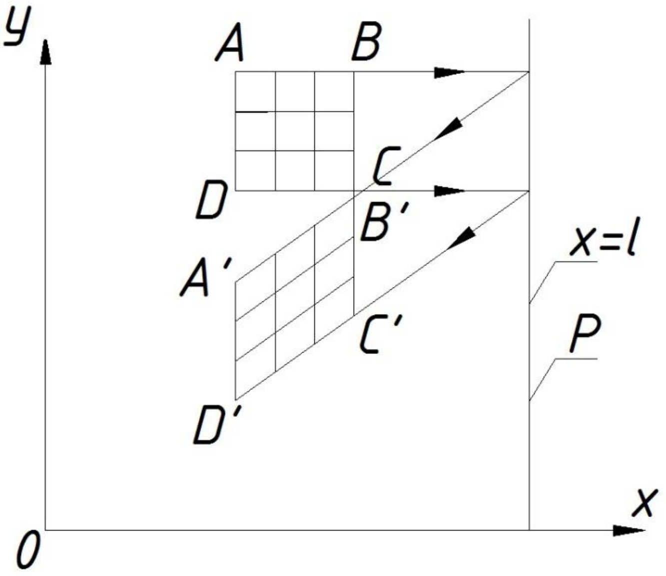
$$[x'y'1'] = [x\,y\,1]\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = [\mathrm{x+ky\ \ y\ \ 1}]$$

Bu yerda

$$k=ctg\alpha\neq 0$$

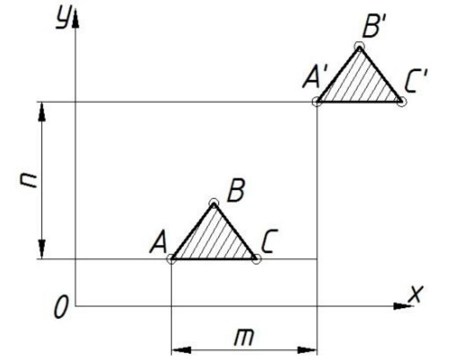
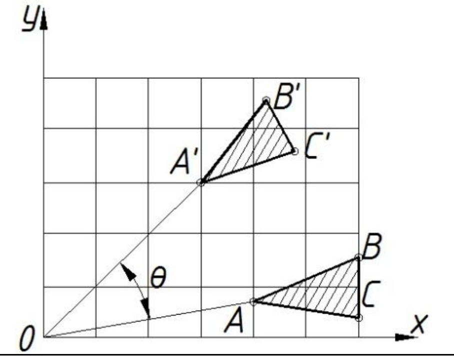
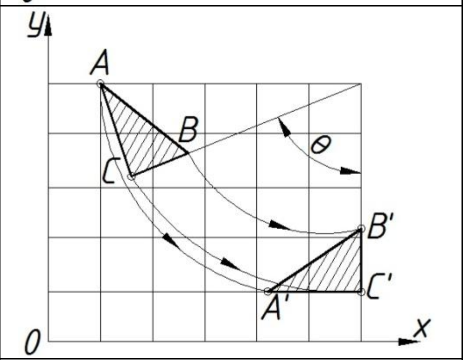
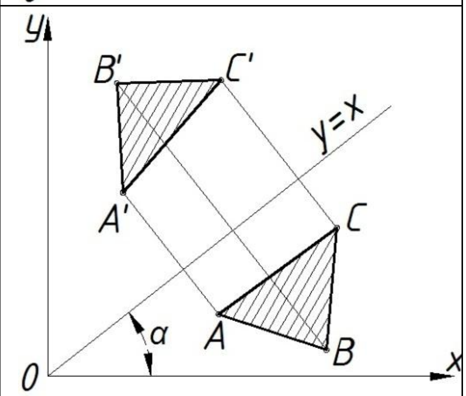
47-rasmda O_y o'qiga parallel bo’lgan l to’g’ri chiziqni ko’chish qayta tuzish sxemasi ko’rstilgan. Uni amalga oshirish uchun ushbu to'g'ri chiziqni O_y o'qi bilan birlashtirish, qayta tuzishni bajarib va natijani dastlabki holatiga qaytarish kerak.

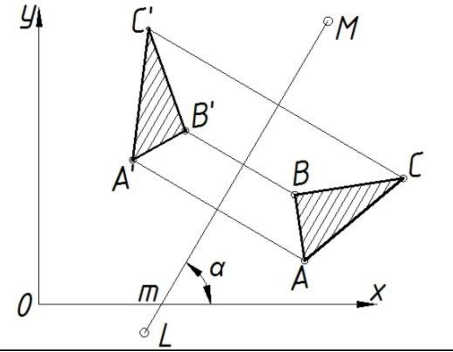
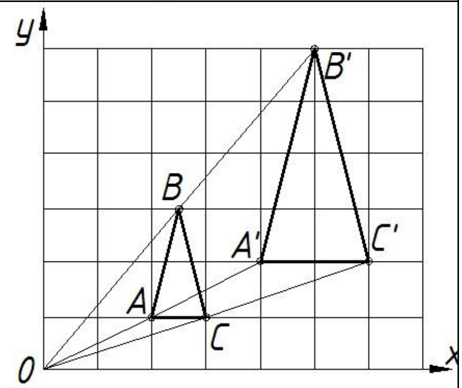
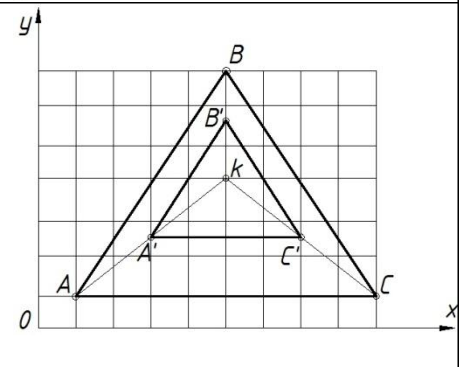
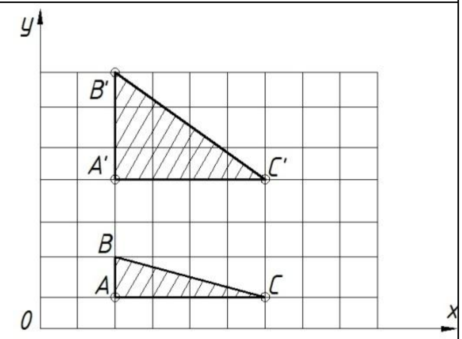
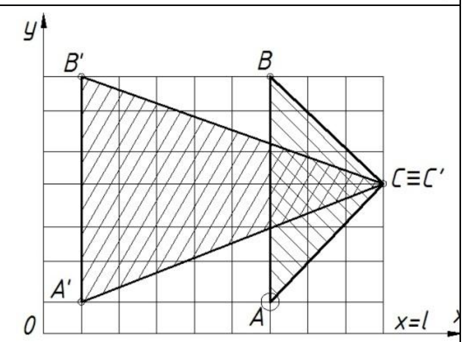
$$[x'y'1'] = [x\,y\,1]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-l&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l&0&1\end{bmatrix}$$



47-rasm.

1-JADVAL

<table>
<tr><th>Qayta tuzish</th><th>Parametrlar soni</th><th>Matritsali oparetor</th><th>Namoyish</th></tr>
<tr><td>Bir xillik</td><td>0</td><td>$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>Параноc</td><td>2</td><td>$$T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\m&n&1\end{bmatrix}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Boshlanish atrofida soat miliga teskari θ burchak ostida burilish</td><td>1</td><td>$$T_V=\begin{bmatrix}cos\theta&sin\theta&0\\-sin\theta&cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ (2) dan m=n=0</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ixtiyoriy markaz atrofida aylanish</td><td>3</td><td>$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-m&-n&1\end{bmatrix},$$ $$T_V=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\m&n&1\end{bmatrix}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>α o'qi boshi va Ox o'qi bilan tarkibiy qismidan o'tuvchi o'qi bo'yicha simmetriya</td><td>1</td><td>$$T_S=\begin{bmatrix}cos\theta&sin\theta&0\\sin\theta&-cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ (3) dan θ=2α da m=n=0</td><td>
</td></tr>
</table>

Boshidan o'tmagan o'qga nisbatan simmetriya	2	$T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\m&0&1\end{bmatrix}$ $T_S=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\m&0&1\end{bmatrix}$	
Kordinata boshiga nisbatan	2 da $k_x \neq k_y$ 1 da $k_x=k_y=k$	$T_M=\begin{bmatrix}k_x&0&0\\0&k_y&0\\m&0&1\end{bmatrix}$ k>1- cho'zish k<1- siqilish	
ixtiyoriy nuqtaga nisbatan	4 da $k_x \neq k_y$ 3 da $k_x=k_y=k$	$T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-m&-n&1\end{bmatrix}$ $T_M=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\m&n&1\end{bmatrix}$	
O’qga nisbatan (misol uchun *Ox*)	1	$T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	
To'g'ri o'qga nisbatan (misol uchun *Oy*)	2	$T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-l&0&1\end{bmatrix}x$ $x\begin{bmatrix}k_x&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x$ $x\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l&0&1\end{bmatrix}$	

3.2.3. FAZONING AFFINAVIY QAYTA TUZISHLARI.

Fazoning affinaviy qayta tuzishlarining analitik ifodasi tekislikning affinaviy qayta tuzishlarining analitik ifodasiga o'xshaydi. Agar bir hil koordinatalardagi dastlabki nuqta [*x y z 1*] vektor bilan belgilansa, xuddi shu koordinatalar tizimidagi o'zgartirilgan [*x′ y′ z′ 1*] nuqtani ko'rsatadigan quyidagi amallar natijasida aniqlanadi.

$$[x'y'z'] = [x\ y\ z\ 1]\begin{bmatrix} a & c & p & 0 \\ b & d & q & 0 \\ h & f & r & 0 \\ m & n & l & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [ax + by + hz + m \quad cx + dy + fz + n \quad px + qy + rz + l \quad 1] \qquad (5)$$

Agar dastlabki va yangi koordinata tizimlari bir xil birlik masshtablariga ega to'g’ri burchakli dekart tizimi bo'lsa, u holda (5) formula aylanish va ko’chishni belgilaydi.

. Birlik (Еденичная) matritsasi

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nuqtani (shakl) harakatsiz qoldiradi. Matritsa

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & n & l & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

nuqtani *x* koordinatasidagi *m* birlik bilan *y* koordinatadagi *n* birlikka va *z* koordinatadagi *l* birlikka aylantiradi.

Koordinata o'qlari atrofida aylanish T_v matritsasiga o'xshash matritsalar bilan tavsiflanadi (1-jadvalga qarang), chunki aylanma o'qning bir xil nomidagi uchinchi koordinatasi o'zgarishsiz qoladi (48-rasmda nuqta O_z o'qi atrofida aylanadi).

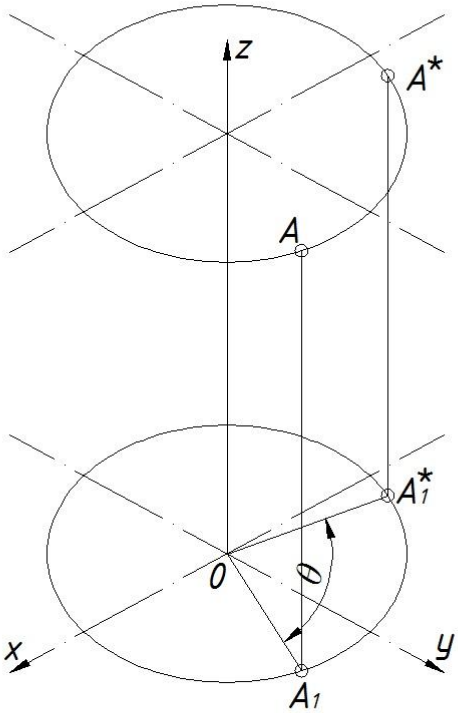
Aylanish matritsalari:

O_z o'qi atrofida θ burchak bilan.

$$T_z = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

$$T_y = \begin{bmatrix} cos\emptyset & 0 & sin\emptyset & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin\emptyset & 0 & -cos\emptyset & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$T_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\psi & sin\psi & 0 \\ 0 & -sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$



48-rasm.

MASHQ QILISH

1. Joyni birma-bir o'zgartirishda, mos keladigan juftligini ko'rsatish uchta parametrni ko'rsatishga teng ekanligini ko'rsating.

2. Matritsada murakkab affin qayta tuzishni yozing, unda uchlari [*0 0*], [*1 0*], [*0 1*] bo'lgan uchburchaklari uchlari [*0 0*], [*1 2*], [*0 2*].

3. Fazoning affinaviy qayta tuzishni nechta parametr aniqlaydi, shu bilan siz ob'ektni ixtiyoriy nuqtaga ko'chirishingiz, uni *Oz* o'qi atrofida aylantirishingiz va *Oxy* tekisligi bo'yicha masshtab qilishingiz mumkin?

4. [*1 0*] nuqtadan o'tuvchi va *Ox* o'qiga 45^0 burchak ostida joylashgan to'g'ri chiziqqa nisbatan *k=2* koeffitsienti bilan siljishni amalga oshiradigan affinaviy qayta tuzish matritsani yozing.

4. KOMPYUTER GRAFIKASIDA TASVIRNING TUZILISHI

4.1. KOMPYUTER GRAFIKASIDA KOORDINATALI TIZIMLAR VA AFFIN QAYTA TUZISHDAN FOYDALANISH

Kompyuter grafikasida maxsus adabiyotlarda grafik ma'lumotlarni qayta ishlash bosqichida turli xil koordinatali tizimlardan foydalaniladi - mahalliy, global, jahon, instrumental va boshqalar.

Ob'ekt mahalliy koordinatalar tizimida modellashtirilgan; global miqyosda ular ob'ektlarning nisbiy holatini tavsiflaydi; tasvirni tasvirlash uchun dunyo tizimi ishlatiladi; asboblar ustuni tasvirni displey ekranida aks ettirish uchun ishlatiladi.

Mahalliy va global koordinata tizimlari ikki va uch o'lchovli bo'lishi mumkin, dunyo tizimi - ikki yoki uch o'lchovli, albatta to’g’ri burchakli dekart, instrumental tizimi - ikki o'lchovli to’g’ri burchakli dekart tizimidir.

Normallashtirilgan koordinatalar bu - shunday koordinatalarki, ularning qiymatlari ba'zi normallashuvchi koeffitsient *h* ga bo'lish orqali olinadi. Masalan, tomoni *a* ga teng bo’lgan kub dekart tizimida berilgan bo’lsa, uni a' tomoniga teng tomon bo’lgan kubga aylantirish kerak bo’lsa, u holda

$$h = \frac{a}{a'};\quad x' = \frac{x}{h} = \frac{xa'}{a}$$

Agar kub tomoni 1 ga teng bo’lsa, u holda $h=a$; $x' = \frac{x}{a}$ ikkala holatda ham ekran maydoni normallashgan deb nomlanadi.

Dunyo koordinata tizimida berilgan tasvir grafik qurilmalarga chiqarish uchun maydoni oyna, oyna ko'rsatiladigan maydon displey maydoni yoki indekatsiya maydoni deb nomlanadi.

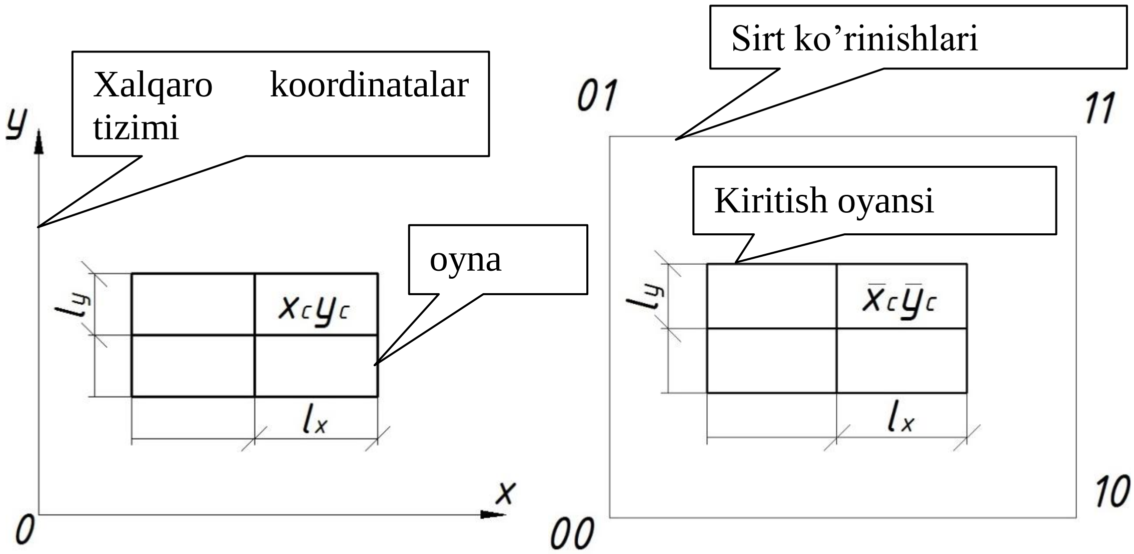
Asbob koordinatalari tizimidagi indekatsiya maydonining maksimal qiymati birlik kvadrat bo'lib, uning pastki chap burchagi koordinata tizimi boshi bilan jipslashadi.

Oyna va indeksatsiya maydoni to'rtburchaklar shaklida bo’lgani uchun tasvir tuzishning amalga oshirgan formulalar oddiy shaklga ega.

$$\bar{x} = \frac{x - x_c}{l_x} L_x + \overline{x_c};\ \bar{y} = \frac{y - y_c}{l_y} L_y + \overline{y_c},$$

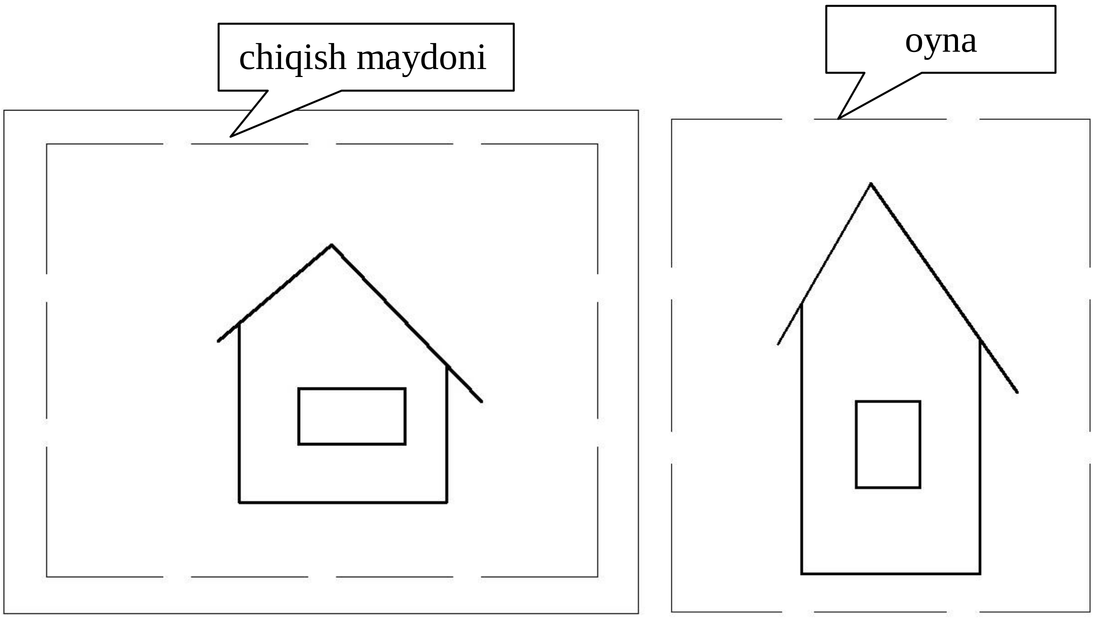
bu erda $[\bar{x}\ \bar{y}]$ normallashtirilgan koordinatalarning vektori; $[x_c\ y_c]$, $[\overline{x_c}\ \overline{y_c}]$- mos ravishda dunyo markazi (49-rasm, a) va asbob (49.6-rasm) koordinata tizimlarining oyna markazi va chiqish maydonining koordinatalari; l_x, l_y, L_x, L_y - mos ravishda oyna va indeksatsiya maydonlarining hajmini belgilaydigan qiymatlar. Shubhasiz, oyna ko'rsatilganda *x* va *y* koordinatalari boshqacha masshtabga ega bo'lishi mumkin:

$$h_x = \frac{l_x}{L_x}, \qquad h_y = \frac{l_y}{L_y}$$

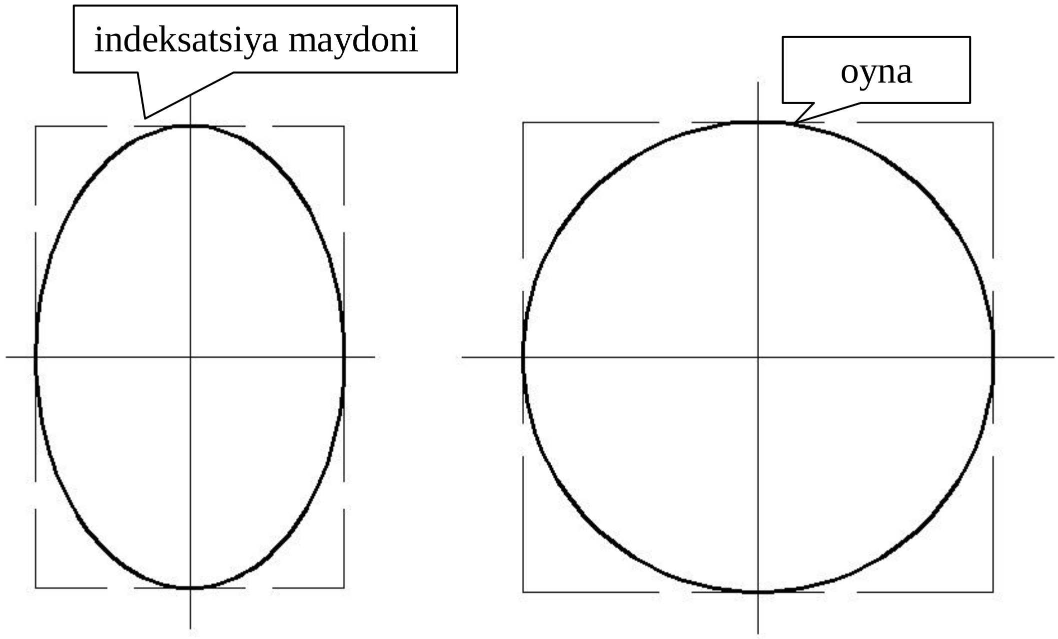


49-rasm.

Ko'rsatishda oyna (50a va 51.a-rasmlar) va yaratilgan tasvir bir vaqtning o'zida chiqish maydoniga aylantiriladi (50b va 51.b-rasmlar)



50-rasm.



51-rasm.

5. EGRI CHIZIQLAR

Egri chiziqlar analitik, konstruktiv yoki grafik jihatdan aniqlanishi mumkin. Egri chiziqning analitik berilishi – bu koordinatalari bitta o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lgan fazodagi nuqtalar to'plamining tenglamasidir. Agar funktsiya algebraik bo'lsa, egri chiziq algebraik, agar transandantal bo'lsa, transandantal deyiladi.

Agar funktsiya $\varphi(x, y) = 0$ quyidagi shakldа berilsa, algebraik deb ataladi.

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n+1} + \cdots + a_n(x) = 0 \qquad (14)$$

bu yerda $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ x-dagi polinomlar.
(14) dan farqli shaklga ega funktsiyalar transandantal deb nomlanadi.Konstuktiv usul belgilangan algoritmlardan biriga ko'ra egri chiziqning nuqtalarini aniqlashni o'z ichiga oladi. Grafik deganda qabul qilingan koordinatali tizimlardan birida egri chiziqning proektsion tasvirini aniqlashdir.

5.1. EGRI CHIZIQLARNING XUSUSIYATLARI

Egri chiziqning har bir nuqtasida shakli uning differentsial xususiyatlari bilan belgilanadi. Bulardan eng zarurlarini o’rganib chiqamiz. Yassi egri chiziqlar uchun odatda quyidagi xususiyatlardan foydalaniladi:

1. - egri chiziqning har bir nuqtasini koordinatalari berilib, φ funktsiyasi qiymatlari aniqlanadi;

2. - bu yerda φ'_M funktsiyaning M nuqtadagi birinchi hosilasi, φ nuqtadagi qiymati, ya'ni M nuqtada urinma beriladi;

3. – bu yerda M nuqtada φ''_M egrilik radiusini aniqlaydigan φ funksiyaning ikkinchi M hosilasi qiymati beriladi. M nuqtadagi egrilik radiusi R_M M nuqtadan

o'tuvchi va unga cheksiz yaqin bo'lgan ikkita nuqtaga tegishli aylananing radiusidir.

Tekis egri chiziqning yuqorida aytilgan xususiyatlari ma'lum geometrik shartlarga mos keladi: nuqtani chiziqqa tegishliligi, egri chiziqlarni o’zaro urinishiga, berilgan nuqtadagi egri chiziqlarning urinishiga. Bunday holda, nuqta chiziqqa tegishli bo'lishi sharti bitta parametrga teng $P^{np} = 1$

Urinish sharti ham bitta parametrga teng, chunki tekislikda faqat ∞^2 to’g’ri chiziqlar mavjud,egri chiziqqa urinmalar esa $-\infty^1$, demak kelib chiqadi $P^K = 2\text{-}1 = 1$ teng.

Berilgan nuqtadagi P^{KT} urinmalar ikkita parametrga teng, chunki barcha to’g’ri chiziqlar = ∞^2, nuqtadagi urinmalar esa = ∞^0 (cheklangan son).

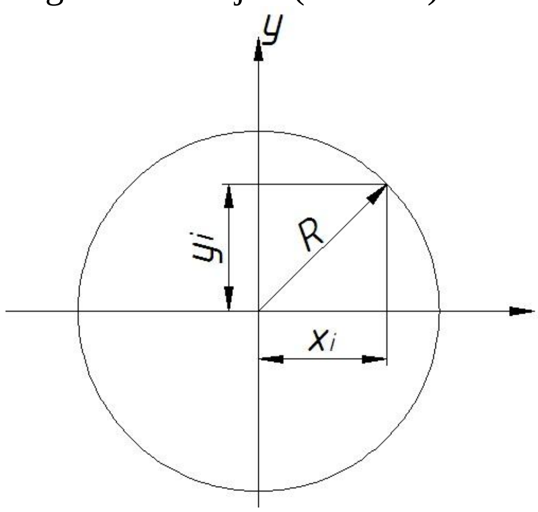
5.2. EGRI CHIZIQLARNI ANALITIK IFODASI

Egri chiziq tenglamasi $y=\varphi(x)$ aniq, noaniq $\varphi(x, y)=0$ va parametrik $x=x(t)$, $y=y(t)$ shakllarda aniqlanishi mumkin.

Egri chiziqning parametrik berilishi holatida t_i parametri egri chiziqning bitta Ai nuqtasini belgilaydi, bu esa egri chiziqning bir parametrli to'plami sifatida belgilaydi. Ob'ektlarini matematik modellashtirishda noaniqlikni istisno qiladigan egri chiziqlarni parametrli shaklda belgilash afzaldir. Bunday holda, egri chiziqni belgilashning mavjud shaklidan parametrli shaklga aylantirish kerak bo’ladi.

Agar egri chiziq $\varphi(x, y)=0$ orqali berilgan bo’lsa, x ni ba'zi bir t parametri orqali ifodalaymiz, $x=x(t)$ ni olamiz, keyin $\varphi(x(t), y)= \varphi(t, y)=0$ aylanadi. Ushbu tenglamani y orqali yechamiz, u holda biz $y=y(t)$ olamiz.

Masalan, aylana tenglamasi mavjud (59-rasm)



59-rasm.

$$x^2+y^2=R^2 \quad (15)$$

Bu yerda $x=R \cos t$ yoki $y=R \sin t$ bo'lsin, ushbu ifodani (15) ga joylashtirib

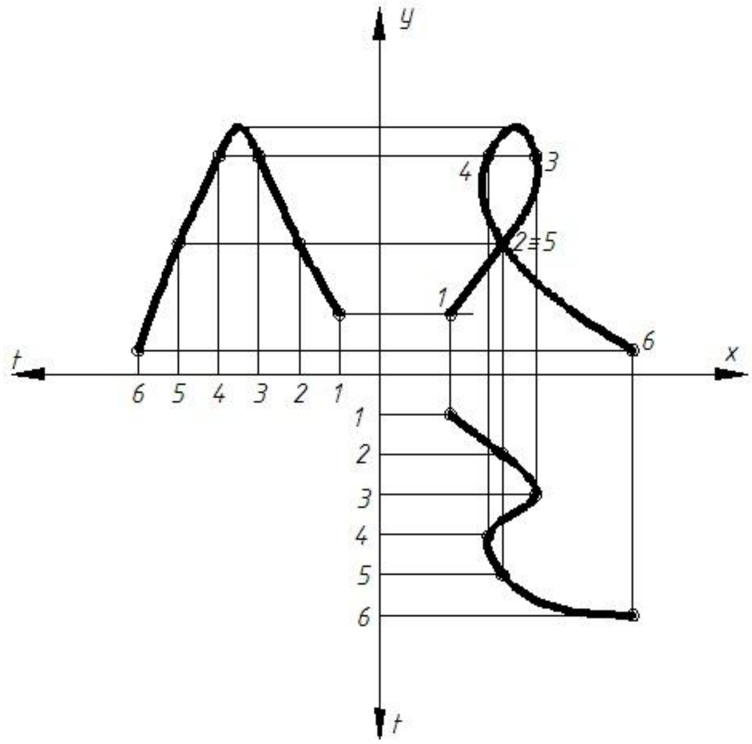
$R^2\cos^2 t+y^2-R^2=0$ hosil qilamiz.

Aylananing parametrli tenglamasi.

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases} \quad (16)$$

Har qanday egri chiziq tenglamasini parametrli shaklga aylantirish doimiy imkoniyatlarga ega emas, chunki ko'pgina egri chiziqlarni maxsus nuqtalari mavjud, jumladan, qaytish, sinish va hokazo nuqlatar. Bu hollarda $x \to t$ va $y \to t$ birma-bir xaritalash usuli qo'llaniladi, bu avval ba'zi mavhum funktsiyalar bilan ifodalanadi, so'ngra ular uchun analitik ifodalar yoki hisoblash algoritmi tanlanadi.

Bir misolni ko'rib chiqamiz. (60-rasm) da egri chiziq berilgan.



60-rasm.

Uni tasvirini yaratish uchun ortogonal proektsiyalash usulidan foydalanamiz. Uch o'lchovli fazoda koordinatalari *Ox*, *Oy*, *Ot* o'qlari bilan joylashgan ma'lum egri chiziqni taqdim etib, ortogonal proyeksiya apparatlaridan foydalanamiz. Berilgan egri chiziqni kesmalarga ajratib va *1, 2, ..., 6* nuqtalar bilan kesmalarning chegaralarini belgilab, ular orqali *x* va *y* o'qlariga parallel ravishda to'g'ri chiziqlar chizib, olingan nuqtalar orqali *Ox* va *Oy* o'qlariga parallel ravishda to'g'ri chiziqlar tortiladi. Ushbu chiziqlarning egri chiziqning bo'linish nuqtalari orqali ilgari chizilgan chiziqlar bilan kesishish nuqtalari egri chiziqning bitta *t* qiymatida ikkita proektsiyalariga mos keladi. Ushbu egri chiziqlarni *t* parameteri orqali ifodalash endi ancha osonroq.

5.3. ALGEBRAIK EGRI CHIZIQLAR

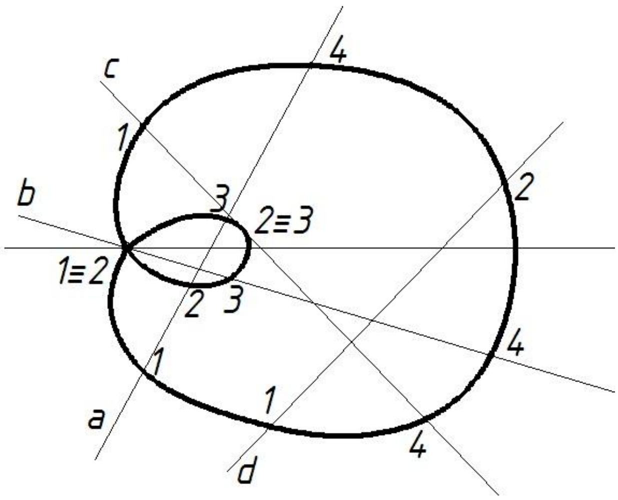
5.3.1. ASOSIY XUSUSIYATLAR

Algebraik egri chiziqning asosiy xarakteristikasi bu tartib - egri chiziqni belgilaydigan algebraik tenglamaning darajasi. Kvadrat tenglamalar ikkinchi tartibli egri chiziqni, yuqori darajadagi tenglamalar esa yuqori darajadagi egri chiziqlarni aniqlaydi.

Tartibni grafik jihatdan xam aniqlash mumkin: tekis egri chiziqni to’gri chiziq bilan kesishuv nuqtalar soni uni tartibini belgilaydi. Fazoviy egri chiziq uchun tekislik bilan kesishuv nuqtalar soni uni tartibini belgilaydi. Shuni yodda tutish kerakki, kesishuv nuqtalari haqiqiy va mavhum bo’lishi mumkin.

Masalan, 61-rasmda to'rtinchi tartibdagi *m* egri chizig'ini tasviri berilgan, bu yerda *a* chiziq to'rt xil haqiqiy nuqtada egri chiziqni kesib o’tmoqda. *b* va *c* chiziqlar - ikkita jipslashgan va ikkita turli nuqtalarda (1≡2 tugunli nuqta, 2≡3 urinish nuqtada) va *d* chiziq ikkita haqiqiy va ikkita mavhum nuqtada kesib o’tmoqda.

Egri chiziqning yana bir muhim xususiyati uning sinfidir. Grafik jihatdan uni sinfi egri chiziqda joylashmagan nuqtadan tortilgan urinmalar soni bilan aniqlanadi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar ham ikkinchi sinfli egri chiziqlardir. Yuqori darajadagi egri chiziqlar darajasi va sinflar har xil bo’lishi mumkin.



61-rasm.

Egri chiziqning determinanti bu egri chiziqni aniq ravishda belgilaydigan parametrlar to'plamidir. Bunday parametrlarning soni egri chiziqning parametrli raqami deb ataladi. *n*-darajadagi tekis algebraik egri chiziq tenglamasining koeffitsientlari soniga ko'ra $p = \frac{n(n+3)}{2}$ parametrik soniga ega, ulardan holat parametrlari uchta bo'ladi ($P_n = 3$)

5.3.2. IKKINCHI TARTIB EGRI CHIZIQLARI VA ULARNING TO'PLAMLARI

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar qurilishda, mashinasozlikda, konstruktsiya qismlari va qobiq qoplamalarini loyihalashda keng qo'llaniladi. Bu ularning yaxshi xususiyatlari bilan bog’liq. Ushbu egri chiziqlar konusning kesimlari deb ham ataladi, chunki ularni ikkinchi tartibli konusni tekislik bilan kesishganda hosil qilish mumkin.

Barcha konus kesimlari ikkinchi tartibli tenglama orqali aniqlash mumkin

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \qquad (17)$$

Egri chiziq shakli diskriminant qiymatiga bog'liq

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 \qquad (18)$$

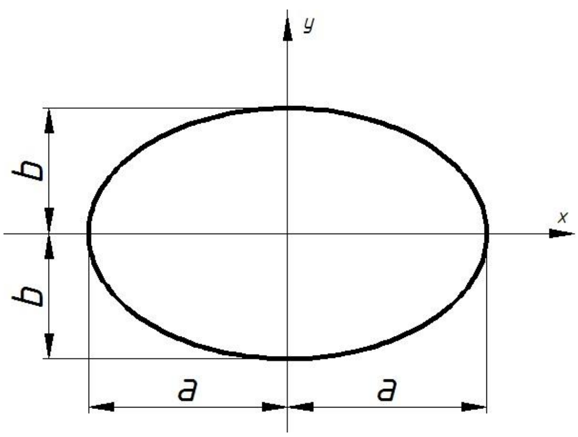
$\delta > 0$ uchun biz ellipsga egamiz, $\delta < 0$ uchun giperbola, $\delta = 0$ – uchun esa parabola.Egri chiziqlar o’qlari koordinatalar o’qlari bilan jipslashsa, biz har egri chiziqning kanonik tenglamasi hosil bo’ladi;

ellips uchun (62-rasm)

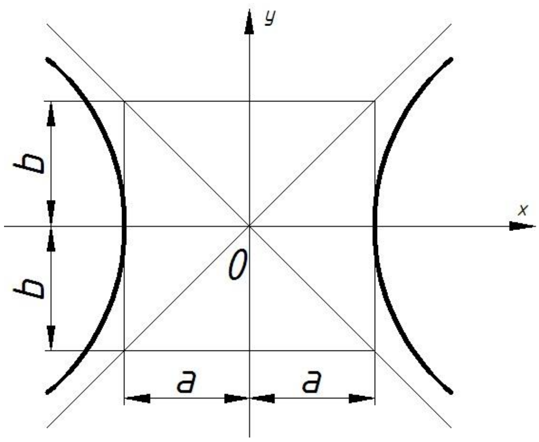
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (19)$$

bu erda *a*, *b* yarim eksa; giperbola uchun (63-rasm)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (20)$$



62-rasm.

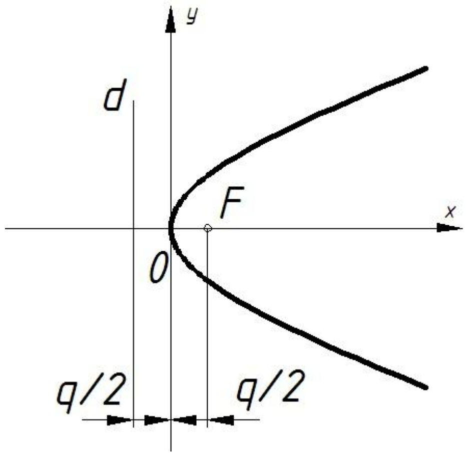


63-rasm

Parabola uchun (64-rasm)

$$y^2=2qx \qquad (21)$$

bu yerda *q* - *F* fokusdan *d* direktrisagacha masofa.



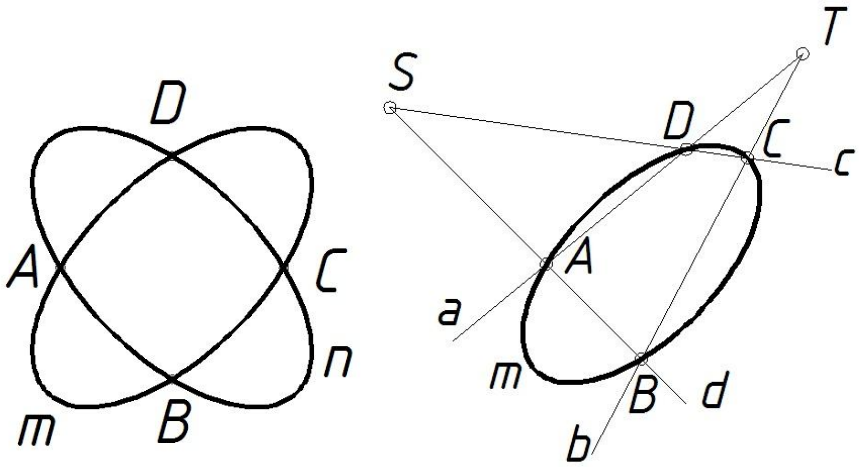
64-rasm.

Konus kesimlari uchun umumiy holatda egri chiziqning parametrli sonining formulasiga asoslanib olamiz.

$$P = \frac{2(2+3)}{2} = 5$$

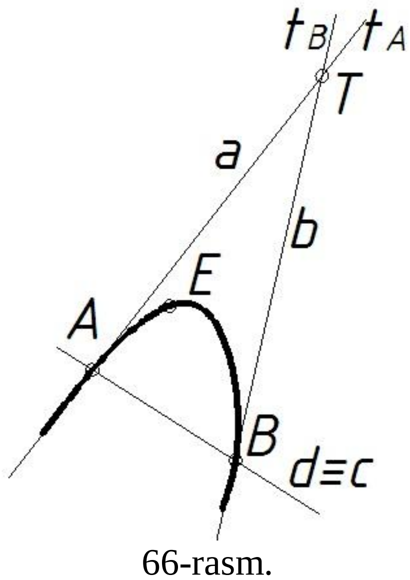
bu umumiy tenglamaning koeffitsientlari soniga to'g'ri keladi (17). Bunday holda, $P_h=3$ holat parametrlarining soni (masalan, ellips uchun markazning koordinatalari va bitta o'qning yo'nalishi), keyin shakl parametrlari soni $P_{sh}=5\text{-}3=2$ bo'ladi. Ellips va giperbola uchun bu parametrlar ularning tenglamalariga (19), (20) mos keladigan *a* va *b* koeffitsientlari. Parabola uchun faqat bitta shakl parametrini (21 formuladan ko'rish mumkin) bo'lgan q masofani ko'rsatish kifoya. Shuning uchun parabola uchun parametrik son $P=4$. Ellips va giperbolani tekislikda chizish uchun bu egri chiziqlarga mos kelgan va ikkita to’g’ri chiziqda yotmagan beshta nuqta orqali belgilash mumkin, yoki uchta nuqta va ularga tegishli ikkita urinma orqali va hokazo. Bu yerda quyidagi shartlar inobatga olinadi, ya’ni nuqtani chiziqqa tegishlik parametrlari ($P^{np}=1$), nuqtadan urinma o’tkazish parametr soni ($P^{u}=1$) va hokazo.

Parabola uchun uning ikkita nuqta va urinmalarini ko’rsatish kifoya. Agar ellipsning ikkita o'qini teng qilib qo'ysangiz, aylana hosil bo’ladi. O'qlarning uzunligi bir xil bo’lsa, ularning yo'nalishini belgilashga hojat yo'q. Shuning uchun doira uchta parametr bilan belgilanadi, masalan, bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta.



65-rasm.

Ikkinchi tartibli egri chizig'ini belgilaydigan beshta parametrdan biri berilmasa, bitta parametrli egri chiziqlar to'plami hosil bo'ladi. Ushbu to'plamining ikkita egri chizig'ining kesishgan to'rtta *A, B, C, D* nuqtalari (65-rasm, a), ikkita juft *a, b, c, d* (65.6-rasm) to'g'ri chiziqlari bilan belgilash mumkin, bular xam konusning kesimlari hisoblanadi (berilgan egri chiziqlar to'plamiga mos kelgan holda). Agar *c* va *d* chiziqlar bir-biriga jipslashsa, unda *AT* va *BT* vatarlari mos ravishda *A* va *B* nuqtalarda egri chiziqqa tegib turadi (66-rasm). Bunday holda egri chiziqlar to'plami ikkita *A, B* nuqta va ikkita urinma t_A va t_B bilan belgilanadi. *A* va *B* nuqtalaridagi barcha egri chiziqlar ushbu urinmalarga tegishli, *d≡c* to'g'ri chiziq xam konusning kesimi deb hisoblanadi. Agar *A* va *B* nuqtalaridan tashqari, ba'zi bir uchinchi *E* nuqtani belgilab olsak, to'plamdan bitta ikkinchi tartibli egri chiziq tanlanadi.



66-rasm.

Umuman olganda, $0 \leq \lambda \leq 1$ dagi egri chiziqlar to'plamini quyidagi tenglama orqali belgilash mumkin

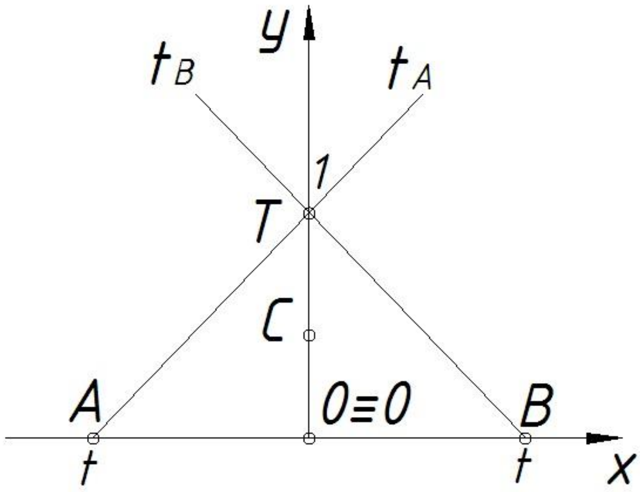
$$(\lambda-1)\varphi_1+\lambda\varphi_2=0 \qquad (22)$$

bu yerda φ_1,φ_2 - ikkinchi tartibli berilgan egri chiziqlar tenglamalari.

Agar $\lambda=0$ teng bo'lsa, φ_1 ni hosil qilamiz. Agar $\lambda=1$ bo'lsa, φ_2 ni hosil qilamiz. Agar egri chiziqlar to'plami ikkita nuqta va ularga mos urinmalar bilan berilsa, (66-rasmga qarang) u holda (22) tenglama

$$(\lambda-1)d^2+\lambda ab=0$$

shaklga keladi, bu yerda a, b, d chiziqlar t_A, t_B, AB chiziqlarining tenglamalaridir.



67-rasm

Endi egri chiziqlar to'plamining λ parametri qiymatiga ko'ra o'zgarishini o'rganib chiqamiz. (67-rasm) To'g'ri chiziqlar t_A, t_B va AB tenglamalari mos ravishda $y-x-1=0;\ y+x-1=0$ ko'rinishga ega bo'lsin; y + x-1 = 0.

$$\text{U holda } (\lambda-1)y^2+\lambda(y-x-1)(y+x-1)=0$$
$$\text{yoki } -\lambda x^2+(2\lambda-1)y^2-2\lambda y+\lambda=0 \qquad (23)$$

(23) tenglama uchun diskriminant (18) quyidagicha yoziladi

$$\delta=\begin{vmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & 2\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(1-2\lambda) \qquad (24)$$

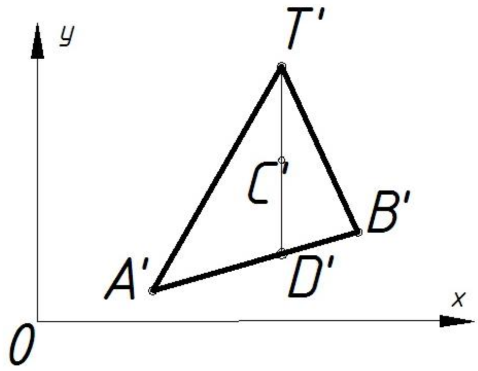
Agar $\delta=0$ bo'lsa, $\lambda=1/2$ ni tashkil qiladi, ya'ni parabola $\lambda=1/2$ qiymatiga to'g'ri keladi. (23) teglamaga $x=0$ va $\lambda=1/2$ga qo'yilgandan keyin quyidagi tenglama $y=1/2$ kelib chiqadi.

Agar y $0<y<1/2$ qiymatlariga ega bo'lsa, ellipsga mos keladi. $1/2<y<1$ giperbolalarga to'g'ri keladi. Bu hollar oson tekshiriladi, (23) tenglamadan λ va y larni topib va (24) tenglamadan bularni y ning ushbu qiymatlari uchun (23) dan topish va (24) tenglamadan δ hisoblash orqali.

Berilgan ATB uchburchakni affin almashtirish orqali $A'T'B'$ uchburchaklik shakliga olib kelamiz (68-rasm). Bu holda $A'T'B'$ uchburchakning T' D'

mediananing bo'linishi mutanosib saqlanib qoladi. Aytilganlarni umumlashtirib, shuni ta'kidlashimiz mumkinki, agar ikkinchi tartibli egri chiziqlar to'plami *A*, *B* nuqtalar orqali va ulardagi t_A va t_B urinmalar orqali berilsa, $T=t_A \cap t_B$ bo'lsa, u holda *ATB* uchburchakning *TD* medianasiga tegishli *C* nuqta to'plam ichidan parabolani ajratadi, agar $CD/TD=1/2$ bo'lsa, ellipsni ajaratadi, agar $0<CD/TD<1/2$, va giperbolani ajratadi, agar $1/2<CD/TD<1$ bo'lsa.

Ushbu holat ma'lum turdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlarni yasash uchun muhandislik usuli deb ataladi.



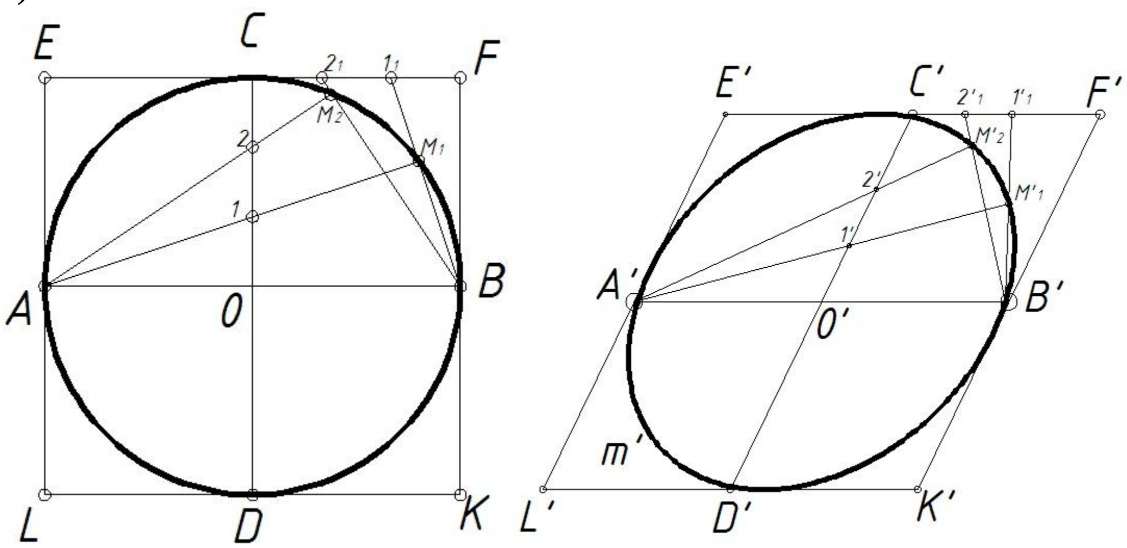
68-rasm.

Loyihalash amaliyotida $r=CD/TD$ nisbati muhandislik diskriminanti deb ataladi.

5.3.3. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLARINI YASASH GRAFIK ALGORITMLARI

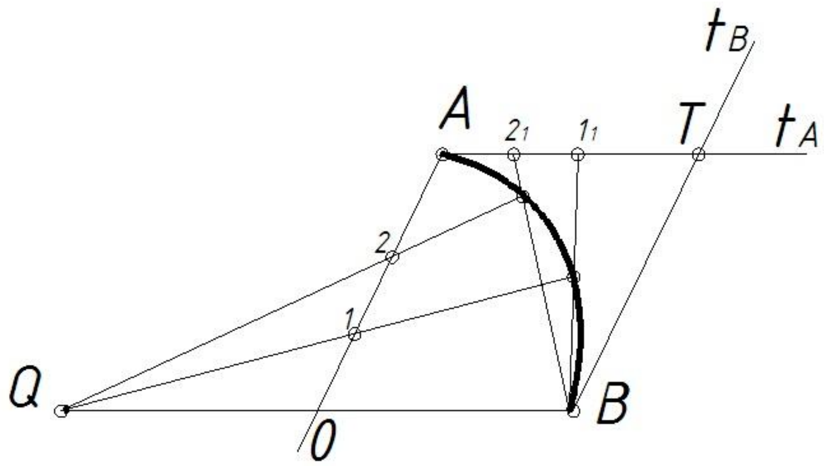
Loyihalash amaliyotida eng keng tarqalgan ellips, parabolalar va giperbolalarni qurishning grafik usullarini ko'rib chiqamiz.

AB va *CD* o'zaro perpendikulyar diametrli juftliklar bilan *m* doirani affin aylantirish orqali mos kelgan parametrlari bo'yicha *m* ellipsni qurish mumkin (69-rasm).



69-rasm

A, B va C nuqtalaridagi aylanaga urinmalar chizib, *EFKL* kvadratni hosil qilamiz. Affinaviy almashtirish orqali uni *E'F'K'L'* parallelogrammga aylantiramiz, uning tomonlari ellipsning berilgan diametrlari *A'B'* va *C'D'* ga parallel tushadi. Aylananing quyidagi xususiyatiga e'tibor bering: Agar *O* nuqtada *O1* kesma chizilsa, *F* nuqtadan esa *FC* kesmaga teng Fl_1 kesma chizilsa va *1* nuqtani A_1 bilan va l_1 ni *B* bilan bog'lab, chiziqlar kesishmasida aylanaga tegishli M_1 nuqtani hosil qilamiz. Darhaqiqat, $\angle 1AO=\angle 1_1BF$, bu esa to'g'ri burchakli *1AO* va 1_1BF uchburchaklar tengligidan kelib chiqadi; o'z navbatida $\angle 1AO+1_1BO=90^0$, shuning uchun *1A* kesma 1_1B kesmaga perpendikulyar, bundan kelib chiqadiki nuqta $M_1 \in m$. Affinaviy almashtirish kesmalar nisbatini saqlab qoladi, *l* nuqta *OC* kesmani ma'lum nisbatda bo'ladi, l_1 nuqta esa *FC* kesmani o'sha nisbatda bo'ladi. Shunday qilib, *O'C'* va *F'C'* kesmalarini bir xil miqdordagi teng qismlarga bo'lib, *FC* kesmaning mos nuqtalarini *B* nuqtasi bilan bog'lab, kesishuv nuqtalarida *m'* ellipsni nuqtalarini hosil qilamiz. Shubhasiz, bu yechim yagonadir, chunki ellips o'z diametrlari bilan ($P_{Sh}=2$) va tekislikdagi holati ($P_h=3$) bilan to'liq aniqlanadi. Ko'rib chiqilgan uslub orqali berilgan *A* va *B* nuqtalarda va ulardagi t_A va t_B urinmalarni berish orqali ellips yoyi chizilishi mumkin (70-rasm).



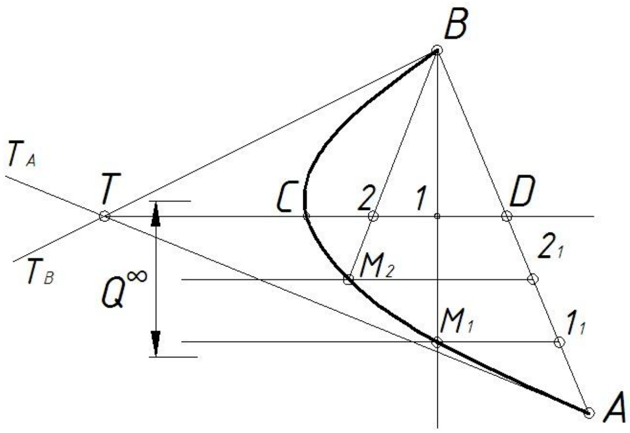
70-rasm.

Ko'rsatilgan ellips chizish usuli ma'lum tarzda chiziqlar orasidagi yakka moslikni o'rnatishda *A'* va *B'* (*Q*, *B*) markazlari bo'lgan ikkita chiziq to'plamining mos ravishda kesishgan nuqtalarining bir parametrli to'plami deb hisoblash mumkin. Hosil bo'lgan egri chiziq turi nurlarning turiga (xos yoki xosmas markaziga) va ularning nurlari orasidagi moslikni o'rnatish uslubiga bog'liq.

Berilgan *A* va *B* nuqtalardan mos ravishda t_A va t_B urinmalari bilan parabola chizish algoritmlarini ko'rib chiqamiz (71-rasm). Urinmalarni o'zaro kesishgan *T* nuqtasi, *A* va *B* nuqtalarni ulab, biz *ABT* uchburchakni hosil qilamiz. Ushbu uchburchakning mediana *TD*-ni chizib, uning o'rtasida *C* nuqtani belgilaymiz. Markazlari *B* nuqtada va *DT* chiziqning cheksiz Q^∞ nuqtasida joylashgan chiziqlar to'plamini aniqlaymiz. Nurlar orasidagi moslik *CD* va *AD* kesmalarini bir xil miqdordagi teng qismlarga bo'lish orqali belgilaymiz. Olingan nuqtalar ketma-ket *A* dan *D* gacha va *D* dan *C* gacha raqamlar qo'yiladi, ushbu to'plamlarning mos keladigan chiziqlari kesishishi natijasida biz parabolaning *AC* yoyini hosil qilamiz.

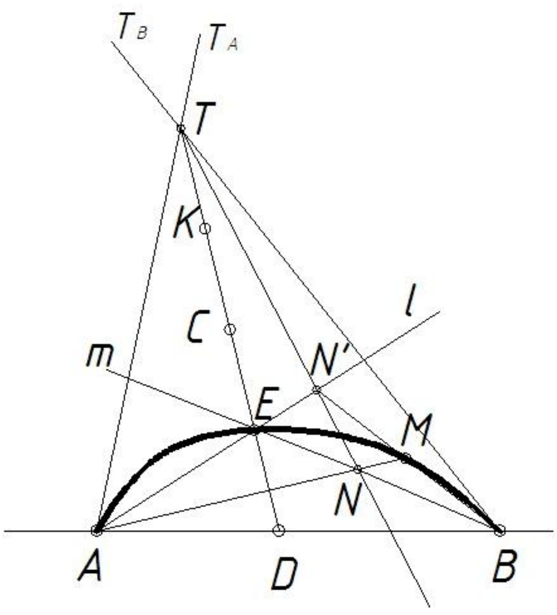
CB yoyi *DB* kesmani *B* dan *D* gacha bo'lish va Q^{∞} va *A* markazlari bo'lgan nurlarning kesishuv natijasi orqali hosil bo’ladi.

Berilgan nuqta va urinmalar orqali ikkinchi tartibli har qanday egri chiziqlarni muhandislik diskriminantiga asoslangan algoritmlar yordamida chizish mumkin (5.3.2-bo'limga qarang).



71-rasm.

Ulardan birini ko'rib chiqamiz (72-rasm). *A*, *B* nuqtalar va t_A; t_B urinmalar berilsin, urinmalar *T* nuqta kesishuvigacha davom ettiriladi. *A* va *B* nuqtalarni ulab, biz *ATB* uchburchakni hosil qilamiz, mediana *TD* va uning o'rta nuqtasi - *C* nuqtasini yasaymiz 5.3.2-bo'limga binoan. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar to’plamidan *C* nuqta parabolani ajratib tanlaydi. *K* nuqta ($K \in TD$) *CT* intervalda giperbolani ajratib tanlaydi, *CD* intervalga tegishli *E* nuqta esa ellipsni ajratadi. *E* nuqtadan o'tgan ellips yoyi misolidan foydalanib, egri chiziqlarning qolgan nuqtalari yasashni ko’rib chiqamiz.



72-rasm

A va B nuqtalarni markaz qilib, to'g'ri chiziq to'plamlarni hosil qilamiz. Ikkala l, m to'g'ri chiziqlar va T markaz orqali o'tuvchi nurlar yordamida to'plamlari orasidagi moslikni o'rnatamiz. Bular l va m to'g'ri chiziqlarni kesib o'tib, ularning nuqtalari o'rtasida moslikni yaratadi. Bular esa o'z navbatida A va B. T_i to'plamlarning mos keladigan kesishgan chiziqlar nuqtalarini belgilaydi. Agar A markaz nurlari $N_i \in m$ o'tsa, va B markaz nurlarini $N \in l$ nuqtalaridan o'tsa, ushbu nurlarning kesishish nuqtalari ellipsning yoyiga tegishli. Nuqtalardan birini qurish tartibini ko'rib chiqaylik. T to'plamning ixtiyoriy n nuri chizib, keyin $n \cap m = N$, $n \cap l = N'$, $AN \cap BN' = M$, M kerakli nuqtani hosil qilamiz.

MASHQLAR

1. Uchinchi tartibli tekis egri chiziq uchun parametrli sonini aniqlang. Bunday egri chiziq qanday geometrik shartlarni orqali berilishi mumkin?
2. Parabola, ellips va giperbolani proektsion diskriminant yordamida grafik usuli orqali ifodalash uchun zarur geometrik shartlarni ko'rsating. Belgilangan parametrlardan foydalanib, giperbolani chizing.
3. Kardioida chizilsin. Berilgan aylanani paderasi bo'lgan kardioida aylananing ixtiyoriy nuqtasi polyus deb tanlanadi.
4. Π_1 va Π_2 tekisliklarida egri chiziqlarni shunday tuzingki, ular qandaydir tekis egri chizig'ining proektsiyalari bo'lsin.

6. EGRI CHIZIQLARNI APPROKSIMATSIYASI VA INTERPOLYATSIYASI

Egri sirt bilan chegaralangan ob'ektlarning avtomatlashtirilgan loyihalash tizimlarida barcha bosqichlarda muhandislik masalalarni muvaffaqiyatli yechimi va yakuniy natijalar ob'ektning shaklini eng aniq geometrik modelini shakllantirish bilan bog'liq. Geometrik modellashtirish ikki turdagi masalalar bilan tavsiflanadi: 1) egri chiziq yoki sirtni (funktsiyani) berilganiga yaqinroq sodda shakl (funktsiya) bilan almashtirish; 2) berilgan nuqtalar yoki chiziqlar orqali o'tuvchi egri chiziq yoki sirtni qurish.

Matematik nuqtai nazardan, birinchi turdagi masala taxminiylikni (lotin tilidan *opproksima* - yaqinlashishni) anglatadi - ba'zi funktsiyalarni taxminiy ravishda boshqasiga, soddaroq funksiyaga almashtirish bilan bog'liq.

Ikkinchi turdagi masala interpolyatsiya bilan bog'liq (lotincha inter – orasida va polo - silliq) - bir qator berilgan qiymatlar uchun taxminiy oraliq qiymatlarni olish. Interpolatsiyaning maqsadi – berilgan nuqtali model (nuqta, chiziqlarning cheklangan to'plami) asosida uzluksiz modelni yaratishdir.

Muhandislik amaliyotida eng ko'p ishlatiladigan satrlarni interpolatsiya qilish usullarini ko'rib chiqamiz, ular sirt kontur chiziqlari, ularning bir qismlari va boshqalar bo'lishi mumkin. Yassi chiziq uchun interpolatsiya masalasi quyidagicha shakllantiriladi: nuqtalarni berilgan koordinatalaridan x^i, $y^i (i=2, 3,...,n)$ interpolatsiya funktsiyasining koeffitsientlarini aniqlash.

Funksiyani tanlash usuli egri chiziqqa qo'yiladigan shartlarga, shuningdek, ushbu shartlarni qondirish uchun zarur bo'lgan parametrlar sonining funktsiya tomonidan belgilangan egri chiziqning parametrli soniga mos kelishiga bog'liq.

Agar tekislikda A^1, A^2, ..., A^n nuqtalar berilgan bo'lsa, unda A1A2 A^1A^2, A^2A^3, ..., A^{n-1} A^n yoylari ketma-ketligidan tuzilgan egri chiziqlarni tekis обвод deyiladi. Yoylarining bo'g'inlari, ya'ni. A^2, A^3,..., A^{n-1} nuqtalarni tutashtirgan yoylari - **tugunlari** (узел) deb ataladi. Agar silliq yoylari tutashgan joylarida nuqtalar umumiy urinmaga ega bo'lsa, u holda egri chiziq silliq deyiladi. Egri chiziq silliqligi tartibi uning yoylari silliqligi bilan belgilanadi.

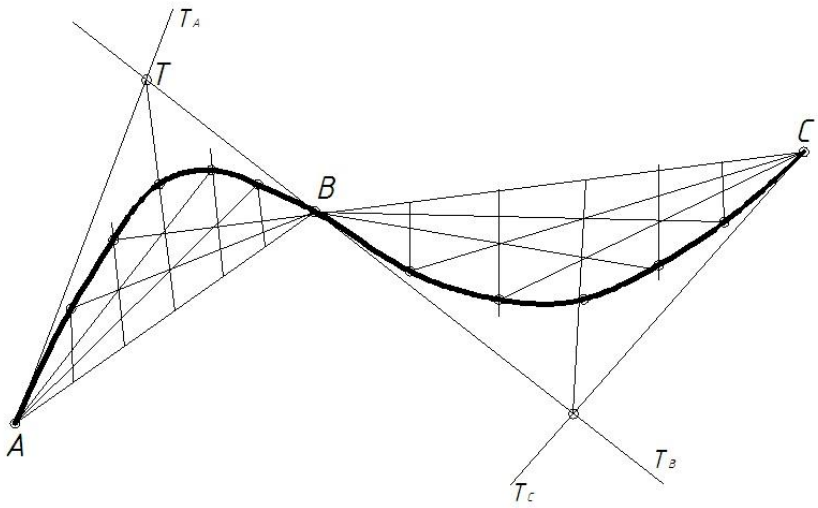
Agar tutashtirilgan nuqtalarida yoylar umumiy urinmalarga ega bo'lsa (ya'ni birinchi hosilalar mavjud bo'lsa), lekin bular turli xil egrilik radiuslarga ega bo'lsa, u holda egri chiziq birinchi tartibli silliqlikga ega (C^1 sinf).

Agar umumiy urinmalardan tashqari, bo'g'inlardagi (обвод) yoylari ham bir xil egriliklarga ega bo'lsa (ya'ni ikkinchi hosilalar mavjud bo'lsa), unda egri chiziq ikkinchi tartibli silliqlikka ega (C^2 sinf).

Agar egri chiziqning tutashtirilgan nuqtalarida egrilikni o'zgarish tezligi bir xil bo'lsa, u holda egri chiziq uchinchi tartibli silliqlikka ega (C^3 sinf).

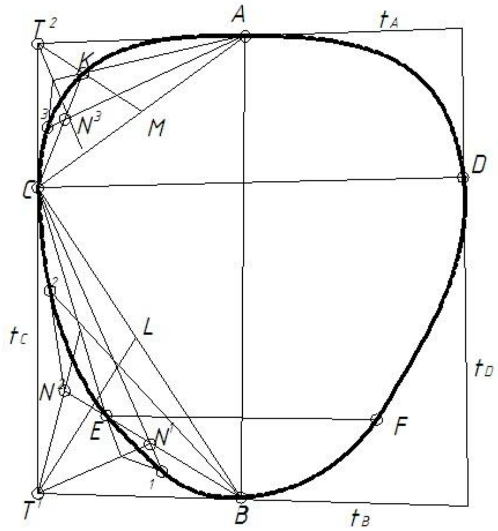
Interpolyatsiyani ikkinchi tartibli egri chiziqlar orqali bajarish yo'llaridan grafik usulini ko'rib chiqamiz.

Masalan, 5.3.3-bo'limda ko'rib chiqilgan grafik algoritmlardan foydalanib, berilgan *A*, *B*, *C* nuqtalarni va ularga tegishli t_A, t_B, t_C urinmalar berilgan bo'lsa, ikkinchi tartibli egri chiziqlardan iborat yangi egri chiziq yasash talab qilinsin (73-rasm). Birinchi yoyni aniqlash uchun to'rtta parametr mavjud ($P^{KT}=2$). To'rtta parametrga parabola ega. Shuning uchun, berilgan shartlarga muvofiq, biz *ATB* uchburchagida *A* va *B* nuqtalari orasiga parabola yoyini quramiz (71-rasmga qarang), keyingi parabola yoyini xuddi shu algoritm yordamida yasash mumkin, chunki u yerda ham to'rtta parametr mavjud (*B*, *C*, t_B., t_C). Tugun nuqtalarida silliqlikning birinchi tartibidagi hosil bo'lgan egri chiziq bitta umumiy urinmaga ega, *B* - burilish nuqtasi.



73-rasm.

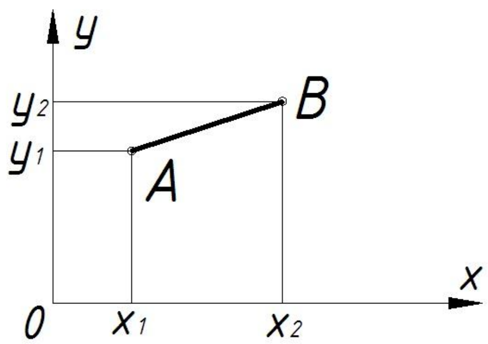
Aytaylik, agar berilgan *AB*, simmetriya o'qi, *CD* kesmaning eng keng qismi, *AB* segment eng katta balandlik ekanligi ma'lum bo'lsa, berilgan *A*, *D*, *F*, *B*, *E*, *C*, *A* nuqtalarda ba'zi sirt tekis qismining nosimmetrik konturini qurish talab qilinsin (74-rasm). Masalaning holatini tahlil qilsak, gorizontal t_A va t_B urinmalari va vertikal t_C va t_D urinmalarini ham berilgan deb hisoblash mumkin. Beshta parametrni (*B*, *C*, *E*, t_B, t_C) aniqlaydigan shartlardan foydalanib, biz muhandislik usuli bilan ikkinchi tartibli yoyni quramiz (72-rasmga qarang). Bu ellips yoki giperbola bo'lishi mumkin, bu BT^1C uchburchagining T^1L medianasida egri chiziq hosil bo'ladigan yoyi nuqtasining joylashuvi bilan belgilanadi. **Обвод** ning navbatdagi yoyi ham *C, A*, t_C, t_A beshta parametrlari va CT^2A uchburchagi T^2M medianasida qo'shimcha *K* nuqtasi yordamida aniqlangan. *K* nuqtaning medianadagi o'rni kerakli egri chiziq turiga qarab muhandislik diskriminantini belgilash orqali aniqlanadi.



74-rasm

Interpolatsiyaning asosiy hisoblash usullarini ko'rib chiqamiz.

1. Ikki nuqta $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ berilgan (75-rasm). Eng oddiy interpolatsiya funktsiyasi - belgilangan shartlar soniga to'g'ri keladigan to'g'ri chiziqdir ($P = 2$). Quyida to'g'ri chiziqning tenglamasini yozamiz



75-rasm.

$$y=ax+b \tag{25}$$

Ushbu nuqtalarning koordinatalarini (25) formulaga kiritib, ikkita noma'lum bo'lgan ikkita tenglamani olamiz. Tizimni yechib, *a* va *b* qiymatlarini aniqlaymiz.

2. Agar kerakli shaklni polinom orqali interpolyatsiyasini topmoqchi bo’lsak, u parabolik interpolyatsiya deb ataladi va quyidagicha formula orqali yoziladi.

$$y=a_0+a_1x+a_2x_2+\dots a_nx_n \tag{26}$$

va bu tenglama bilan aniqlangan egri chiziq n-tartibli parabola bo'lib, ($n+1$) chi koeffitsienti (26) formulada nuqtalarning koordinatalarini (yoki boshqa shartlarni) belgilash orqali aniqlanadi. Ushbu usul quyidagi tizimga olib keladi:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots a_nx_0^n = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots a_nx_1^n = y_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (27)$$
$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots a_nx_n^n = y_n$$

Agar $A(x_1, y_1)$ nuqta va urinma t_A hamda $B(x_2, y_2)$ nuqta berilgan bo'lsa bu shartlar uchta parametrga mos keladi.

U holda interpolatsiya polinom (26) quyidagi ikkinchi tartibda bo'ladi

$$y=ax^2+bx+c$$

bu yerda *a, b, c* koeffitsientlari quyidagi tizimdan olinadi

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$
$$y_2 = ax_2 \ + bx_2 + c$$
$$k = 2ax_1 \ + b$$

Tizimdagi uchinchi tenglama x_1, y_1 koordinatalari bo'lgan nuqtada funktsiyaning birinchi hosilasining k qiymatini belgilaydigan *A* nuqtadagi urinma borligi shartidir. Berilgan nuqtalar sonining ko'payishi bilan polinomning tartibi oshadi, bu esa hisob-kitoblarni qiyinlashtiradi. Amaliy qo'llanilish uchun eng sodda Lagranj polinomidir.

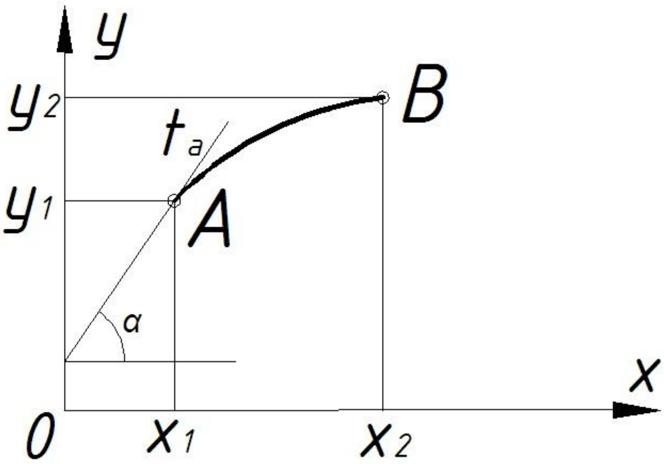
3. Lagranj interpolyatsion polinomining ko’rinishi quyidagicha

$$P_i(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x), y_i$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \qquad (28)$$

Lagranj polinomi - bu avval tenglamalar tizimini yechmasdan *n* nuqtadan o'tish shartini qondiradigan ko'pburchak funktsiyasini yozishga imkon beradigan tenglamadir. Taqdim etilgan polinom *n-1* darajaga ega. Darhaqiqat, har bir *Li (x)* birinchi darajadagi o'zgaruvchan *n-1* berilmalarni o'z ichiga oladi. $(x-x_i)$ ko’paytiruvchi faqat *i*-chi koeffitsientida mavjud emas, shuning uchun $x = x_i$ holda $L_i(x)$ dan boshqa barcha koeffitsientlar nolga teng, ya'ni. $x=x_i$ uchun $P(x)=y$.

Agar $N=2$ teng bo’lsa, (28) tenglama ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasiga aylanadi:



76-rasm.

$$y = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Buni tekshirish oson: $x=x_1$ uchun $y=y_1$, $x=x_2$ $y=y_2$ chiqadi. $n=4$ uchun Lagranj polinomi kubik parabolani aniqlaydi.

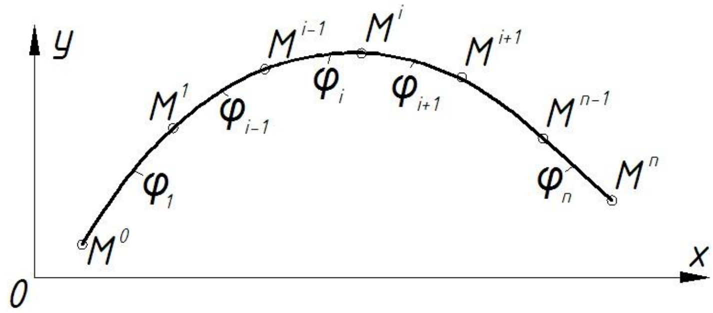
$$y = y_1 \underbrace{\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}}_{L_1} + y_2 \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}}_{L_2} +$$
$$+ y_3 \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}}_{L_3} + y_4 \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}}_{L_4}$$

Ya’ni (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) nuqtalar orqali o’tuvchi egri chiziq hosil bo’ladi.

Interpolatsiya polinomi Ox o'qiga $x_1<x_2<\ldots<x_n$. nuqtalarni proektsiyasi orqali o’tuvchi egri chiziqlarni aniqlaydi.

Nuqta sonining ko'payishi bilan Lagranj polinomining n darajasi oshadi va katta n uchun egri chiziqning istalmagan tebranishlari (ostsilyatsiyasi) hosil bo’lishi mumkin. Tebranishni bartaraf etishning usullaridan biri bu interpolyatsiya nuqtalarni guruhlarga bo’lib, bularni past tartibdagi polinomlar orqali (masalan kubik polinomlar) ketma-ket birikma egri chiziqlarni hosil qilish. Ushbu interpolatsiya qisman - analitik deb nomlanadi.

So'ngra $(n+1)$ nuqtalarni belgilaganda n intervallarni va n interpolatsiya funktsiyalarini aniqlaymiz ($i = 1, 2, \ldots, n$) (77-rasm).



77-rasm.

Agar m - har bir intervaldagi interpolatsiya egri chiziqlarining parametrli soni bo'lsa, unda parametrlarning umumiy soni $P=mn$ bo'ladi. Qisman - analitik interpolatsiya tekislikdagi konturlarini qurish bilan bog'liq konstruktorlik masalalarini hal qilishning matematik asosidir.

Qisman analitik interpolyatsiya berilgan qiymatlarni interpolatsiya qiluvchi funktsiyalar to'plamini topishdan iboratdir. Interpolatsiya usuli bo'yicha algoritmlar uchta sinfga bo'linadi:

1) lokal interpolatsiya - har bir φ_i funktsiya boshqalardan mustaqil ravishda aniqlanadi;

2) global interpolatsiya - har bir φ_i funktsiya barcha berilgan qiymatlarga bog'liq;

3) ketma-ket interpolatsiya - joriy funktsiya φ_i φ_{i-1} dan olingan qo'shimcha ma'lumotlar asosida aniqlanadi.

6.1 LOKAL INTERPOLATSIYA

Quyidagi 1-misolni ko’rib chiqamiz. Approksimatsiya funktsiyaning parametrlar soni $m=2$ ga teng, n - intervallar soni bo'lsin.

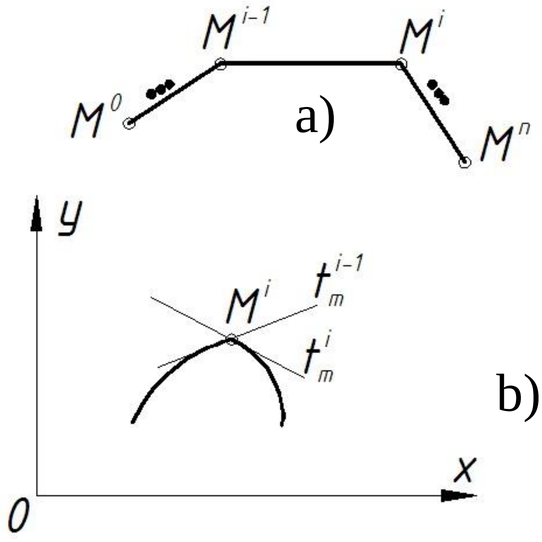
Bunday holda, har bir φ_i uchun ikkita parametr kerak bo'ladi; egri chiziqdagi nuqtaga tegishli bo'lish sharti har bir oraliq uchun hisoblanadi. Eng oddiy ikki parametrli chiziq - bu to'g'ri chiziq (78-rasm, a)

$$y=a_ix+b_i \text{ da } i=1,\ldots,n.$$

Interpolatsiya uchun parametrlarning umumiy soni $2n$. To'g'ri chiziq o'rniga, masalan, ikkita parametr egri chizig'ini olishingiz mumkin

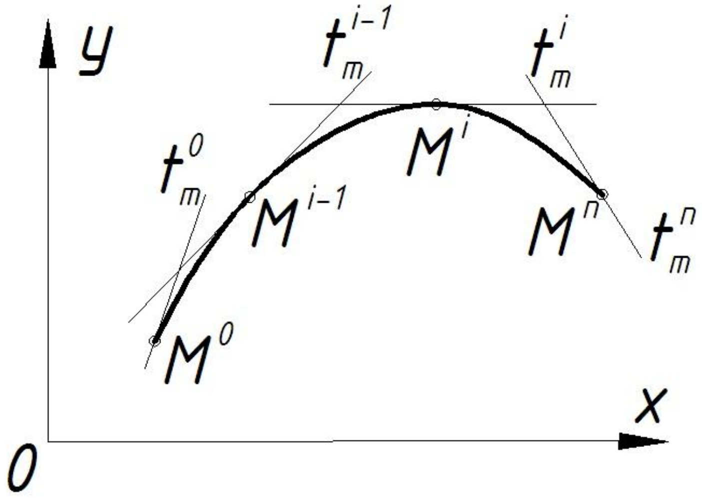
$$y=a_ix^2+b_i \text{ agar } i=1,\ldots,n$$

Hosil bo’lgan polinom funktsiyasi uzluksiz bo'ladi, lekin umumiy holda u M tugunlarida hosilalarning uzilishlariga ega bo'lishi mumkin (78.b-rasm). Amaliy masalalar uchun ko'p hollarda bu qabul qilinmaydi, masalan, agar bu chiziq silliq sirt karkasining elementi bo'lsa, u holda u ham silliq egri chiziq bo'lishi kerak.



78-rasm.

2-misol. Agar uzluksiz C^1 sinfida hosil bo’lgan (obvod) yasash kerak bo’lsa, birinchi hosilalar bilan birgalikda funksiyaning qiymatlari berilgan bo’lsin. U holda Ermit polinomlari ishlatilishi mumkin (79-rasm).



79-rasm.

Bundan tashqari, har bir φ_I uchun berilgan nuqtalarda urinmaning ikkita sharti mavjud, ya'ni $2x2 = 4$ parametr. Shuning uchun to'rt parametrli ($m=4$) egri chiziqni (26) tanlash maqsadga muvofiq, masalan kubik parabola

$$y=a_ix^3+b_i\,x^2+c_ix+d_i$$

Kerakli parametrlarning umumiy soni $P = 4n$.

Ushbu interpolatsiya usuli kamchiliklarga ega. Ulardan biri tugunlarda hosilalarni bilish zarurati (bu modeldan o'lchovlarni olishda qiyin). Bundan tashqari, silliqlik tartibini oshirish uchun yuqori darajadagi polinomlar talab qilinadi.

6.2. GLOBAL INTERPOLATSIYA

Agar minimal talablar bilan past darajadagi polinomlar yordamida interpolyatsiya qilish talab qilinsa, u holda quyidagi usuldan foydalanish mumkin.

Misol 3. Nuqtalar ketma-ketligi berilsin.

(x_0,y_0), (x_1,y_1),…, (x_n,y_n), bu yerda $x_0<x_1<…<x_n$

Ushbu nuqtalar orqali quyidagi xususiyatlarga ega bo'lgan egri chiziqni o’tkazish mumkin:

har bir $x_{i-1}\le x\le x_i$, $i=1, 2,…,n$ intervalda $\varphi(x)$ funktsiya kubik polinom tarzida berilgan;

$\varphi(x)$ funktsiyasining birinchi va ikkinchi hosilalari berilgan nuqtalarda uzluksiz, ya'ni C^2 sinfiga tegishli funktsiya hosil qilinishi kerak.

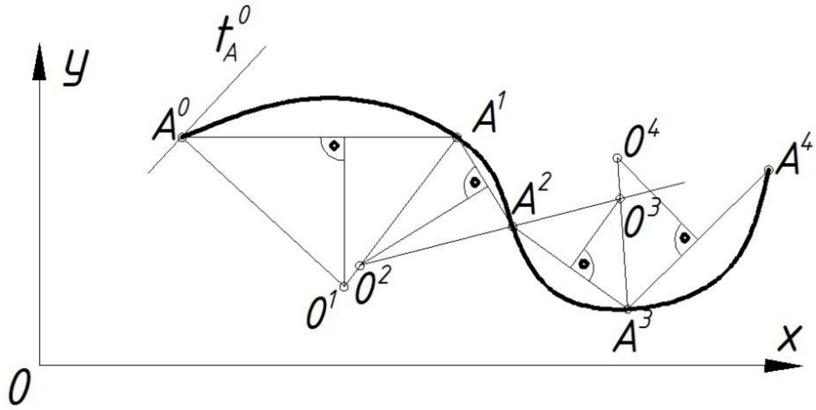
Ushbu shartlarni qondiradigan silliq egri chiziq kubik splayn (ingliz tilida “spline”) deb ataladi.

n-darajali splayn funksiyaning uning (*n-1*) hosilalari bilan uzluksizligini olishga imkon beradi. $n=3$ uchun har bir ichki tugunda $\varphi_\iota (x)$, $i=1,2,…,n$, ni aniqlash uchun $\varphi_{\iota-1} (x_i)$, $\varphi_\iota (x_i)$ funktsiyalar qiymatlari va birinchi va ikkinchi hosilalarning tengligi aniqlanadi. $\varphi'_i=\varphi'_{\iota+1} (x_i)$, $\varphi''_\iota (x_i)$, $\varphi''_{\iota+1} (x_i)$. Bunday shartlarni (*n-1*) ichki tugunlar uchun yozish mumkin, ya'ni. bizda $P^{BH}=4(n-1)$ parametrlari bor, ammo jami $n+1$ nuqta mavjud. Shuning uchun splaynning aniq ta'rifi uchun birinchi va oxirgi nuqtalarning $\varphi_1(x_0)$ и $\varphi_n(x_n)$ qiymatlaridan tashqari yana ikkita qo'shimcha shart bo'lishi kerak. Ular masalaning o'ziga xos qo'llanilishiga bog'liq, masalan, birinchi $\varphi'_1(x_0)$, $\varphi'_n(x_n)$ yoki ikkinchi $\varphi''_1(x_0)$, $\varphi''_n(x_n)$ hosilalari qiymatlari bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, C^1 sinfiga ega egri chiziq uchun $P=4(n-1)+4=4n$ parametrlari kerak.

Misol 4. Ketma-ket interpolatsiya

Bunday interpolyatsiyaning oddiy misoli - bu bir qator nuqtalarni aylana yoylari bilan interpolatsiyalash. Bu holda, A_0 nuqtasidagi t_A^0 urinma va barcha nuqtalar koordinatalari ham berilgan bo’lsin. C^1 sinfiga tegishli egri chiziq quyidagicha yasalishi mumkin. (80-rasm).



80-rasm.

Har bir intervalda aylana yoyni qurish uchun birinchi oraliqda aniqlangan uchta parametr ($m=3$) talab qilinadi (tegishlilik ikkita sharti va bittasi - urinma); keyingi intervallar uchun urinmaning yetishmayotgan holati oldingi intervalda aniqlanadi. Masalani hal qilishning grafik algoritmi A_i, A_{i+1} nuqtalardan teng masofada joylashgan va A_i nuqtada urinmaga perpendikulyar yotgan aylana yoyining O markazini aniqlashdan iborat.

MASHQLAR

1. Berilgan A, B, C nuqtalarni A va C nuqtalarda berilgan urinmalar orqali shunday egri chiziq topilsin. U ellips va parabola yoylarini o'z ichiga olsin va C nuqta egilish nuqtasi bo'lsin.

2. Fazoda beshta nuqta ko'rsatilgan. Parabolik interpolyatsiya uchun interpolatsiya qiluvchi parabola tartibini aniqlang; uning tenglamasini yozing.

3. Ularning koordinatalari bilan berilgan to'rtta nuqtadan o'tish shartini qondiradigan Lagranj polinomini yozing. Egri chiziqqa tegishli uchta ixtiyoriy nuqtaning abtsissalarini berib, ularning koordinatalarini aniqlang.

4. Ularning koordinatalari bilan belgilangan beshta nuqta orqali kubik splayni bilan interpolatsiyani amalga oshirish uchun qancha qo'shimcha parametrlarni ko'rsatish kerak? Hosil bo'lgan egri chiziq qaysi sinfiga kiradi? Qancha parametr kerak edi?

7. SIRTLARNI HOSIL QILISH UCHUN KARKAS - PARAMETRIK USUL

Sirt uzluksiz ikki parametrli nuqtalar to'plami yoki bitta parametrli chiziqlar to'plami sifatida aniqlanadi. Ushbu to'plamlarning nuqtalari yoki chiziqlari mos ravishda sirt karkasining nuqtalari yoki chiziqlari deb nomlanadi. Chizishda sirt karkasining barcha nuqtalarini yoki chiziqlarini ko’rsatishning iloji yo'qligi sababli ular ma'lum bir oraliqda ko’rsatiladi.

Xuddi shu shakllanish qonuniga ega bo'lgan va ma'lum bir munosabatlar bilan o'zaro bog'liq bo'lgan chiziqlar to'plamiga sirtning chiziqli karkasi deyiladi. Sirtdagi ma'lum bir chiziqning shakli va joylashuvi karkas parametrlari bilan belgilanadi.

Sirtning uzluksiz chiziqli karkasini shakllantirishga ikkita yondashuv mavjud.

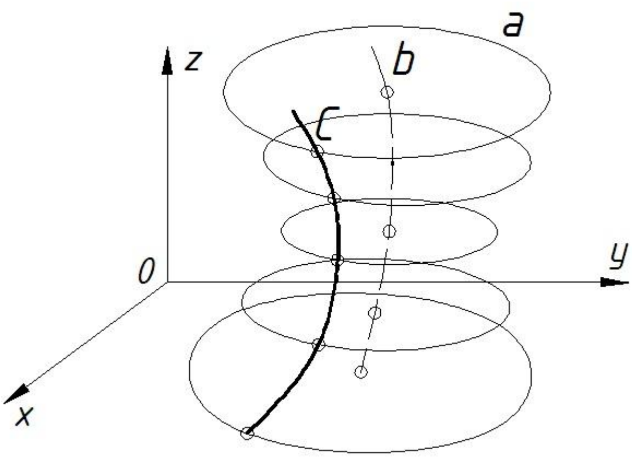
Birinchisida sirtni to'ldiradigan chiziqlar to'plamining parametrlarini bog'lash orqali hosil bo'ladi. Sirtning parametrli soni aniqlanadi.

$$P=P_h+P_{sh} \qquad (29)$$

bu erda P_h+P_{sh} - parametrlarning soni, ya’ni holat va shakl parametrlari.

Sirtni to'ldiradigan chiziqlar to'plamining *P-1* parametrini bog'laydigan shartlar o'rnatiladi va shu bilan bitta erkin parametr sirt karkasini tashkil etuvchi bitta parametrli (∞^1) to'plamini belgilaydi. Ushbu parametr karkas parametri deb ataladi.

Misol: doiralar to’plami bilan sirt hosil bo'lishi (81-rasm)da ko’rsatilgan. Doira fazodagi bitta shakl parametriga va beshta holat parametriga ega. Berilgan tekislikka parallel bo'lgan barcha doiralarni fazoda ajratib olamiz. Ushbu holat to'plamning ikkita parametrini bog'laydi.



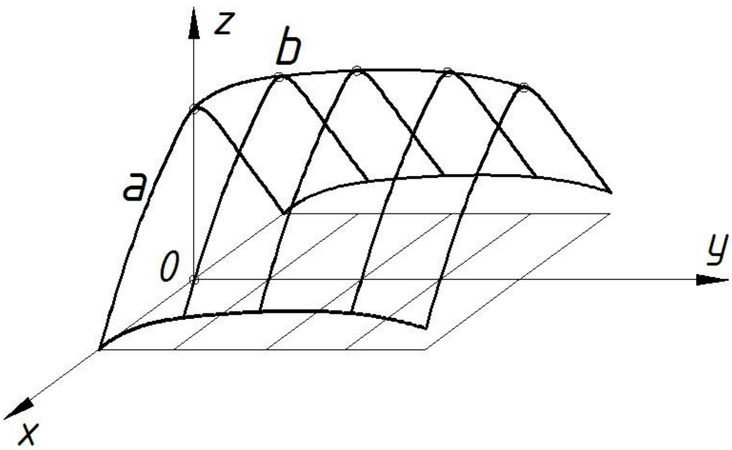
81-rasm

Doira markazlari chizig'ini aniqlaymiz. Bu holat shuningdek to'plamning ikkita parametrini bir-biriga bog'laydi, chunki har bir tekislikda biz tekislikdagi ikkita parametrli to'plamidan bitta markazni tanlaymiz.

Sirt barcha doiralarni kesib o'tadigan chiziqni o'rnatamiz. Ushbu holat to'plamning yana bitta parametrini bog'laydi (har bir tekislikda aylana radiusini aniqlaymiz).

Shunday qilib, to'plamning oltita parametridan beshta parametr uchta shart bilan bog'liq. Qolgan bitta parametr - bu sirt karkasining parametri. Ushbu parametr parallel tekislik to'plamidagi har bir sirt karkas doirasining tekisligini belgilaydi. Parametrni diskret tarzda o'rnatib, uning chizilgan rasmidagi tasvir uchun ma'lum bir oraliqda sirtning diskret karkasini tanlashingiz mumkin.

Sirt hosil bo'lishining ikkinchi yondashuvi berilgan chiziqning bitta parametrini chiqarishga asoslangan. Buning natijasida sirtga tegishli bo'lgan bitta parametrli karkas chiziqlari to'plami paydo bo'ladi. Qoida tariqasida, karkas chizig'ining fazoda siljish qonunini belgilash orqali parametr chiqariladi. Masalan, erkin parametrlarga ega bo'lmagan ma'lum bir parabola berilsin (82-rasm). Holat parametrni erkin qilaylik, *b* chiziq bo’ylab siljib harakatlansin.



82-rasm

Bunday holda, biz ∞^1 parabolalar to’plamini hosil qilamiz, ya'ni uzluksiz karkas yuzasi.

Chizma geometriyada bunday sirt hosil bo'lishining usuli kinematik usuli deb nomlanadi, karkasning *a* chizig'i yasovchisi, *a* chizig'i nuqtalari harakatining traektoriyasi *b* yo'naltiruvchisi deb hisoblanadi. Yasovchisi fazodagi harakati jarayonida uning shaklini o'zgartirishi mumkin, ammo karkas chizig'ining faqat bitta parametri erkin bo'lib qolishi uchun uni harakat qonuni bilan bog'lash kerak. Masalan, (81-rasm)da ko'rsatilgan sirt. Bu yerda yasovchi aylana fazoda shunday harakatlanadiki, uning markazi b yo'naltiruvchi bo'ylab harakatlansin va aylana tekisligi doimo *xOy* tekisligiga parallel bo'lib qolmoqda. Harakat paytida radiusning o'zgarishi c chiziq bilan o'rnatiladi. Aylananing ikkita parametri o'zgartirilgan: aylana tekisligining holati va radius qiymati. Biroq, bu parametrlardan faqat bittasi mustaqil, chunki aylana tekisligi holatining o'zgarishi radiusning o'zgarishiga olib keladi.

Chizma geometriyada sirt hosil bo'lishining ikkala yondashuvi keng qo'llaniladi. Agar sirtga tegishli bo'lgan nuqtaning bitta proyeksiyasidan ikkinchi proektsiyani qurish mumkin bo'lsa, sirt berilgan deb hisoblanadi. Sirtni aniqlash uchun zarur va etarli bo'lgan shartlar to'plami sirtni determinanti deb ataladi. U geometrik va algoritmik qismlardan iborat: geometrik qismi geometrik figuralardan iborat bo'lib, ular yordamida fazoni to'ldiruvchi chiziqlar to'plamining parametrlari bog'langan; algoritmik - bu determinantning geometrik qismidan sirt hosil qilish uchun foydalanish qoidalari to'plami. Masalan, 81 – rasmda ko'rsatilgan sirt determinantning geometrik qismi bu - *a, b, c* chiziqlar va *xOy* tekislikdir.

Determinantning algoritmik qismi quyidagi qoidalardan iborat:

1. *a* doira - bu sirt karkasining chizig'i.
2. Sirt karkasining aylanasi markazi *b* chiziqda bo'lishi kerak.
3. Sirt karkasining barcha chiziqlari *c* chizig’ini kesib o'tishi kerak.
4. Karkasning har bir chizig'i tekisligi *xOy* tekisligiga parallel bo'lishi kerak.

MASHQLAR

1. Giperbolik paraboloid sirtining karkasini tuzing, agar uning ikkita yo’naltiruvchisi profil chiziqlaridan iborat va parallellizm tekisligi profil – proyeksiyalovchi tekisligidan iborat.

3. To’g’ri vintli konoid (gelikoid) sirtining determinantining geometrik va algoritmik qismlarini ko'rsating.

3. Uzluksiz siklik trubasimon sirtining hosil bo’lish karkasini shakllantirish paytida, oltita parametrli doiralar to'plamining beshta parametrlarini birlashtirgan shartlarni aniqlang.

8. SIRTLARNI DISKRET HOLATGA KELTIRISH

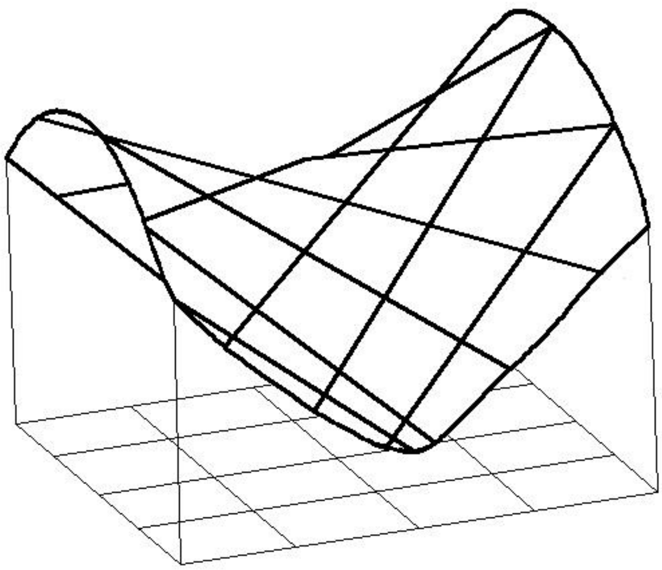
Bir qator muhandislik masalalarini hal qilishda sirtni diskret shaklda aks ettirish talab etiladi, ya'ni sirtda ma'lum bir oraliqda joylashgan chiziqlar yoki chiziqlar to'plami shaklida. Masalan, fazoviy qoplamalarning yuzalarini loyihalashda sirtni bir qator tayyor elementlarga bo'lish kerak; inshootning mustahkamligini hisoblashda uning cheklangan elementlar bilan almashtirilishi kerak va hokazo.

Diskretizatsiyaning eng oddiy misoli – sirtni chizmasida uni karkasini tanlash. Bunday karkas uning parametrining diskret o'zgarishi bilan bog’liq va to'g'ridan-to'g'ri sirtni aniqlanishi bilan bog'liq (81, 82-rasmlarga qarang).

Diskretli sirt karkasi egri chiziqlar hosil qiladigan sirtdagi kesishgan chiziqlarning to’plamidan iborat.

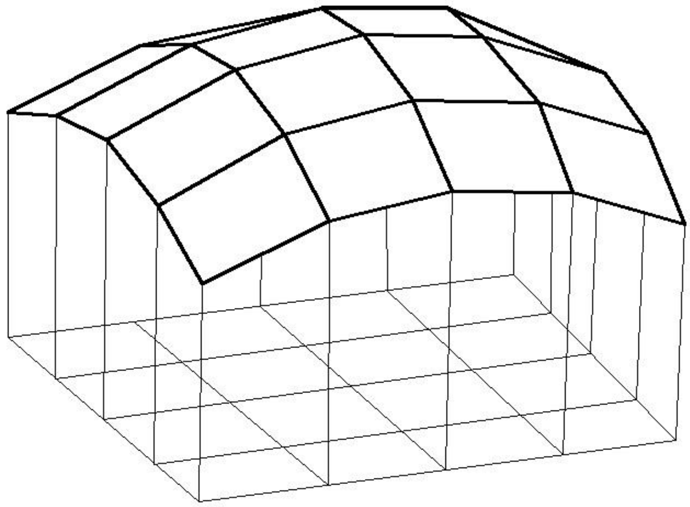
Karkasning muhim xususiyati uning qadamidir. Diskret karkasining qadami - bu karkas parametrining ikkita qo'shni qiymati orasidagi farqi.

Amaliy masalalarni yechishda ko'pincha sirtni diskret karkas sifatida ko'rsatish kerak bo'ladi, uning elementlari to'g'ridan-to'g'ri determinantdan olingan uzluksiz karkas elementlariga to'g'ri kelmaydi. Masalan, chegara konturi egri chiziqlar bilan mos kelmaydigan qobiq yuzasini keltirish mumkin. (83-rasm)da bir pallali giperboloid sirtining kesimi ko'rsatilgan bo'lib, uning chekka konturi karkasning to'g'ri chiziqlariga to'g'ri kelmaydi. Sirt diskret karkas bilan, shu jumladan chekka konturining chiziqlari bilan ko’rsatilishi kerak. Yuqoridagi misol kabi holatlarda diskret karkasning tashkil etilishi proektsiyalarning biriga (masalan, gorizontal proektsiyasida) tekis to’r shaklida o'rnatiladi, so'ngra berilgan proektsiyadan sirtdagi karkas elementlari aniqlanadi. Ushbu sirt diskretizatsiyasi usuli bilan alohida egri chiziqlar ancha murakkab qurilish algoritmiga ega bo'lishi mumkin. Shuning uchun, sirt shu usulda diskretlashtirilganda, u odatda diskret nuqta to’plami orqali ko’rsatiladi.



83-rasm.

Nuqta to’plami karkasi - bu sirt shaklini ko’rsatishga imkon beradigan tarzda aniqlangan sirtdagi nuqtalar to'plamidir. Tartib asosida va tartib asosida bo’lmagan nuqtalar to’plami mavjud bo’lishi mumkin. Tartibsiz karkas nuqtalarining nisbiy pozitsiyasi tasodifiy bo'lib, tartiblangani ma'lum bir qonunga bo'ysunadi. Ushbu qonun, qoida tariqasida, sirt qismining proektsiyalaridan birida tekis to'r bilan ko’rsatiladi. Tartiblangan karkasning nuqtalari bir-biridan ajratilgan holda tanlanishi yoki ma'lum bir tartibda bir-biriga to'g'ri chiziqlar orqali ulanishi mumkin. Ikkinchi holda, diskret chiziqli to’r hosil bo'ladi (84-rasm).

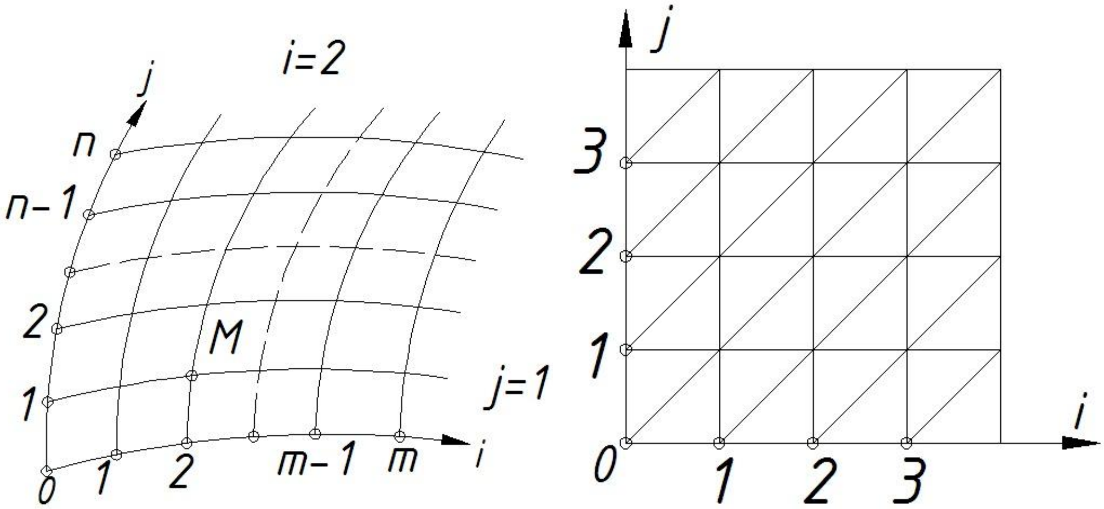


84-rasm

Diskret to’r elementlari – bu nuqtalar (karkas nuqtalari), qo'shni nuqtalarni bog'laydigan chiziqlar, fazoviy yoki tekis ko'pburchaklar.

Amaliy masalalar shartlariga qarab, sirt qismining proektsiyasida har xil tekis to’rdan foydalanish mumkin. Ikki yoki uchta alohida egri chiziqlar yoki to'g'ri chiziqlar kesishganda tekis to’r hosil bo'ladi (85-rasm). Ikkala to’plamning egri chiziqlariga i va j raqamlari berilgan. Bu barcha to’r elementlarini raqamlash imkonini beradi. To’rning nuqtalari yoki ularning koordinatalari lotin alifbosining mos keladigan harflari bilan ikkita indeks bilan belgilanadi, ular bu nuqtaning qaysi to’plam qismida joylashganligini ko'rsatadi. Masalan, $M_{2,1}$ nuqtani (85-rasmga qarang) $i=2$ va $j=1$ chiziqlar kesishmasida joylashgan. Birinchisi har doim i qiymatiga mos keladigan indeks, ikkinchisi esa j qiymatiga mos keladi.

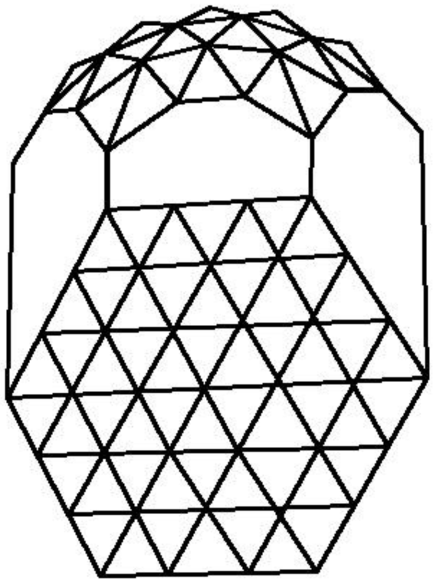
Gorizontal proektsiyasida odatda teng shakllardan (uchburchaklar, to'rtburchaklar, kvadratlar) tashkil topgan to’r tanlanadi. U doimiy qadamga ega va muntazam deb nomlanadi (85-rasm, b).



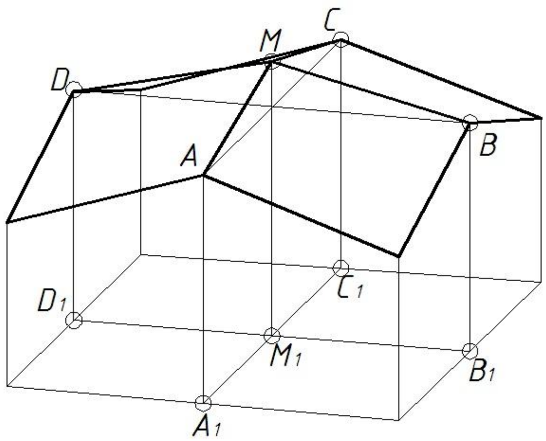
85-rasm

Grafik jihatdan diskret sirt karkasi kesuvchi tekisliklar usuli yordamida quriladi.

86-rasmda gorizontal proektsiyasida keltirilgan muntazam uchburchakli to’rga ko'ra shar qismining diskret nuqta karkasi qurilishi ko'rsatilgan. Diskret karkasning nuqtalarida urinma tekislikni va normalni qurishingiz mumkin. Urinma tekisligining eng oddiy konstruktsiyasi - bu nuqta karkasi to'rtburchaklar katakchalar bilan ko’rsatilgan bo’lsa. Bunda *M* nuqtadagi urinma tekisligi *AC* va *BD* kesmalarning parallellik tekisligi sifatida, normal esa sirtga urinma tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq sifatida qurilgan (87-rasm).

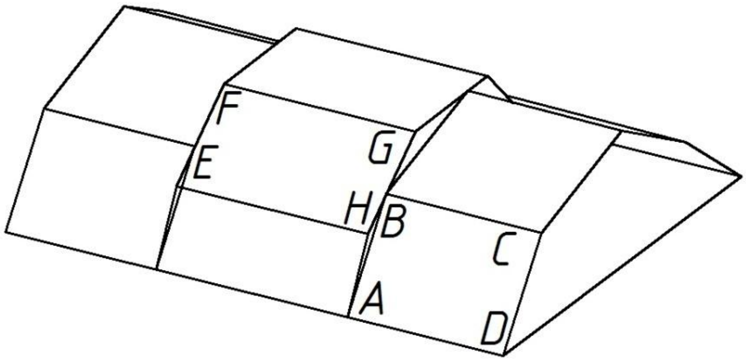


86-rasm

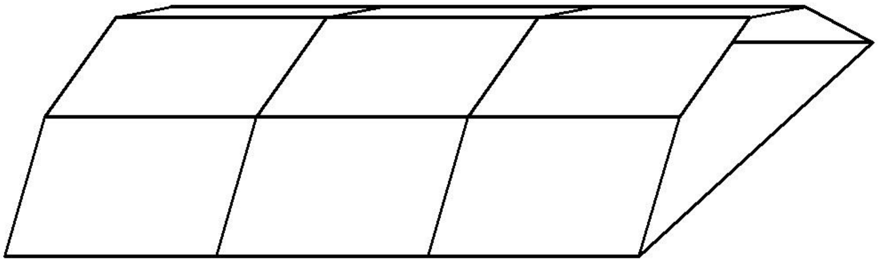


87-rasm

Sirtni teng bo’laklarga bo’lish masalasi sirtni diskretizatsiyasi bilan chambarchas bog'liq. Sirtni teng bo’laklarga bo’lish uni bir yoki bir nechta turdagi tekis yoki egri elementlar bilan taxminiy almashtirish deb ataladi. Har bir turdagi barcha elementlar bir xil shakli va o'lchamiga ega. Umuman olganda, tekis elementlar bilan teng bo’laklarga bo’lishning natijasi ko'pburchak emas, chunki qo'shni elementlarining umumiy tomoni bo'lmasligi mumkin. Masalan, teng to'rtburchaklar bilan silindrni teng bo’laklarga bo’lishda (88-rasm) qo'shni *ABCD* va *EFGH* elementlari umumiy tomonga ega emas, lekin ular orasida bo'shliqlar hosil bo'ladi. Muayyan holatda bo'shliqlar bo'lmasligi mumkin (89-rasm).

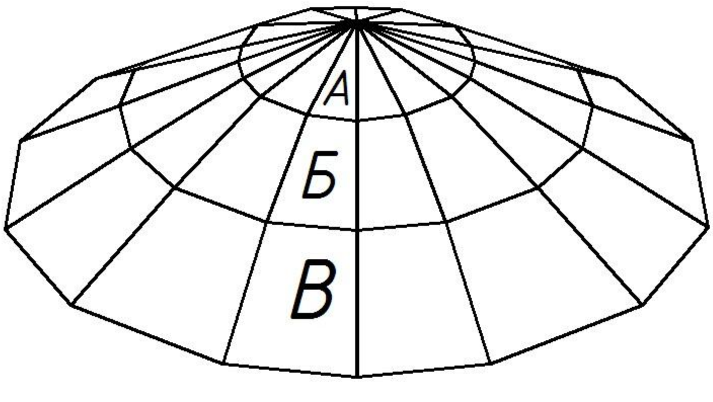


88-rasm



89-rasm

Xuddi shu turdagi elementlar orasidagi bo'shliqlar bilan yoki bo'shliqlar bo'lmagan holda bir xil sirt bilan teng bo’laklarga bo’lish aniq deb nomlanadi. Bu faqat ma'lum sirtlar uchun bo’lishi mumkin. 88 va 89 rasmlarda ko'rsatilganidan tashqari biz bir necha turdagi elementlar bilan sirtining aniq bo’linishiga misol keltira olamiz. 90-rasmda ko’rsatilgan *A* element uchburchaklik shaklga ega, *Б* va *B* elementlar trapetsiya shaklida ko’rsatilgan.



90-rasm

Ko'pgina hollarda, ma'lum bir sirtni aniq teng bo’laklarga bo’lish mumkin emas va shuning uchun amalda qo'shni elementlar orasidagi bo'shliqlar har xil bo'lsa-da, lekin oldindan belgilangan qiymatdan oshmasa, taxminiy bo’lish ishlatiladi. Taxminan teng bo’laklarga bo’lish ikki bosqichda amalga oshiriladi: birinchisida sirt taxminan bir xil katakchalarga ega bo'lakcha chiziqli to’r bilan qoplanadi, ikkinchisida xuddi shu teng bo’laklarga bo’lish elementlari to’r yacheykalariga joylashtiriladi.

Murakkab sirtlarni loyihalashda aniq va taxminiy teng bo’laklarga bo’lish vazifalari ko’p uchraydi. Teng bo’laklarga bo’lishning elementlari bu holda yig'ma plitalar bo'lib, elementlari orasidagi bo'shliqlar plitalar orasidagi ko'ndalang choklarga to'g'ri keladi. Murakkab sirtlarning taxminiy bo’linishidan kelib chiqadigan xatolar, choklarni o'zgaruvchan kengligi tufayli yo'q qilinadi, ular 10 ... 100 mm oralig'ida o'zgarishi mumkin.

MASHQLAR

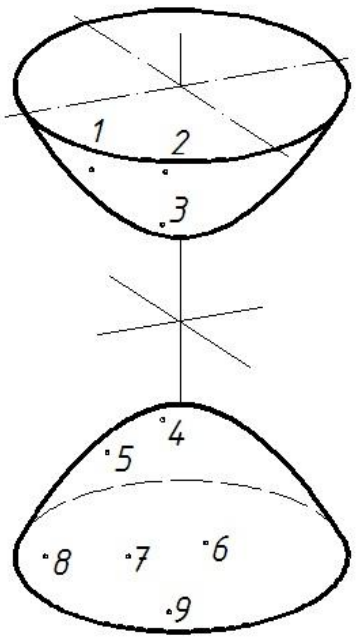
1. 86-rasmda ko'rsatilgan misol bilan taqqoslaganda, sfera bo'linmasini gorizontal proektsiyasida kvadrat katakchalari bo'lgan oddiy panjarada diskret nuqta karkasi orqali ko’rsatilsin.
2. To'g'ri doiraviy konusning sirt qismining teng bo’laklarga bo’linishini mumkin bo'lgan variantlarini taklif eting.
3. Sfera qismining misolidan foydalanib, diskret nuqta karkasi bilan ifodalangan sirt nuqtasida urinma tekislikning qurilishi taxminiy ekanligini va aniq yechim bilan taqqoslaganda xatoligini ko'rsating.

9. DISKRET KARKASLARNING INTERPOLYATSIYASI VA MURAKKAB SIRTLARNI QURISH

Sirtni diskret karkas orqali ko'rsatish uni aniqlashning usuli emas, chunki u karkas elementlari orqali o'tadigan bitta sirtni aniqlamaydi. Ixtiyoriy nuqtaning berilgan proyeksiyasidan kelib chiqib, nuqtani sirtning o’zida qurish mumkin emas.

Texnik shakllarni loyihalash amaliyotida sirtni uning diskret karkasidan tiklash muammosi ko'pincha paydo bo'ladi. Masalan, samolyot, kema korpusi yoki avtomobil korpusini loyihalashda sirt avval chiziqlar yoki nuqtalarning diskret to'plami bilan ifodalanadi, so'ngra bu karkas silliq sirtga o'raladi.

Sirt o'zining diskret karkasidan interpolyatsiya usulida qayta tiklanadi. Kam nuqtalar orqali berilgan karkas elementlari bilan sirtni qurish mumkin, uning parametrik soni berilgan karkas elementlariga to'g'ri keladi. Masalan, bitta ikkinchi tartibli sirtni to'qqizta nuqta orqali ularning nisbiy holatiga ma'lum cheklovlar qo'yilishi mumkin. Bunday holda, har bir nuqtadan o'tgan sirt holati bitta sirt parametrini bog'laydi. Proektsion geometriyada bunday sirtlarni qurish usullari ko'rib chiqiladi, ammo olingan natija har doim ham amaliyot uchun maqbul emas. 91-rasmda bitta ikkinchi tartibli sirt to'qqiz nuqta - ikki pallali giperboloid orqali chizilgan holatni ko'rsatadi. Biroq, amaliy yechimlar uchun bunday yechim qabul qilinishi mumkin emas, chunki bu sirtdan bitta bo'lakni kesib bo'lmaydi. Diskret karkasning berilgan elementlari orasidagi intervalda sirt qanday o’tishini oldindan taxmin qilish deyarli mumkin emas. Diskret karkas elementlari sonining ko'payishi bilan sirtning parametrli soni ham ko'payishi kerak va natijada uning tartibini oshirishi kerak, bu esa masalalarni hal qilishni juda qiyinlashtiradi.

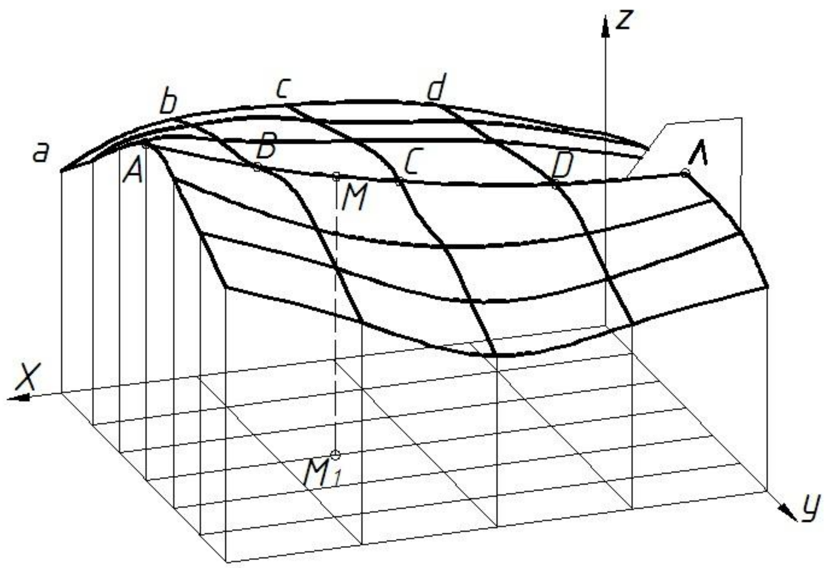


91-rasm.

Amalda qisman interpolatsiya usullari qo'llaniladi, buning natijasida murakkab sirt bir tekis yoki bir nechta oddiy sirt bo'laklaridan olinadi.

9.1. DISKRET CHIZIQLI KARKASNING INTERPOLATSIYASI

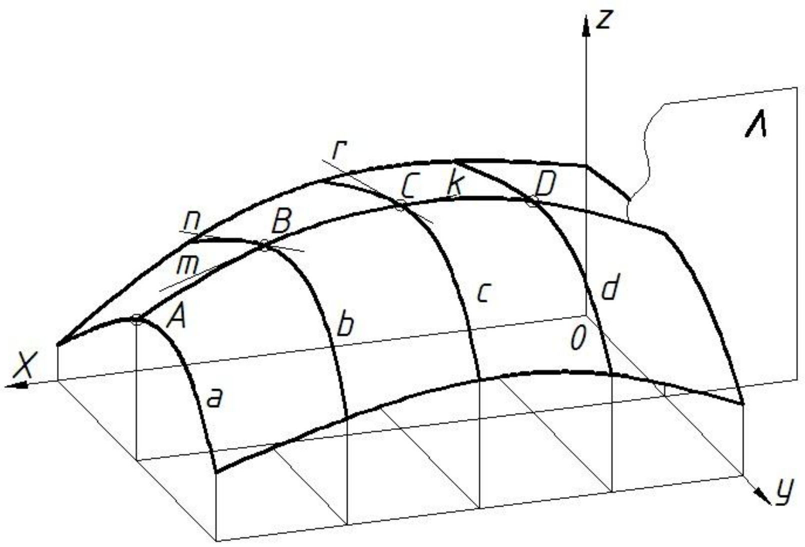
Diskret chiziqlar to'plamining interpolyatsiyasi belgilangan chiziqlarni kesib o'tuvchi va bo'laklarini birlashtirish uchun belgilangan shartlarga javob beradigan chiziqlarning uzluksiz qismlarini belgilashdan iborat. Sirt aniqlashni soddalashtirish uchun sirtning uzluksiz karkasining chiziqlari proektsion tekisliklar to'plamida quriladi (92-rasm). Har bir yordamchi tekisligi berilgan *a*, *b*, *c* va *d* chiziqlarni kesib o'tadi. *A, B, C, D* nuqtalarda *ABCD* chiziqlari oddiy chiziqlar qismlaridan iborat chiziqlar hosil bo’ladi. Chiziqning tarkibiy qismlarining turi belgilangan talablaridan kelib chiqqan holda aniqlanadi. Masalan, sirt bo'laklari silliq birlashtirilmagan holda, sirtning uzluksiz karkasining har bir chizig'ini tekislikdagi chiziqning ikkita parametrini bog'laydigan qo'shni nuqtalardan o'tishi shartlarini bajarish kifoya. Shuning uchun, sirtning har bir qismining karkasi ikkita parametrli tekis chiziqlardan iborat bo'lishi kerak, ya'ni. to'g'ri chiziqlardan. Murakkab sirt qismlarini silliq birlashishi bilan ularning karkasi chiziqlarini silliq birlashtirilishini ta'minlash kerak. Buning uchun karkas chiziqlarini birlashtiruvchi *A*, *B*, *C* va *D* nuqtalar o'rnatiladi, ular karkasning tekis chizig'ining to'rtta parametrlarini birlashtiradi (ikkita parametr karkas chizig'ini juft nuqta orqali o'tishi sharti bilan, ikkitasi esa - berilgan urinmalarga tegishli bo’lishi bilan). Shuning uchun, sirt qismlarini silliq birlashishi bilan ularning doimiy karkasining chiziqlari to'rtta parametrli tekislik egri chiziqlari bo'lishi kerak. Ma'lumki, bu egri chiziqlarning eng oddiy to’plami ikkinchi tartibli paraboladir.



92-rasm.

Karkasli sirtni birikma bilan qurishning eng oddiy usuli - bu diskret chiziqli karkasni silindroidlar bilan interpolatsiya qilishdir. 92-rasmda profil tekisliklarida joylashgan *a*, *b*, *c* va *d* egri chiziqlarning diskret karkasi ko’rsatilgan. Har bir qo'shni chiziqlari juftligi (masalan, *b* va *c*) silindr determinantining egri elementlari sifatida qabul qilinadi. Barcha silindroidlar uchun parallellik tekisligi frontal tekisligini belgilash orqali ularning chiziqli karkasini yasash mumkin. Olingan sirt, berilgan *b* va *c* chiziqlar bo'ylab bir-biriga bog'langan silindroidlarning qismlaridan iborat.

M_1 gorizontal proektsiyasi orqali sirtda *M* nuqta qurish uchun $П_1$ parallellik tekisligiga parallel ravishda Л tekislik chizish, uning *B* va *C* kesishish nuqtalarini *b* va *c* chiziqlar bilan aniqlash va M_1 nuqtadan $П_1$ ga perpendikulyarni tiklash, u kerakli bo'lakda *BC* kesma bilan kesishguncha davom ettiriladi va *M* nuqta aniqlanadi.



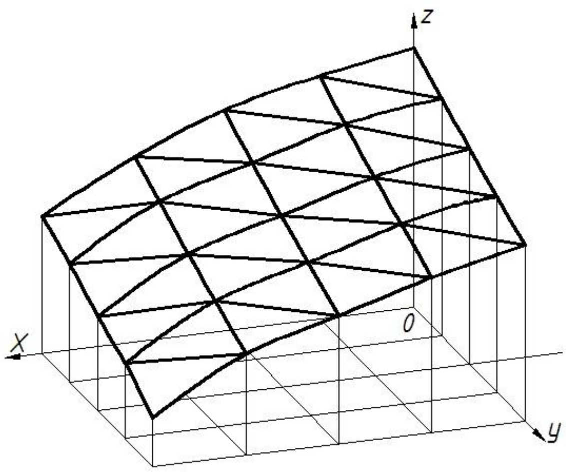
93-rasm.

Ulanish qismlarining silliq birlashishi qo'shma chiziqning har bir nuqtasida ikkala sirt qismlari bitta umumiy urinma tekislik bo'lganda ta'minlanadi (93-rasm). *B* chiziqning ixtiyoriy *B* nuqtasidagi bunday urinma tekisligi ikkita to'g'ri chiziq - *b* chiziqqa *n* urinma chiziq orqali va *m* urinma chiziq sirtning izlangan chizig'i bilan beriladi. Agar urinma *n* holati egri chiziq *b* bilan aniqlansa, *m* urinma holati oldindan ma'lum emas va *B* nuqta chiziq bo'ylab harakatlanayotganda karkasning izlanayotgan chizig'i parametrlari o'zgarishini uzluksizligini ta'minlashi kerak. Ushbu shart *m* urinma holati parametrlari *m* va *a* va *c* egri chiziqlari parametrlari o'rtasida o'zaro bog'liqlikni o'rnatish orqali amalga oshiriladi.

$П_2$ ga parallel bo'lgan Л tekislik *a, b, c* egri chiziqlarini mos ravishda *A, B, C* nuqtalarida kesib o'tadi. Tegishli *m* chiziq *AC* chiziq kesmasiga parallel ravishda B nuqta orqali Л tekislikda o'tkaziladi. Xuddi shunday, *C* nuqtada, *BD* kesmada parallel ravishda urinma hosil qiladi. Murakkab sirtning uzluksiz karkasining qismli chizig'i tekislikdagi nuqtalarni qisman interpolyatsiya qilish usuli bilan aniqlanadi (6-bo'limga qarang).

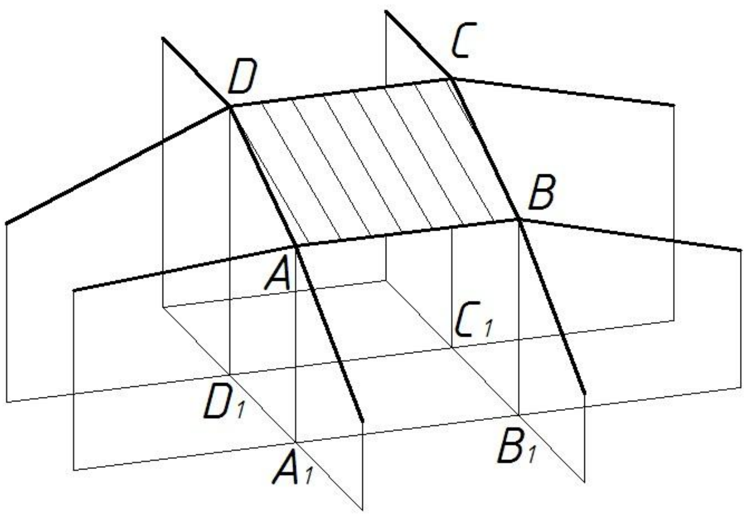
9.2. DISKRET NUQTA KARKASINI INTERPOLATSIYA QILISH

Amaliy muhandislik masalalarini hal qilishda sirtning nuqta karkasi ko'pincha gorizontal proektsiyada to'rtburchak bo'lgan to’r yordamida o'rnatiladi. Diskret karkas qismlarini birlashtirish interpolatsiya qilishning eng oddiy usullari bu giperbolik paraboloidlar va uchburchakli interpolyatsiya qilishdir. Diskret karkasning uchlari bo'ylab uchburchak katakchalari bo'lgan diskret to’r quriladi (94-rasm). Har bir yacheykaning yon tomonlari bilan chegaralangan tekislikning bir qismini belgilaydi. Uchburchak yuzli ko'p qirrali sirt hosil bo’ladi.



94-rasm

Giperbolik paraboloidlar bilan diskret nuqta karkasini interpolatsiya qilishda avval to'rtburchakli yacheykalar bilan to’r quriladi, so'ngra har bir katak giperbolik paraboloid sirtining bir bo'lagi bilan to'ldiriladi (95-rasm). Yacheykaning qarama-qarshi tomonlarini kesib o'tishning giperbolik paraboloid karkasi chiziqlarining parallellizm tekisligini aniqlaydi. 95-rasmda sirt karkasini qurish uchun gorizontal proyeksiyalovchi parallellizm tekisligi A_1ADD_1 tanlangan.



95-rasm

Qismlarni silliq birlashtirilishi bilan murakkab sirtni qurish ikki bosqichda amalga oshiriladi. Birinchi bosqichda sirtning diskret nuqta karkasidan uning chiziqli diskret karkasiga o'tish tekislikdagi nuqtalarni bo'lakcha interpolyatsiya qilish usullari bilan amalga oshiriladi (6-bobga qarang). Ikkinchi bosqichda, sirtning qurilgan diskret chiziqli karkasi interpolyatsiya qilinadi (93-rasmga qarang),

MASHQLAR

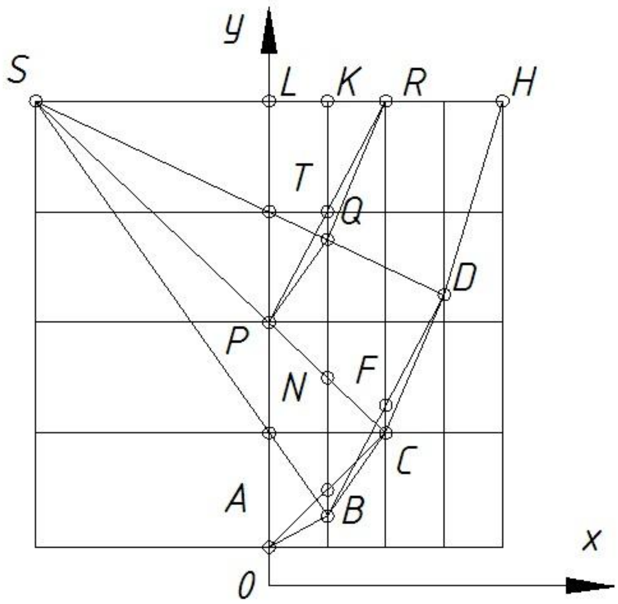
1. Diskret chiziqli karkasni silindroidlar bilan interpolyatsiya qilishda murakkab sirt karkasining uchta parametrlarini bog'laydigan shartlarni aniqlang.
2. Diskret nuqta karkasini giperbolik paraboloidlar bilan interpolyatsiya qilishda murakkab sirt karkasining to'g'ri chiziqlarining uchta parametrini bog'laydigan shartlarni aniqlang.
3. Diskret nuqta karkasining tekisliklari (uchburchagi) bilan interpolyatsiya paytida tekislikning uchta parametrini bog'laydigan shartlarni aniqlang.
4. Tekis bo'laklarning silliq birlashishi bilan diskret chiziqli karkasni interpolyatsiya qilishda sirtning uzluksiz karkasining tekis chiziqlarining nechta parametri ulanadi?

10. EGRI CHIZIQLAR VA SIRTLARNI DISKRET SHAKLDA BELGILASH

Ko’pgina arxitektura va me'morchilikda uchraydigan murakkab sirtlar asosan statik xususiyatlari bilan belgilanishi kerak. Masalan, tent sirti o’ziga xos cho’zilgan qoplama shaklini hosil qiladi va pnevmatik konstruktsiyalar ortiqcha bosim kuchlari ta'sirida hosil bo'ladi, ular materialning tarangligi bilan qoplanadi. Bunday sirtni karkas-parametrik yoki kinematik usul bilan hosil qilib bo’lmaydi, chunki uning geometrik determinantini aniqlash mumkin emas. Ko'pgina hollarda, bunday sirtning analitik tavsifini tenglama shaklida olish ham mumkin emas.

Bunday hollarda, sirt ko'rinishini ba'zi qonuniyatlar bilan belgilanadigan diskret karkas orqali ifodalanadi. Bu holda rekurrent formula ishlatiladi, ya’ni sirtni nuqtalar ketma-ketligini bog’lovchi formula. Misol tariqasida arifmetik progresiyani keltirish mumkin. Bu yerda har bir a'zosini qiymati oldingi ikki a'zoning qiymatlaridan kelib chiqadi.

Ma'lumki, vertikal nagruzka gorizontal o'qi bo'ylab teng ravishda taqsimlanganda, ikkinchi tartibli parabola bo'ylab chizilgan arka eng barqaror bo'ladi. Amaliyot uchun yetarlicha aniqlikka ega kvadrat parabola o'z og'irligi ostida osilib, ikki uchi bilan mahkamlangan ipning shaklini takrorlaydi. Ikkinchi tartibli parabolaning bu xususiyatlarini *Ox* o'qi bo'ylab muntazam qadam tashlagan nuqtalarning diskret qatori sifatida belgilash orqali aniq kuzatish mumkin (96-rasm).



96-rasm

Ushbu nuqtalarning ordinatalari orasidagi bog'liqlikni aniqlaylik. *AL* va *LH* kesmalari bir xil miqdordagi teng qismlarga bo'linadi va raqamlanadi. *S* nuqtasi va *AL* kesmaning bo'linmalari *Oy* o'qiga parallel ravishda *LH* kesmaning bo'linmalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar bilan kesishguncha o’tkaziladi.

A, *B* va *C* nuqtalarning ordinatalari orasidagi bog'liqlikni tuzamiz.

$$y_E = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$y_B = y_E - BE$$

keyin

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} - BE$$

yoki

$$y_A - 2y_B + y_C - 2BE = 0$$

B, *C* va *D* nuqtalarga o'xshash bog'liqlikni hosil qilamiz

$$y_B - 2y_C + y_D - 2FC = 0.$$

Agar bu tenglamalarda $BE = FC = t$ bo'lsa, ketma-ket parabolada joylashgan har qanday uchta nuqta uchun umumlashtirilgan bog'liqlikni yozish mumkin:

$$y_{i-1} - 2y + y_{i+1} - 2t = 0 \qquad (30)$$

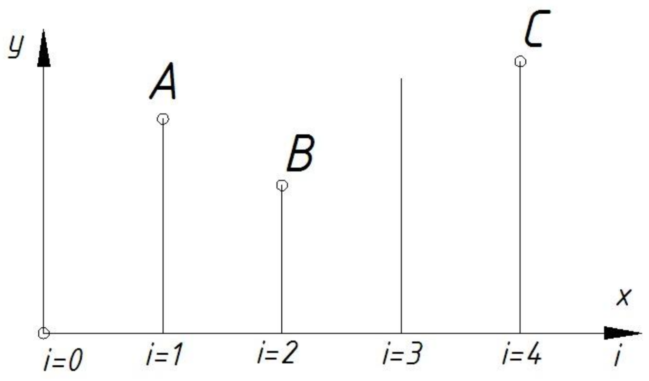
Bir tomondan, $BE=QT$. Bu $KT=NE$ va $KQ=NB$ kesmalarining tengligidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham

$$KT = \frac{LP}{2} \text{ и } NE = \frac{PA}{2}$$

lekin $LP=PA$, shuning uchun *K* kesmani teng qismlarga bo'linishi natijasida $KT=NE$ $KQ=NB$ markazini *S* bo'lgan chiziqlar to'plami bilan ajratish natijasida, boshqa tomondan, *QT* va *CF* kesmalari bir-biriga teng, ya'ni *PRQ* va *BDC* uchburchaklar medianalari sifatida tengdir. Shuning uchun $BE=FC$.

Parabola nuqtalarini aniqlash uchun, chiziqli tenglamalar tizimini tuzish va yechish kifoyadir, (30) formuladan foydalanib.

Oy o'qiga parallel o'qi bo'lgan parabola qurish uchun uchta parametrni belgilash kerak, masalan, uchta *A*, *B* va *C* nuqtalardan o'tgan parabola holatiga to'g'ri keladi (97-rasm).



97-rasm

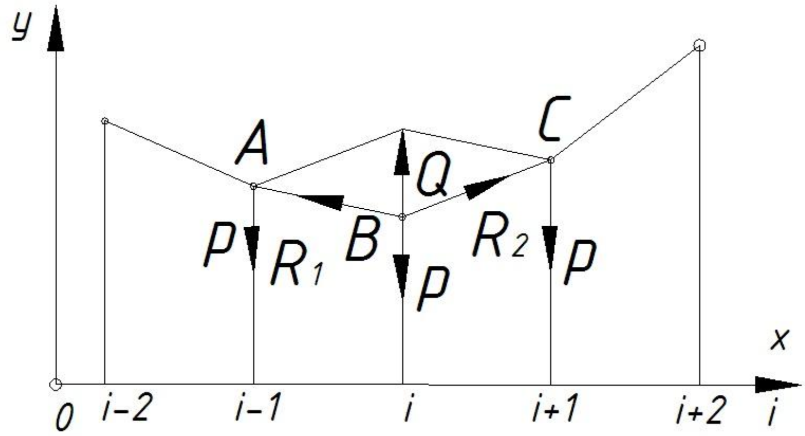
Endi ikkita tenglama tuzmiz:

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 - 2t = 0 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 - 2t = 0 \end{cases}$$

bu yerda y_3 , t noma'lum.
Ushbu tizimni yechimi quyidagicha:

$$y_3 = \frac{-y_1 + 3y_2 + y_4}{3}$$

$$t = \frac{2y_1 - 3y_2 + y_4}{6}$$



98-rasm.

(30) formuladagi nisbatlarni boshqa usulda xam yaratish mumkin (98-rasm). Ma’lum bir interval oralig'ida berilgan nuqtalarga ba’zi og'irliklar osilgan ipga biriktiriladi, uning ta'siri ostida ip siniq chiziq shaklini oladi. *P* kuchlari ta'sirida ipda *R* kuchlari paydo bo'ladi, biz ularni shartli ravishda kesma uzunliklari bilan mutanosib deb hisoblaymiz. Keyin har bir nuqta (masalan, *B*) muvozanatda bo'ladi, agar koordinata o'qlaridagi harakatlar proektsiyalari yig'indisi nolga teng bo'lsa yoki *P* kuchi R_1 va R_2 sa'y-harakatlarining *Q* natijasiga teng bo'lsa.

$$R_1+R_2+P=0$$

Ox o'qi bo'yicha harakatlarning proektsiyalari yig'indisi nolga teng, chunki *P* kuchi bir nuqtaga proyeksiyalanadi va proyeksiya yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan R_1 va R_2 kuchlari qadamning barqarorligi tufayli kattaligi bo'yicha tengdir. *Oy* o'qi bo'yicha harakatlarning proektsiyalari yig'indisini tenglama shaklida yozamiz.

$$k(y_A-y_B)+k(y_C-y_B)-P=0$$

bu yerda k - kesma uzunligi va kuch vektori o'rtasidagi mutanosiblik koeffitsienti.

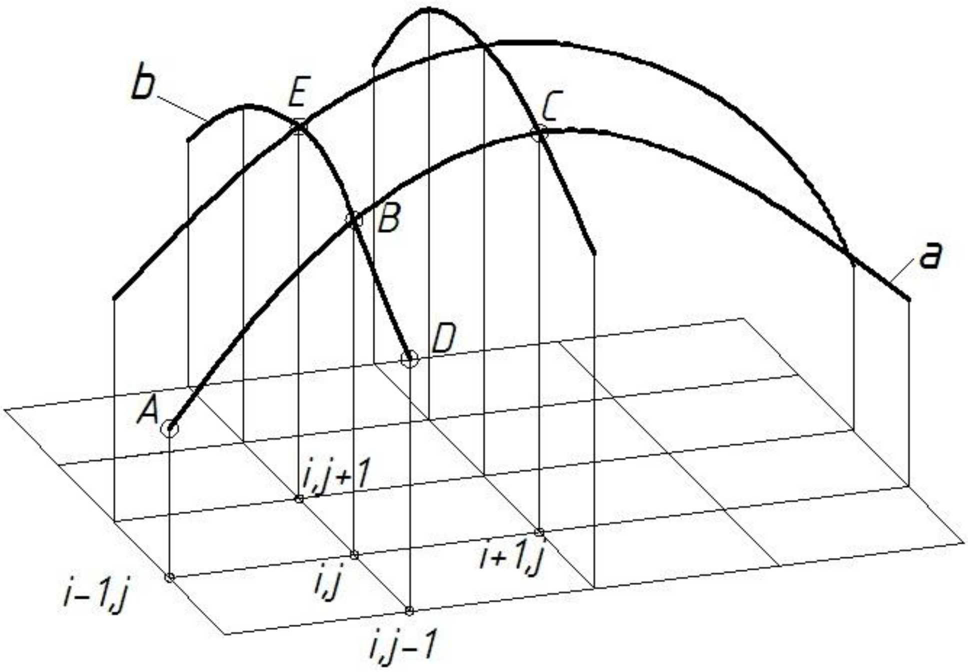
Ushbu tenglamani quyidagicha yozamiz

$$y_A - 2y_B + y_C - \frac{P}{k} = 0$$

Doimiy $\frac{P}{k}$ ni $2t$ ga almashtirib, (30) formulaga kelamiz.

Endi elliptik paraboloidni ko'chish sirti sifatida ko'rib chiqamiz (99-rasm).

Bu yerda parabola ikkinchi parabola bo'ylab siljiydi.



99-rasm.

Har qanday uchta teng qadam bilan ketma-ket joylashgan A, B, C nuqta ***a*** yasovchida joylashganligi uchun (30) formula amal qiladi. Xuddi shu formula boshqa har qanday yasovchida bir xil qadam bilan joylashgan uchta nuqta uchun ham amal qiladi, chunki barcha yasovchilar parallel ko'chishda bir-biriga kongruent.

$$Z_{i-1}-2z_i+z_{i+1}-2t=0$$

Xuddi shu tarzda, ketma-ket uchta har qanday D, B va E nuqtalar uchun b yo'naltiruvchisida doimiy qadam bilan joylashgan quyidagi formula amal qiladi:

$$z_{j-1}-2z_j+z_{j+1}-2s=0$$

Ushbu ikkita formulani qo’shib olsak, biz yangi formulani hosil qilamiz, bu yerda paraboloidning har qanday beshta qo'shni nuqtasi uchun amal qiladi: (paraboloid gorizontal proektsiyasi kvadrat bo’lishi kerak).

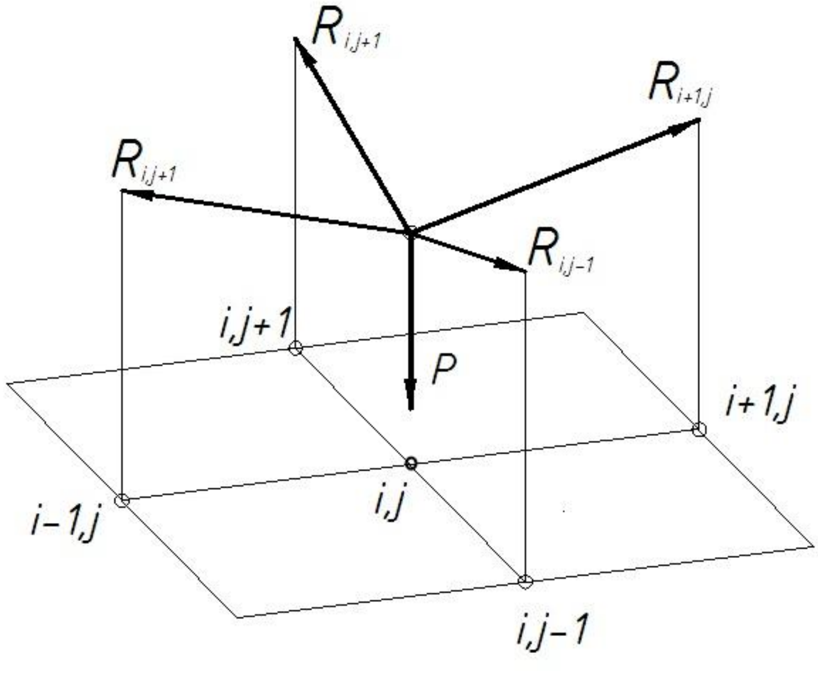
$$z_{i-1,j}+z_{i+1,j}+z_{i,j-1}+z_{i,j+1}-4z_{i,j}=2(s+t) \qquad (31)$$

Berilgan har qanday beshta *A, B, C, D* va *E* nuqtalar uchun *2(s+t)* qiymat doimiydir.

(31) formula xuddi (30) formula kabi, statik talqinga ega. Gorizontal proektsiyasi to’r tarzida, ya’ni kvadrat orqali berilgan elliptik paraboloid sirtining nuqtalari tugunlarga biriktirilgan teng og'irlikdagi yuklamalar ta'sirida osilgan fazoviy to’rni hosil qiladi:

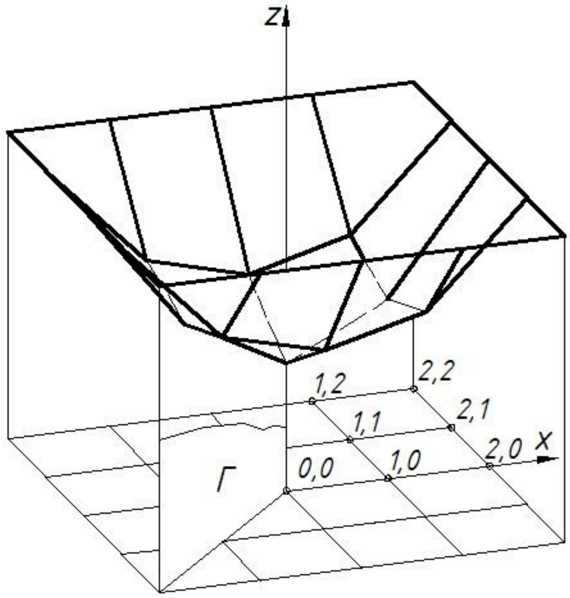
$$z_{i-1,j}+z_{i+1,j}+z_{i,j-1}+z_{i,j+1}-4z_{i,j}=\frac{P}{k} \qquad (32)$$

bu yerda *P* - vaznning og'irligi; *k*-ulanish kuchi va uning uzunligi o'rtasidagi mutanosiblik koeffitsienti (100-rasm).



100-rasm.

Formula (32), elliptik paraboloid asosida olingan bo'lib, butun sirtni tavsiflamaydi, lekin gorizontal proektsiyasidagi ustidagi har beshta nuqtaning applikatalarini birlashtiradi. Shuning uchun, u har qanday sirt yuzasini modellashtirish uchun ishlatilishi mumkin. Masalan, kvadrat shakliga ega bo'lgan ixtiyoriy konturidagi sirtning nuqta karkasini aniqlash uchun (101-rasm), bu yerda konturining nuqtalarini belgilab, noma'lum bo'lgan barcha applikatalar uchun tenglamalar tizimini (32) tuzish kifoya.



101-rasm.

Yo'naltiruvchi kontur *xOz*, *yOz* tekisliklari va *Γ* diagonal tekisligiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $z_{1,0}=z_{0,1}=z_{-1,0}=z_{0,-1}$, $z_{1,1}=z_{-1,-1}=z_{1,-1}=z_{-1,1}$ va (32) formulani faqat sirtni 1/8 qismiga, ya'ni *0,0; 1.0; 1.1* nuqtalar uchun yozish kifoya;

$$
\begin{aligned}
z_{-1,0}+z_{1,0}+z_{0,-1}+z_{0,1}-4z_{0,0}-\frac{P}{k}&=0\\
z_{0,0}+z_{2,0}+z_{1,-1}+z_{1,1}-4z_{1,0}-\frac{P}{k}&=0\\
z_{0,1}+z_{2,1}+z_{1,0}+z_{1,2}-4z_{1,1}-\frac{P}{k}&=0
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

Ushbu tenglamalar tizimidagi simmetrik nuqtalarning applikatalarini almashtirish va berilgan nuqtalar qiymatlarini almashtirish orqali biz uchta noma'lumga ega bo'lgan uchta tenglamani olamiz. Yo'naltiruvchi kontur nuqtalarining applikatalari berilsa, $z_{2,0}=z_{2,1}=z_{1,2}=4$

(33) tenglamalar tizimi quyidagicha yoziladi.

$$4z_{1,0}-4z_{0,0}-\frac{P}{k}=0;$$

$$4+2z_{1,1}+z_{0,0}-4z_{1,0}\ -\frac{P}{k}=0;$$

$$8+2z_{1,0}-4z_{1,1}\ -\frac{P}{k}=0;$$

bu yerda $z_{0,0}$, $z_{1,0}$,$z_{1,1}$- ma'lum bir $\frac{P}{k}$ berilgan yuklamaga noma'lum parametrlar.

Agar bitta parametrni belgilasa, masalan $z_{0,0}=2$, bo'lsa va $\frac{P}{k}$ yuklama noma'lum deb hisoblansa, noma'lumlar soni o'zgarmaydi. U holda tizimning yechimi $z_{1,0}$ =2,444; $z_{1,1}$ =2,778 natija beradi.

Sirtlar nazariyasidan ma’lumki, qat'iylikka erishish uchun karkas konturiga bog'langan va muzlangan matoni biriktirib, eng barqaror shaklni topish mumkin. Teskari holatda, bunday muzlatilgan mato barqarorlik nuqtai nazaridan sirtning ideal shaklini beradi, chunki aylantirish paytida barcha harakatlar o'z qiymatini saqlab qoladi, ammo belgisini teskari ishoraga o'zgartiradi. Ko'rib chiqilgan misol sirt to’rini modelidir. Uning nuqta karkasini hosil qilish uchun (32) formula tenglamalarni yechish kifoya, chunki barcha ishoralar qarama-qarshi ishoralar bilan almashtirilganda, tenglama o'zgarmaydi.

Agar $\frac{P}{k} = 0$ bo'lsa, uning vazni ostida osilishini hisobga olmasdan, ma'lum bir kontur bo'ylab cho'zilgan sovun plyonka turining minimal sirt nuqta karkasi olinadi.

Arxitekturada ko’pgina sirtlarni shakllantirishning amaliy masalalarni hal qilishda, qoplangan sirt ko'rib chiqilgan misollar bilan taqqoslaganda ancha ko’p nuqtalar orqali belgilanadi. Nuqta karkasining koordinatalarini aniqlash uchun katta chiziqli tenglamalar tizimini echish kerak. Buni kompyuterda asosiy kompyuter dasturiga kiritilgan maxsus ishlab chiqilgan standart dasturlardan foydalangan holda amalga oshirish maqsadga muvofiqdir.

MASHQLAR

1. Berilgan ikkita nuqtadan o'tgan parabolaning uchta oraliq nuqtasini qurish uchun uchta chiziqli tenglamalar tizimini tuzing.

2. Parabolaning qo'shni bo'lmagan uchta nuqtadan o'tuvchi ikkita oraliq nuqtasini qurish uchun ikkita chiziqli tenglamalar tizimini yarating (birinchi navbatda siz uchta tenglama tuzishingiz kerak, so'ngra $\frac{P}{k}$ parametrlarini hisobga olmaganda ikkitasiga o'ting.

3. To'rtta katakchalardan iborat to’rning $M(x_M=4;\ y_M=1)$ nuqtaning applikatasini berilgan nuqtalarning koordinatalariga ko’ra aniqlang.

$A(x_A=0;\ y_A=1;\ z_A=0),\ B(x_B=1;\ y_B=2;\ z_B=1),$
$C(x_C=2;\ y_C=1;\ z_C=2),\ D(x_D=1;\ y_D=0;\ z_D=0)$
agar $\frac{P}{k} = 0$

11. GEOMETRIK QAYTA TUZISHLAR.

Ta’rif. Geometrik qayta tuzishlar deb, geometrik figuralarni bir tekislikdan ikkinchi tekislikka ma’lum berilgan qoida bo’yicha yasashlar aytiladi.

Geometrik qayta tuzishlar yordamida ko’pgina muhandislik masalalari yechiladi. Ushbu bo’limda korrelativ qayta tuzishlarni ko’rib chiqamiz.

Agar ikkita tekislik P_1 va P_2 lar berilgan bo’lsa, va ularning har bittasida dekart koordinatalar tizimi o’rnatilgan bo’lsin. Quyidagi qayta tuzishni o’rnatamiz. Quyidagi tenglamalar berilgan deb qabul qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} = f(x,y), \bar{y} = \varphi(x,y), \bar{R} = \psi(x,y),\\ (\bar{X}-\bar{x})^2 + (\bar{Y}-\bar{y})^2 = \bar{R}^2\end{array}\right\}, \qquad (1)$$

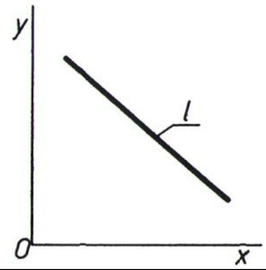
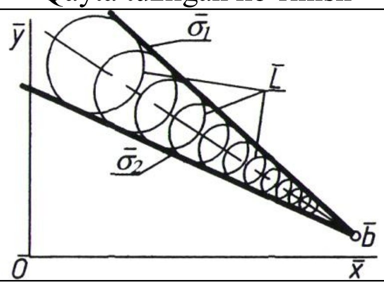
bu yerda *x, y* – P_1 tekislikdagi nuqta koordinatalari ;
$\bar{x}, \bar{y}$ - P_2 tekislikdagi aylana markazining ;
$\bar{R}$ - P_2 tekislikdagi aylana radiusi;
$\bar{X}, \bar{Y}$ - aylana nuqtalarining koordinatalari *;*
f, φ, ψ - uzluksiz algebraik funksiyalar.

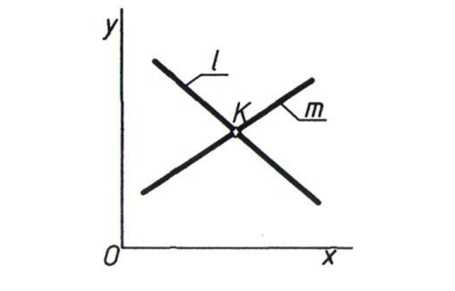
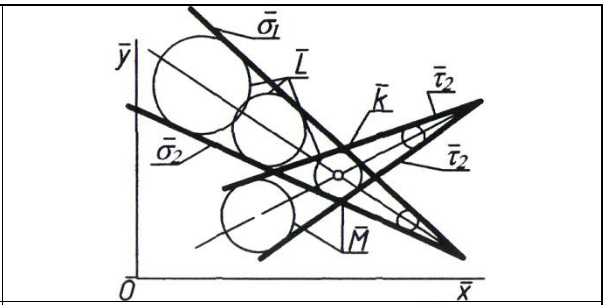
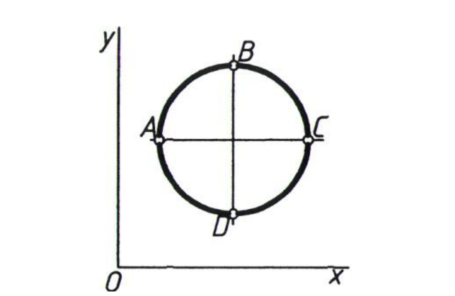
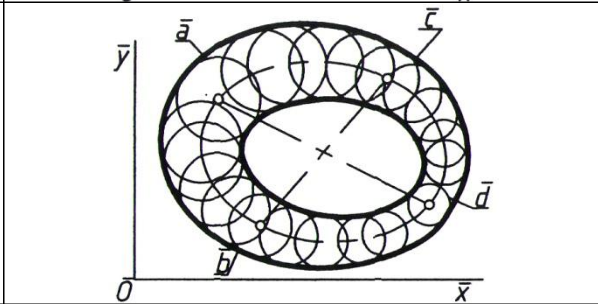
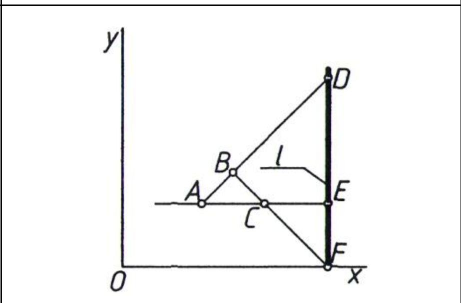
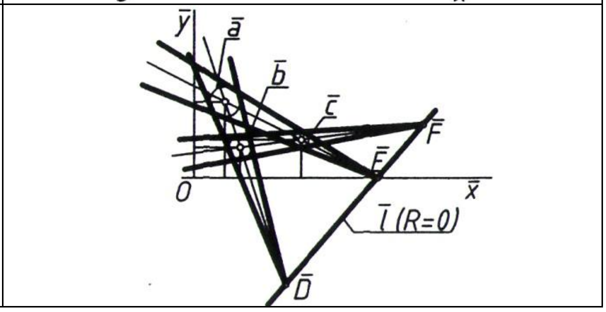
Ushbu tenglamalar yordamida xar bir P_1 tekislikdagi nuqta P_2 tekislikdagi aylanaga mos keladi. Bu yerda f, φ, ψ -funksiyalarga ko’ra xilma – xil korrelativ qayta tuzishlarni hosil qilish mumkin. Quyidagi tenglamalar orqali korrelativ tuzishlarni ko’rib chiqamiz:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}\\ \bar{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}\\ \bar{R} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}\\ (\bar{X}-\bar{x})^2 + (\bar{Y}-\bar{y})^2 = \bar{R}^2 (\bar{R} > 0)\end{array}\right\} \qquad (2)$$

bu yerda $a_{11}...a_{33}$ – doimiy koeffitsientlar.
Birinchi jadvalda ushbu korrelativ qayta tuzishning xossalari ko’rsatilgan.

1-jadval. Korrelativ qayta tuzishning xossalari

Asl ko’rinish		Qayta tuzilgan ko’rinish
To’g’ri chiziq		

Kesishuvchi to’g’ri chiziqlar		
Ikkinchi tartibli to’g’ri chiziq		
To’g’ri chiziq $l \leftrightarrow \bar{l}$ ***(R=0)***		

Jadvaldagi ko’rsatilgan xossalarni 6 ta turi quyidagicha:

1. Korrelativ qayta tuzish bir qiymatli moslikka ega bo’ladi, agar P_1 tekislikda bir chiziqda yotmagan *A, B, C* nuqtalar berilgan bo’lsa, va P_2 tekislikda uchta aylana aniqlangan bo’lsa.

2. P_1 tekislikda joylashgan ***l*** to’g’ri chiziqqa P_2 tekislikda aylanalar to’plami mos keladi va ularning markazlari bitta to’g’ri chiziqda joylashgan bo’lib, bu aylanalar ikkita umumiy urinmaga ega.

3. P_1 tekislikdagi ikkita kesishuvchi to’g’ri chiziqqa ikkita o’zaro kesishivchi aylanalar to’plami P_2 tekislikda mos keladi.

4. P_1 tekislikdagi ikkinchi tartibli egri chiziqqa P_2 tekislikda aylanalar to’plami mos keladi va aylanalar markazi ikkinchi tartibli egri chiziqda joylashgan.

5. Agar P_1 tekislikda uchta *A,B,C* nuqtalar bitta to’g’ri chiziqda joylashgan bo’lib, bularga P_2 tekislikda uchta aylana mos kelib, ularning markazi xam bitta to’g’ri chiziqda joylashadi. Shu bilan bir paytda quyidagi shart bajariladi:

$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|\bar{A}\bar{C}|}{|\bar{B}\bar{C}|}$, bu yerda A,B,C – P_1 tekislikdagi nuqtalar; $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ - aylana markazlari.

6. Korrelativ qayta tuzishda P_2 tekislikdagi aylanalarga o’tkazilgan ikkita urinma kesishgan nuqtalari bitta to’g’ri chiziqda joylashadi. Bundan kelib chiqadi P_1 tekislikda shunday to’g’ri chiziq mavjud, unga P_2 tekislikda xam to’g’ri chiziq mos keladi, ya’ni radiusi 0 ga teng bo’lgan aylanalar markazlari.

Umumiy holda korrelativ qayta tuzishlarda xilma – xil funktsiyalar qo’llanilishi mumkin. Dekart tizimida quyidagi ikkinchi tartibli tenglamalarni qo’llash mumkin:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\\&\bar{y}=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\\&\bar{R}=a_{31}x^2+a_{32}y^2+2a_{33}xy+2a_{34}xy+2a_{35}xy+a_{36},\\&(\bar{X}-\bar{x})^2+(\bar{Y}-\bar{y})^2=\bar{R}^2(\bar{R}>0)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

bu yerda $a_{11}...a_{36}$ – doimiy koeffitsiyenlar.

Darxaqiqat P_1 tekislikda berilgan *A (x,y)* nuqtaga P_2 tekislikda mos aylananing markazi va radiusi aniqlanadi. Ko'rib chiqilgan korrelativ qayta tuzishlar geometric va muhandislik masalalarida ko'p ishlatiladi. Quyidagi misolni ko'rib chiqamiz.

Agar P_1 tekislikda aylana berilgan bo'lsa

$$x^2+y^2=49\qquad(11)$$

bu yerda *x,y* – P_1tekislikdagi nuqtalar koordinatalari va quyidagi korrelativ qayta tuzish tenglamalari

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=x,\\&\bar{y}=y,\\&\bar{R}=0,4y+0,2,\\&(\bar{X}-\bar{x})^2+(\bar{Y}-\bar{y})^2=\bar{R}^2\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

3-rasmda (12) tenglamalarga oid topilgan aylanalar to'plami ko'rsatilgan.

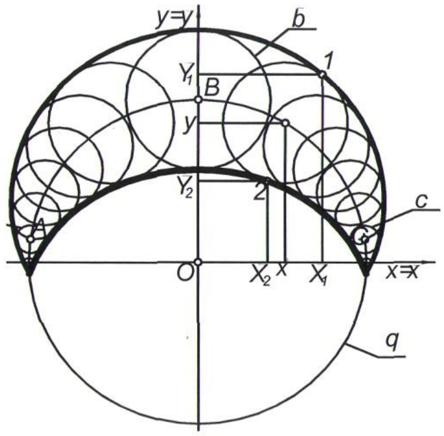
Agar (11) va (12) tenglamalarni quyidagi tenglamalarga kiritsak,

$$\left.\begin{aligned}&(\bar{X}-\bar{x})^2+(\bar{Y}-\omega(x))^2-\left(a_1x+a_2\omega(x)+a_3\right)^2=0,\\&\bar{X}-x-(\bar{Y}-\omega(x))\left(\omega'(x)+\left(a_1x+a_2\omega(x)+a_3\right)\left(a_1+a_2\omega'(x)\right)=0\right)\end{aligned}\right\}$$

boshqa bir tizimga kelamiz:

$$\left.\begin{aligned}&(\bar{X}-\bar{x})^2+(\bar{Y}-y)^2-(0,4y+0,2)^2=0\\&\frac{x(\bar{Y}-y)}{y}-\bar{x}+0,84x-0,08=0\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Bu yerda (3-rasm)da ko'rsatilganidek, aylanalar to'plamining uranma egri chizig'i kelib chiqadi.



3-rasm

Ko'pgina muhandislik masalalar geometrik modellashtirish usuli yordamida yechiladi. Yuqorida ko'rsatilgan korrelativ qayta tuzish xar bir muayyan masalada xilma – xil variantlarda qo'llanilishi mumkin.

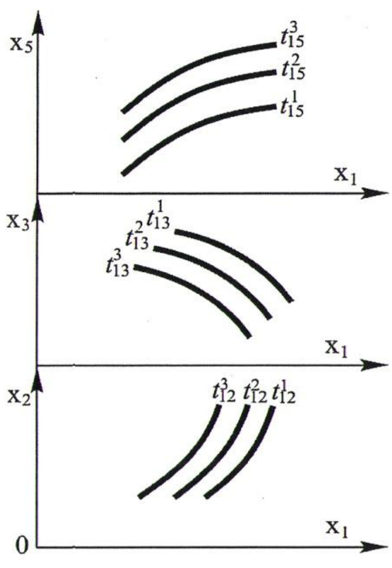
Xuddi shunday geometrik modellashtirishning yana bir keng tarqalgan usullaridan biri – bu nomogrammalar tuzishdir. Bu usulning mohiyati quyidagicha:

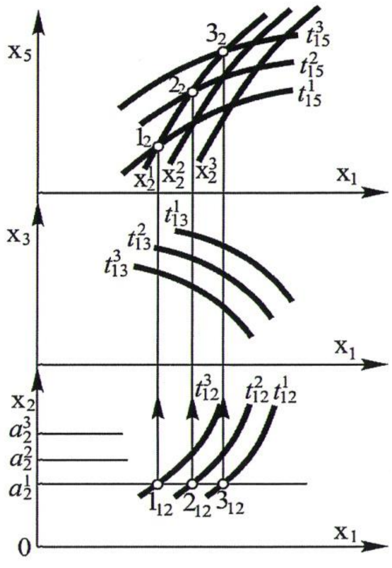
1. Agar kompleks chizmada to'rt komponentli material xossalari berilgan bo'lib, uning karkas sirti chizilgan bo'lsin (1-rasm). Bu yerda X_5 – topilayotgan (kerak bo'lgan) xossa, X_1, X_2, X_3, t – berilgan (ma'lum) xossalalar. Nomogrammada ushbu xossalalarni (berilgan va topilayotgan) nomogrammasi chizilishi kerak.

2. Nomogrammaning ($\mathbf{X}_2^1, \mathbf{X}_2^2, \ldots$) chiziqlar to'plamini chizamiz. Buning uchun kompleks chizmada X_1OX_2 proektsiyalarda $\left(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \ldots\right)$ kesuvchi tekisliklar o'tkazamiz va xar bir kesuvchi tekislikni $\left(t_{12}^1, t_{12}^2, \ldots\right)$ egri chiziqlar bilan kesishgan nuqtalarini belgilaymiz va $\left(\mathbf{1}_{12}, \mathbf{2}_{12}, \ldots\right)$ nuqtalarni hosil qilamiz. Bundan keyin topilgan nuqtalar vertikal proektsion chiziqlar yordamida X_1OX_5 proektsiyaga ko'taramiz. Bu yerda 1_2, 2_2, 3_2 nuqtalar to'plami orqali $\mathbf{X}_2^1$ egri chiziq o'tkaziladi. Xuddi shunday $\mathbf{X}_2^2$, $\mathbf{X}_2^3$ chiziqlar xam topiladi.

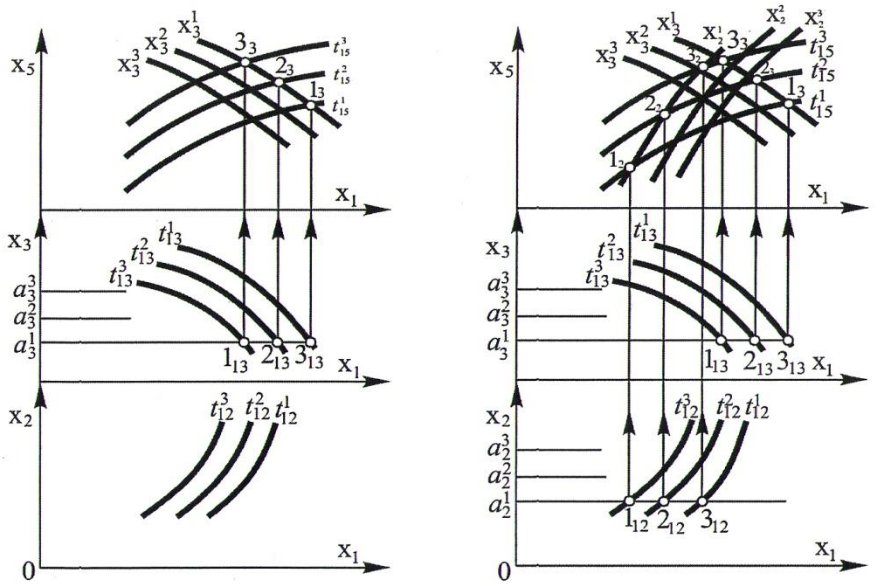
3. Nomogrammaning ($\mathbf{X}_3^1, \mathbf{X}_3^2$,...) chiziqlari xam chiziladi (3-rasm).

4. 2-rasm va 3-rasmlarni birlashtirib, P_5^2 xossa nomogrammasi topiladi (4-rasm).





1-2 rasm



3-4 rasm

Nomogramma tuzishning boshqa usulini xam ko'rib chiqamiz.

Agar qaysi bir ob'ektning diskret berilmalari aniqlangan bo'lsa, noma'lum xossa aniqlanishi kerak bo'lsa quyidagi algoritmni ishlatamiz.

1) X_5 — noma'lum xossa.

X_1,X_2, X_3, *t*- berilgan parametrlar va ma'lum xossalar.

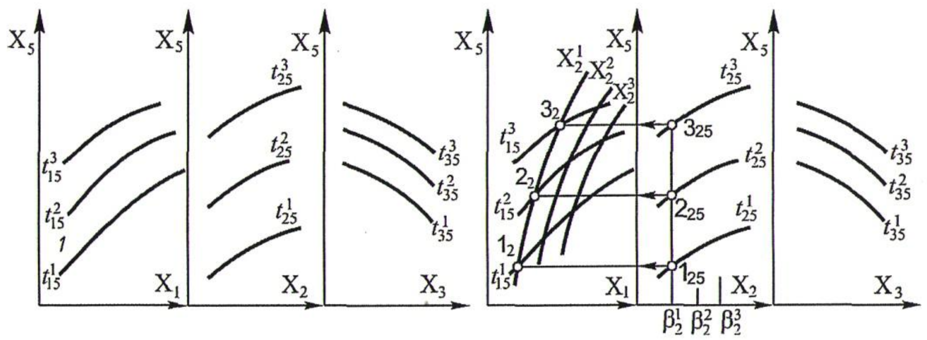
а) X_2OX_5 kompleks chizma proektsiyalarida $\left(\boldsymbol{\beta}_2^1,\boldsymbol{\beta}_2^2,\ldots\right)$ kesishuvchi tekisliklar o'tkaziladi. (6-rasm)da uchta kesuvchi tekislik ko'rsatilgan $\boldsymbol{\beta}_2^1,\boldsymbol{\beta}_2^2,\boldsymbol{\beta}_2^3$;

б) xar bir kesuvchi tekislik $\left(t_{25}^1,t_{25}^2,\ldots\right)$to'plam bilan kesishgan nuqtalari belgilanadi;

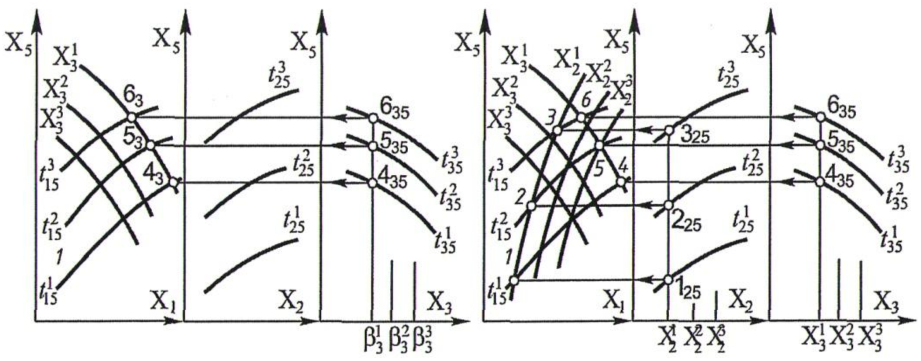
в) topilgan nuqtalarni gorizontal xolatda ko'chiramiz, X_1OX_5 proektsiyalarigacha $\left(t_{15}^1,t_{12}^2,\ldots\right)$to'plam bilan kesishguncha, bu holda (1_2, 2_2, ...) nuqtalar hosil bo'lib, bular silliq tutashadi va $\mathbf{X}_2^1$ egri chiziq hosil bo'ladi. Xuddi shunday $\mathbf{X}_2^2$ va $\mathbf{X}_2^3$ egri chiziqlar hosil bo'ladi.

2. Nomogrammaning ($\mathbf{X}_3^1$, va $\mathbf{X}_3^2$, ...) egri chiziqlari topiladi (7-rasm).

3. 6-rasm va 7-rasmlarni birlashtirib 8-rasmda yangi nomogramma hosil bo'ladi va noma'lum X_5 xossa qiymatlari chizmada aniqlanadi.



5-6 rasm.

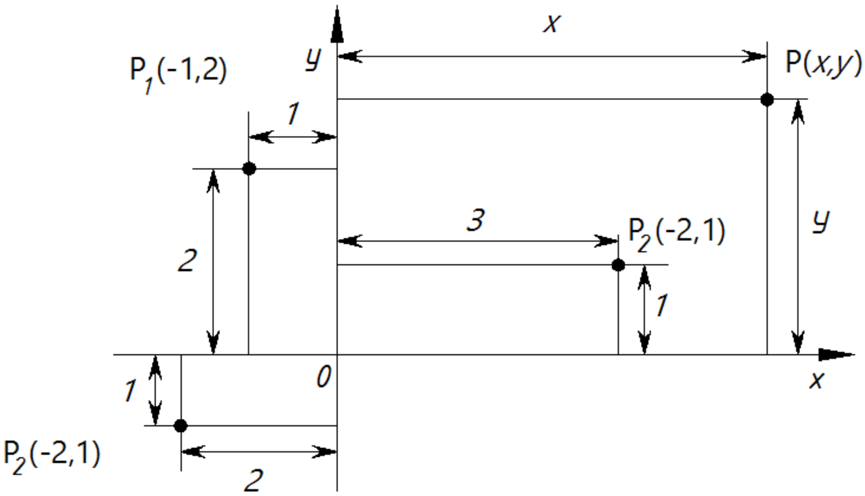


7-8 rasm.

12. TEKISLIKDAGI ANALITIK GEOMETRIYA

12.1. Tekislikdagi dekart koordinatalari

Tekislikdagi eng oddiy koordinatalar tizimi bu dekart koordinatalar tizimidir. Tekislikka chizilgan ikkita perpendikulyar to'g'ri chiziq koordinata o'qlarini hosil qiladi va bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi koordinatalarning kelib chiqishi O dir. Boshlanish har bir o'qni musbat va manfiy yarimaksisga ajratadi. Musbat x- va y- o’qlar (1.1-rasm) mos ravishda Ox va Oy to'g'ri chiziqlari bo'lsin. Musbat yarim choraklar odatda tanlanadi.



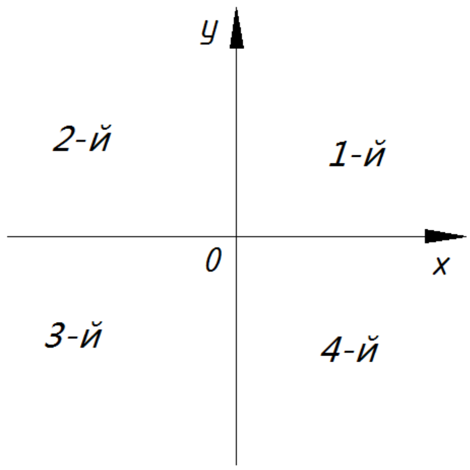
1.1-rasm

Ushbu tekislikdagi P nuqtaning koordinatalarini topish uchun Ox va Oy o'qlariga parallel ravishda P orqali to'g'ri chiziqlar chizish kerak; yarim chiziqlar bilan bu chiziqlarning kesishish nuqtalari bilan X va Y bilan belgilanadi. P nuqtaning x, y koordinatalari OX va OY kesmalarining uzunliklari, 1.1-rasmda ko'rsatilganidek. Agar X (yoki Y) manfiy o’q ustida yotgan bo'lsa, mos koordinata OX (yoki OY) kesmaning minus belgisi bilan olingan uzunligi bo'ladi.

Koordinatalarni yozishda biz ularni (x, y) tartibda qavs ichiga olamiz va ko'rib chiqilayotgan nuqta "P (x, y) nuqta" sifatida ko'rsatiladi. Shaklda ko'rsatilgan uchta nuqta $P_1(-1, 2)$, $P_2(-2, -1)$ va $P_3(3, 1)$ misolidan foydalanib. 1.1 musbat va manfiy koordinatalardan qanday foydalanishni ko'rsatadi.

Koordinata o'qlari tekislikni to'rtta chorakka ajratadi (1.2-rasm); o'shbu rasmda ushbu choraklar uchun belgilangan belgilar ko'rsatilgan.

Nuqtalar, to'g'ri chiziqlar va egri chiziqlar o'rtasidagi munosabatni tavsiflash uchun dekart koordinatalar tizimidan foydalaniladi.



1.2-rasm

O'quvchi analitik geometriyaning tekislikdagi asosiy usullarini biladi deb faraz qilsak, ba'zi bir natijalarni isbotlamasdan eslaymiz va hisoblash matematikasi nuqtai nazaridan kerakli bo'lganlarini ko'rsatamiz.

12.2. To'g'ri chiziq tenglamalari

Eng keng tarqalgan to'g'ri chiziq tenglamasi

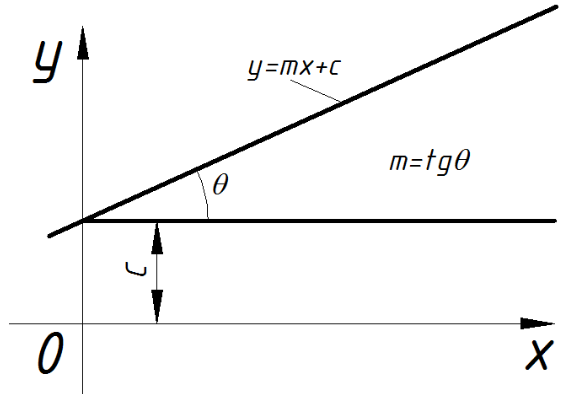
$$y = mx + c, \qquad (1.1)$$

bu yerda m – to’g’ri chiziq kordinatalari o’qlari bilan hosil qilgan burchak tangensi, c - y o'qi bilan kesishish nuqtasi (1.3-rasm). Bu holda “**y**” uchun aniq ifoda har qanday “x” qiymati uchun “y” ni baholashga imkon beradi. Biroq, bu tenglamaning bitta kamchiliklari bor: undan vertikal chiziqlarni tasvirlash uchun foydalanish mumkin emas, masalan, x = 1 chiziq.

Agar to'g'ri chiziq berilgan ikkita nuqta (x_1, y_1) va (x_2, y_2) orqali o'tadigan bo'lsa, unda (1.1) aniq tenglama shaklni oladi Oxirgi tenglamani nosimmetrik tarzda yozish mumkin:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} \qquad (1.2)$$

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1). \qquad (1.3)$$



1.3-rasm

To'g'ri chiziq tenglama endi yopiq shaklga ega; berilgan “x” qiymatlari uchun “y” ni topish uchun ushbu chiziqli tenglamani yechish kerak, ya'ni (1.2) tenglamaga qaytish kerak. Ammo bu formula vertikal chiziqlarni tavsiflashga imkon beradi: agar $x_2 = x_1$ va $y_2 \neq y_1$ bo'lsa, biz vertikal chiziq $x = x_1$ tenglamasini olamiz. Qalam va qog'oz bilan masalalarni yechishda biz vertikal chiziqlar muammosini osonlikcha yengib chiqamiz, ammo xuddi shu muammo kompyuterlar uchun geometrik masalalarni dasturlash to'g'risida gap ketganda bizning ishimizni ancha murakkablashtiradi. Bundan tashqari, biz vertikalga yaqin to'g'ri chiziqlardan voz kechishimiz kerak, chunki formula xatolariga olib kelishi mumkin. Umumiy holda ushbu tenglama quyidagicha yoziladi:

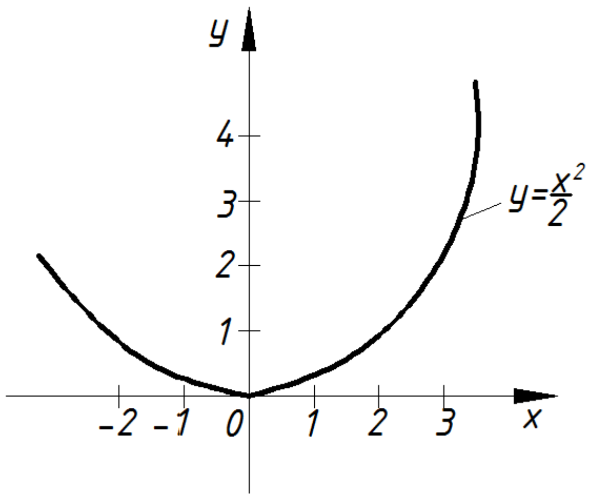
$$ax + by + c = 0. \tag{1.4}$$

Vertikal chiziq shunchaki b = 0 bo'lgan chiziq. Barcha yopiq tenglamalarga xos bo'lgan bitta xarakterli xususiyat haqida gapirish kerak: bunday tenglamalarning koeffitsientlari noaniq tarzda aniqlanadi, chunki tenglama a, b va c o'rniga ixtiyoriy proporsional λa, λb va λs qiymatlarni olgan taqdirda ham amal qiladi.

Har qanday berilgan to'g'ri chiziqning aniq tavsifini olish uchun koeffitsientlarni quyidagi shartlar bilan normallashtirish mumkin: $a^2 + b^2 = 1$, $c < 0$.

12.3. Tekis egri chiziq tenglamalari

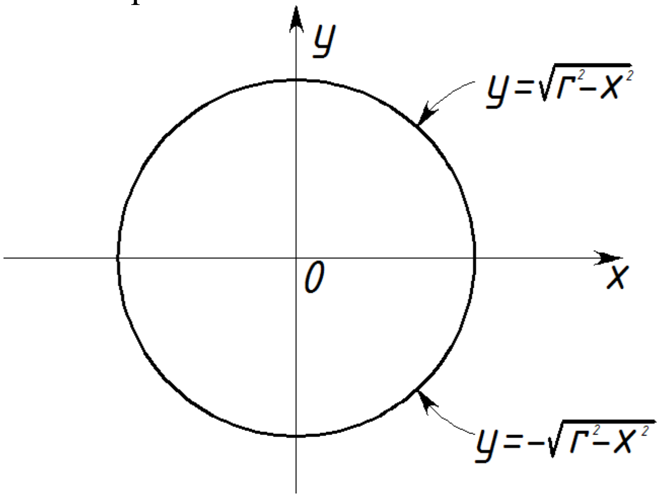
Yassi egri chiziqni aniqlash uchun biz $y = f(x)$ aniq tenglamaga egamiz, bu yerda $f(x)$ *“xy”* qiymatlarining berilgan funktsiyasi bo'lib, uning grafigi an’anaviy usulda topilgan (1.4-rasm).



1.4-rasm

Ushbu funktsiya grafigi, berilgan nuqtalari orasidagi egri harakati haqida taxminlar qilamiz. Berilgan qiymatlar orasidagi interpolatsiya masalasi 5-ilovada batafsil ko'rib chiqilgan.

Funktsiya bitta qiymatga ega bo'lganda va egri chiziqda vertikal urinma bo'lmasa, aniq tenglama qoniqarli bo'ladi. Shuning uchun aylana, ellips va boshqa konusning kesimlari kabi katta amaliy ahamiyatga ega bo'lgan ko'plab egri chiziqlarni taxlil qilish uchun qo’llaniladi.



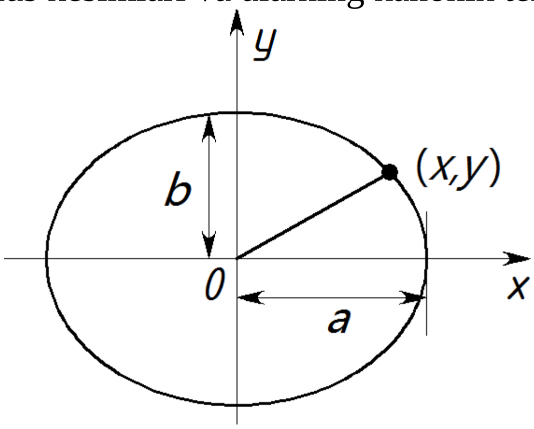
1.5-rasm

1.5 rasmda ko'rsatilgan doira uchun biz x^2-y^2 — r^2 = 0 tenglamaga egamiz, “*y*” ning qiymati to'g'ridan-to'g'ri “x” funktsiyasi bilan tavsiflanmaydi. Aniq tenglamani olish uchun ushbu doirani ikkita qismga bo'lish kerak, keyin yuqori qismi uchun $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$, pastki qismi uchun $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ olamiz. Ushbu amallar shuningdek, kompyuter dasturlarining kompilyatsiyasini murakkablashtiradi.

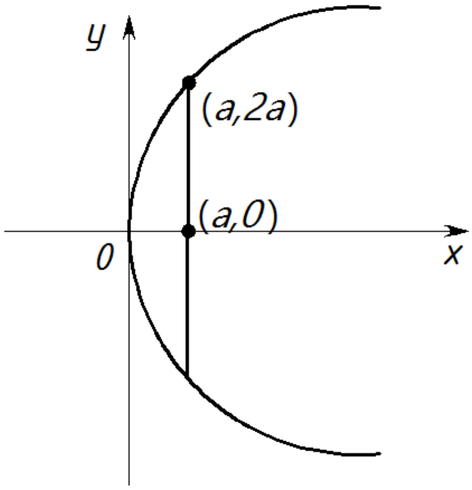
Umumiy holatda egri chiziq tenglamasi f (x, y) = 0 deb yoziladi, bu yerda f (x, y) “x” va “y” ning berilgan funktsiyasi. Ushbu tenglama berilgan (x, y) nuqta egri chiziqda mavjudligini yoki yo'qligini aniqlashga imkon beradi, lekin u to'g'ridan-to'g'ri egri chiziqdagi nuqtalarni hisoblash uchun mos emas, faqat “x” yoki “y” uchun aniq tenglamaga kamaygan hollar bundan mustasno.

Amaliy masalalar yechishda odatda egri chiziqning uzluksiz urinma chizig'iga ega bo'lishi talab qilinadi, uning mavjudligi doimiy qismli *df/dx* va *df/dy* ning hosilalari mavjudligi bilan ta'minlanadi. Agar qo'shimcha ravishda egrilikning uzluksizligi talab etilsa, unda yuqoridagi shartlardan tashqari, ikkinchi darajali hosilalar ham uzluksiz bo'lishi kifoya.

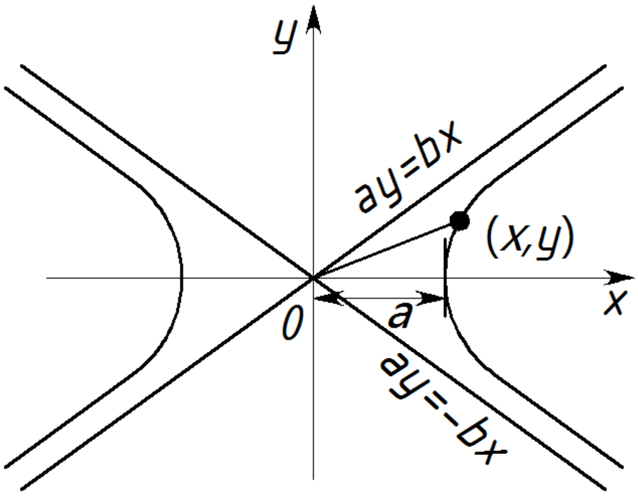
Eng keng tarqalgan tenglamalar bu konusning tenglamalari. 1.6-1.8 rasmlarda ko'rsatilgan konus kesimlari va ularning kanonik tenglamalari



1.6-rasm.
Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$



1.7-rasm. Парабола $y^2 — 4ax = 0$



1.8-rasm. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Umuman olganda konus kesimlarining ushbu turlari ikkinchi darajali tenglama bilan tavsiflanadi.

$$S=ax^2 + 2hxy + by^2+2gx+2fy + c = 0, \qquad (1.5)$$

bu yerda a, b, c, f, g va h koeffitsientlari har xil qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Xususan, agar $h^2 < ab$ bo'lsa ellips bo'ladi, $h^2 = ab$ parabola mavjud; $h^2 > ab$ holatida biz giperbolani olamiz. Shartli ravishda $abc + 2fgh - af^2 - bg^2$ - ch $\neq 0$ bo'lsa, aks holda egri chiziq juft chiziqqa aylanadi. Agar biz biron bir konusning kesimini noyob tasavvurga ega bo'lishini istasak, unda (1.4) to'g'ri chiziq tenglamasida bo'lgani kabi, egri chiziq tenglamasining koeffitsientlari qandaydir standart usulda normallashtirilgan bo'lishi kerak.

Konusning kesimlari konus va silindrlarning tekis qismlari ekanligi bilan izohlanadigan katta amaliy ahamiyatidan tashqari, bu egri chiziqlar nisbatan sodda analitik xususiyatlarga ega.

12.4. Nuqta va to'g'ri chiziq orasida bog'lanishni ifodalovchi asosiy formulalar.

1.1.4.1. Pifagor teoremasiga binoan ikki nuqta (x_1, y_x) va (x_2, y_2) orasidagi masofa d quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (1.6)$$

1.1.4.2. (x_1, y_1) nuqta va $ax++by+c = 0$ to'g'ri chiziq orasidagi masofa formulada berilgan.

$$d^2 = (ax_1 + by_1 + c)^2/(a^2+b^2). \qquad (1.7)$$

1.1.4.3. $a_l x + b_1 y + c_l = 0$ va $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ikkita to'g'ri chiziq (x, y) nuqtada kesishadi, bu yerda

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ и } y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, sharti bilan, aks holda bu ikkita to'g'ri chiziq parallel (yoki mos tushishi mumkin).

1.1.4.4. $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ va $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ikkita to'g'ri chiziq hosil qilgan 9-burchak formula bilan aniqlanadi.

$$cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}} \qquad (1.9)$$

1.1.4.5. Yuqorida ko'rsatilgan ikkita chiziq parallel, agar

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \qquad (1.10)$$

1.1.4.6. Ikkita to'g'ri chiziq perpendikulyar bo'lsa

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \qquad (1.11)$$

1.1.5. Chiziqlar va egri chiziqlarning kesishgan nuqtalari

$(x, y) = 0$ $g(x, y) = 0$ ikkita egri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ushbu ikkita tenglama tizimini yechish kerak. Agar berilgan ikkala chiziq ham xar xil bo'lsa, (1.8) dagi kabi yechim elementar bo'ladi, ammo bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lganda anomal holat bo'lishi mumkin.

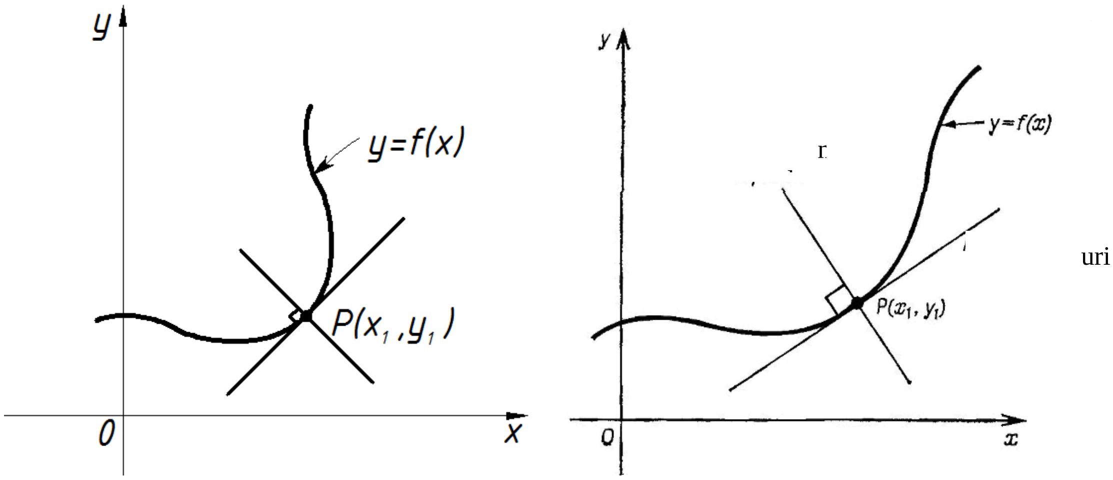
Agar *f* va *g*, *x* va *y* ning chiziqli bo'lmagan funktsiyalari bo'lsa, u holda yuqoridagi tenglamalar tizimi sonli usullar yordamida yechiladi.

1.1.6. Egri chiziqlarga urinma va normal o’tkazish

$P(x_1, y_1)$ nuqtadagi $y = f(x)$ egri chiziqqa urinma quyidagi tenglama bilan aniqlanadi

$$y=y_1+f'(x_1)(x-x_1), \qquad (1.12)$$

bu yerda $f'(x_1)$ - hosila qiymati, ya’ni df/dx $x = x_1$ nuqtada (1.9-rasm)



1.9-rasm.

Agar ko'rib chiqilayotgan egri chiziq P ning vertikal yoki deyarli vertikal urinmasiga ega bo'lsa, ushbu formuladan foydalangan holda tangensning qiymati noaniq bo’lib qoladi.

Agar egri chiziqni tavsiflash uchun $g(x, y) = 0$ tenglamasidan foydalansangiz, bunday qiyinchiliklarni osonlikcha yengib chiqasiz, shunda urinma tenglamasi aniq topiladi.

$$g_x(x_1, y_1)(x-x_1) + g_y(x_1, y_1)(y-y_1) = 0, \qquad (1.13)$$

bu yerda $g_x(x_1, y_1)$ va $g_y(x_1, y_1)$ chizig’ini P nuqtada dg/dx va dg/dy hosilalarining qiymatlari.

Misol. (1,0) nuqtada $x^2+y^2-1=0$ doiraga urinma quyidagicha hisoblanadi.

Agar $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ bo'lsa, u holda $g_x = 2x$ va $g_y = 2y$, shuning uchun $g_x(l, 0) = 2$ va $g_y(l,0)=0$ bo'ladi. Shunday qilib, kerakli urinma tenglamasi

$2(x - l) + 0(y - 0) = 0$ shaklga ega, ya'ni urinma $x - 1$ vertikal chiziq bo'ladi.

P nuqtada tiklangan normal uchun aniq ifoda

$$y=y_1-(x-x_1)f'(x_1) \qquad (1.14)$$

Ushbu tenglama P nuqtasida normal gorizontal holatda bo'lgan holda, noaniq bo'lib qoladi. Bu holda tenglama quyidagicha yoziladi:

$$g_y(x_1, y_1)(x-x_1)-g_x(x_1, y_1)(y - y_1)=0. \qquad (1.15)$$

Ushbu tenglama boshqa tenglamadan foydalanish imkonsiz bo'lgan yoki ba'zi bir qiyinchiliklarga duch keladigan holatlarda normalarni aniqlashga imkon beradi.

12.5. Chiziqlar va egri chiziqlarning parametrli tenglamalari

To'g'ri va egri chiziqlar uchun yopiq tenglamalar masalalar yechishda yordam beradigan bo'lsa-da, aniq tenglamalardan foydalanish qiyin yoki imkonsiz bo'lgan holatlarda (masalan, biz bir nechta qiymatlar bilan yoki vertikal urinmalar bilan ishlashda) to'g'ridan-to'g'ri mos kelmaydi. Egri chiziqlar hosil qilganda va kesishish nuqtalarini aniqlash uchun raqamli usullarga murojaat qilishga majbur bo'lamiz. To'g'ri chiziqlar va egri chiziqlarni ifodalashning yana bir usuli bor, bunda *x* va *y* koordinatalari teng deb hisoblanadi: bular parametrik ko'rinishdagi tenglamalari.

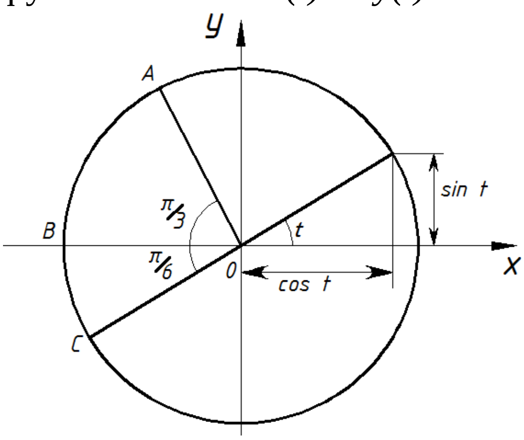
x va *y* koordinatalari ba'zi yordamchi *t* parametrlarning funktsiyalari sifatida ifodalanadi , ya'ni $x = x(t), y = y(t)$. Masalan, parametrik usulda

$x^2+y^2-1=0$ doira tenglamasi quyidagi shaklda yoziladi.

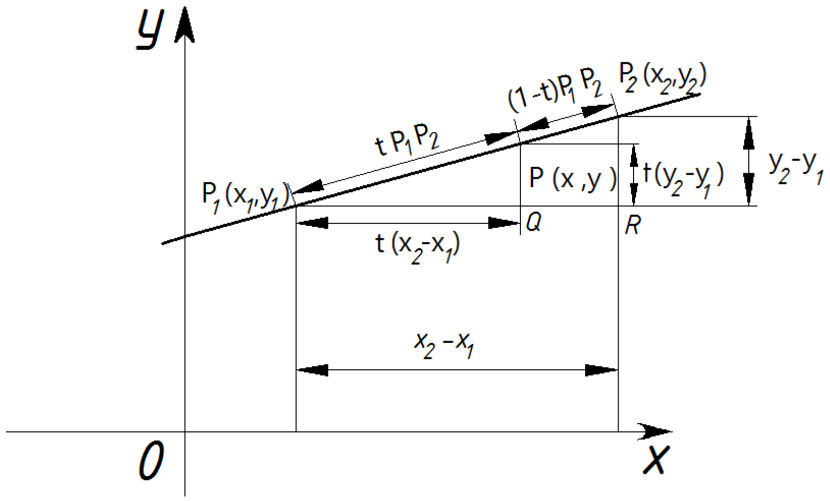
$$x = \cos t \quad \text{va} \quad y = \sin t, \qquad (1.16)$$

bu yerda t $0 \le t < 2\pi$ oralig'ida qiymatlarni qabul qiladi (1.10-rasm). Odatda *t* parametr oralig'ini ko'rsatish zarur bo'lsa-da, agar maqsadimiz egri chizig'ini tavsiflash bo'lsa, bu afzallik bo'lishi shart emas. Masalan, parametrik tenglamalar (1.16) va $2\pi / 3 \le t \le 7\pi / 6$ sharti shaklda ko'rsatilgan aylananing ABC yoyiga to'liq tavsif beradi (1.10-rasm).

Parametrik tenglamalardan foydalanib, egri chizig'ini aniqlash uchun *t* (parametr) ning ketma-ket qiymatlari uchun *x (t)* va *y(t)* ni hisoblash mumkin.



1.10-rasm



1.11-rasm

Agar *x (t)* va *y (t)* *t* ning chiziqli funktsiyalari bo'lsa, u holda ko'rib chiqilayotgan egri chiziq to'g'ri chiziq bo'ladi; xususan, P_1 (x_1, y_1) va $P_2(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalar yordamida aniqlanadi

$$x = x_1+t(x_2-x_1),$$
$$y = y_1+t(y_2 -y_1)$$

bu yerda 1.11-rasmda ko'rsatilgandek $P(x, y)$ nuqta, P_1 va P_2 nuqtalarini bog'laydigan chiziqni *t* nisbatda kesmalarga ajratadi: (1-t). Ushbu nisbatni isbotlash uchun P_1,*PQ* va P_1P_2R. uchburchaklar o'xshashligidan foydalanish kerak.

$ax+by+c = 0$ to'g'ri chiziq parametrli tenglamalar bilan tavsiflanadi

$$x = \frac{-ac}{a^2+b^2} + bt,$$
$$y = \frac{-bc}{a^2+b^2} - at$$

Normallashtirilgan tenglamalardan farqli bo’lgan parametrli ko’rinish funktsiyalar x (t) va y (t) bir xil egri chiziqni aks ettirishi mumkin. Parametrik egri chiziqlarining xususiyatlarini batafsilroq tahlil qilish keyinchalik, uch o'lchovli egri chiziqlar va to'g'ri chiziqlar ko'rib chiqilganda beriladi. Biroq, to'liqlik uchun biz bu yerda, urinmalar va normalar uchun parametrli formulalarni keltiramiz.

$t = tx$ parametri bilan P nuqtada $x = x(t)t$ $y = y(t)$ egri chiziqqa urinma quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi

$$x = x(\tau) = x(t_1) + \tau x(t_1),$$
$$y = y(\tau) = y(t_1) + \tau y(t_1),$$

bu yerda τ urinma chizig'idagi parametr, a x (t_1), y (t_1), $t = t_1$ nuqtada *dx/dt* va *dy/dt* hosilalarining qiymatlari.

Ushbu egri chiziqqa tiklangan normal quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi

$$x = x(t_1) + \tau y(t_1),$$
$$y = y(t_1) - \tau x(t_1).$$

12.6. Ikki parametrli egri chiziqlarning kesishishi

Agar $x=x(t)$, $y=y(t)$ va $x = \xi(x)$, $y = \eta(x)$ ikkita parametrik egri chiziqlarning berilishida kesishish nuqtasini topish uchun ikkita noma'lum t va τ bo'lgan ikkita tenglama tizimini yechish kerak;

$$x(t) - \xi(\tau) = 0,$$
$$y(t) - \eta(\tau) = 0;$$

Shunday qilib, bu yerda yechim egri chiziqli tenglamalar yordamida berilgani uchun oson emas. Agar bitta egri chiziqning tenglamasi yopiq shaklda, ikkinchisi parametrik shaklda berilgan bo'lsa, parametrik tenglamani yopiq shakldagi tenglamaga almashtirish mumkin, natijada bitta noma'lum *t* bilan bitta (odatda chiziqli bo'lmagan) tenglama olinadi.

Misol. $x^2+y^2—1=0$ doira va $x=t$, $y=1—t$ chiziqning kesishish nuqtalarini toping. Berilgan

$$t^2 + (1-t)^2 - 1 = 0,$$

va

$$t^2 + 1 - 2t + t^2 - 1 = 0,$$
$$2(t^2 - t) = 0$$

bundan kelib chiqadi $t=0$ yoki $t=1$

Ushbu natijani parametrli tenglamalarga almashtirib, ikkita kesishish nuqtasini olamiz: (0, 1) va (1, 0).

Agar aksincha, xuddi shu aylana parametrli shakl $x = \cos t$, $y= \sin t$ tenglamalari bilan berilgan bo'lsa va to'g'ri chiziq $x + y— 1=0$ yopiq shakldagi tenglama bilan aniqlansa, biz trigonometrik tenglamani olamiz

$$\cos t + \sin t — 1 = 0.$$

Bu holda $t = 0$ va $t = \pi/2$ yechimlari aniq; ammo, qoida tariqasida, bu usul t uchun raqamli yechim olishni talab qiladi. Shunga qaramay, biz murakkab raqamli tahlil masalalarini aralash usullar yordamida osonroq yechish mumkinligini ko'rsatish uchun kiritdik.

12.7. Egrilik

Agar $y = y(x)$ egri chiziq berilsa, uning egrilik radiusi ma’lum formula bilan aniqlanadi

$$p = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

bu yerda bosh x ga nisbatan farqlanishni bildiradi. Egri chiziqning burilish nuqtalarida egrilik radiusi cheksiz bo'lganligi sababli, egrilikning o'zi x = 1 / p dan foydalanganda qulayroq bo'ladi, chunki egri chiziqda keskin qirralar bo'lmasa, bu qiymat cheklangan.

Shunday qilib,

$$\varkappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{6/2}}$$

Yashirin $f(x, y) = 0$ tenglama bilan aniqlangan egri chiziqning mos formulasi shaklga ega

$$\varkappa = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_y^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{6/2}},$$

bu yerda x va y pastki yozuvlari x va y ga nisbatan qisman differentsiatsiyani bildiradi, masalan $f_{xy}=d^2f/dxdy$.

Parametrik tenglamalar $x=x(t)$, $y=y(t)$ bilan tavsiflangan egri chiziq uchun mos keladigan ifoda shaklga ega

$$\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

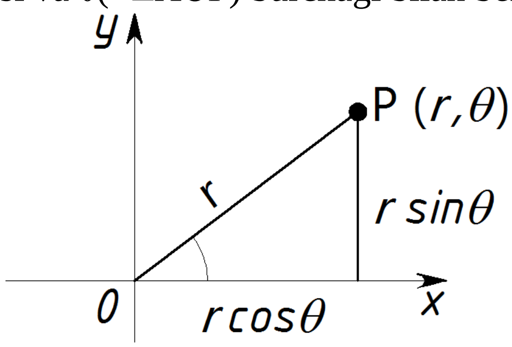
bu yerda nuqtalar t parametrga nisbatan farqlanishni bildiradi

12.8. Tekislikdagi analitik geometriyaning ba'zi savollari

Biz bu kitobda turli xil muammolarni hal qilishda muvaffaqiyatli ishlatilishi mumkin bo'lgan turli xil usullarni o'zlarining namunalari bilan ko'rsatish uchun faqat bir nechta ishlatiladigan usullarni ko'rib chiqamiz.

12.8.1. Egri chiziqlar uchun qutb koordinatalarini ishlatish

Egri chiziqlar uchun ko'pgina shaklda ko'rsatilgan qutb koordinatalari tizimidan foydalanadi. 1.12-rasmda ko'rsatilganidek unda P nuqtaning koordinatalari r(=OP) radiusi va θ(=∠XOP) burchagi bilan berilgan



1.12-rasm.

Qutb koordinatalar va dekart koordinatalari quyidagi munosabatlar bilan bog'liq.

$$x=r\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta. \qquad (1.25)$$

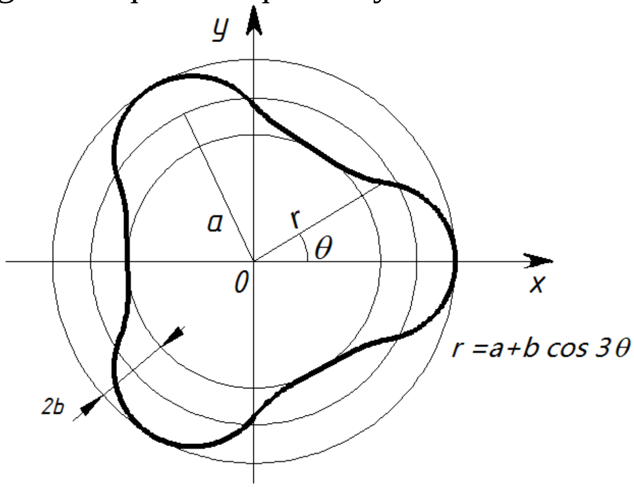
Polar (qutb) koordinatalardagi egri chiziqning tenglamasi r va θ. ga tegishli. Agar qutb koordinatalaridagi tenglama $r = r(\theta)$ aniq ko'rinishga ega bo'lsa, u holda

$$x = r(\theta)\cos\theta,$$
$$y = r(\theta)\sin\theta$$

bu egri chiziqning parametrli tenglamalari. Ko'rib chiqilayotgan egri chiziq uchun urinma va normal (1.19) va (1.20) tenglamalardan aniqlanadi. Shaklning tenglamalari

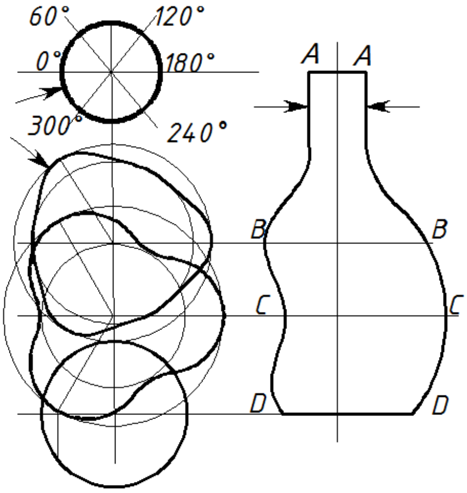
$$r = a + b\cos n\theta, \qquad (1.27)$$

nosimmetrik ravishda aylana atrofida joylashgan yopiq egri chiziqni ifodalaydi (1.13-rasm) qutb koordinatalarida har xil profillarni tasvirlashga imkon beradi. Ushbu turdagi egri chiziqlar nafaqat oddiy masalalar uchun ishlatiladi;



1.13-rasm.

ularning ustiga *a* va *b* koeffitsientlari *Oxy* tekisligiga perpendikulyar o'qi bo'ylab o'zgarib turadigan jismlarning kesimlari. Masalan, odatdagi suv shishasining barcha tasavvurlari a va b koeffitsientlarining mos qiymatlari bilan $r = a+b\cos 3\theta$ tenglama bilan tavsiflanadi (1.14-rasm). Kesmaning ko'rinishi bo'yicha batafsil ma'lumot uchun qutb koordinatalar qator kamchiliklarga ega.



1.14-rasm

1) Turli mos yozuvlar nuqtalari bo'lgan qutb koordinatalari tizimlari o'rtasida oddiy aloqaning yetishmasligi.

2) Urinmalar va normallarni qutb koordinatalarida tasvirlash oson emas, shuning uchun urinmalar va normallarni dekart koordinatalaridagi parametrik tenglamalar yordamida aniqlash kerak.

3) $P(x, y)$ nuqtaning qutb burchagi θ faqat teskari trigonometrik funktsiyalar yordamida topiladi.

12.9. Berilgan shartlarini qondiradigan konik kesimlarni aniqlash

Layming (1944) konus kesimlari nazariyasining klassik usullarini samolyot fyuzelyajining tasavvurlarini loyihalashda qo'llagan. Uning usuli bir necha nuqtada juftlashish va urinish sharoitlarini qondiradigan konus kesimlarining segmentlaridan foydalanishga asoslangan.

Umumiy holda konusning kesimi ikkinchi tartibli $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ tenglama bilan tavsiflanadi va bu kesmaning shakli a, b, c, f, g va h koeffitsientlari bilan aniqlanadi *a, b,* c, *f, g* va *h* biri, yaqqol ravishda, beshta mustaqil shartni qo'yishi va ushbu koeffitsientlarning biriga nisbatan tenglamalari yechilishi mumkin. Demak, egri chiziq (x_1, y_2) nuqtadan o`tsa, koeffitsientlar tenglamani qanoatlantiradi

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0, \quad (1.28)$$

va (x_1, y_1) nuqtadagi urinma Ox o'qi bilan θ_1 burchak hosil qilsa, u holda

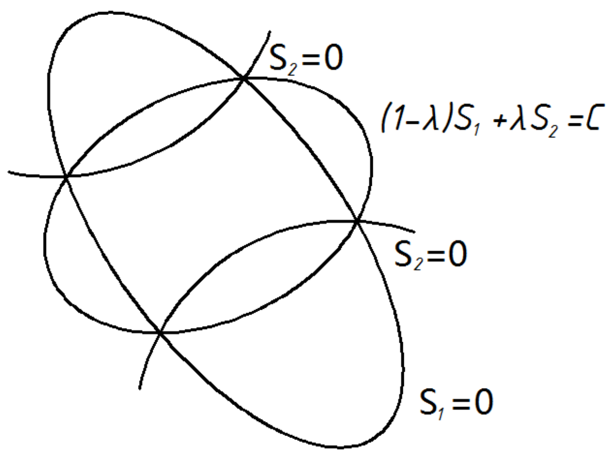
$$(ax_1 + hy_1 + g)\cos\theta_1 + (hx_1 + by_1 + f)\sin\theta_1 = 0 \quad (1.29)$$

Ushbu turdagi beshta mustaqil shartni qo'yib, biz a: b: c: f: g: h nisbatlar uchun beshta chiziqli tenglamalar tizimini olamiz. Ushbu tenglamalarni yechish zaruriyatidan xalos bo'lish uchun Layming yopiq tenglamalarning ba'zi afzalliklarini namoyish etadigan quyidagi taniqli klassik fokuslardan foydalanadi.

Avvalo, agar ikkita konusning kesimi $S_t(x, y)=0$ va $S_2(x, y) = 0$ (yoki qisqacha $S_1=0$ va $S_2 = 0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, unda tenglama quyidagicha bo’ladi.

$$(1-\lambda)S_1 + \lambda S_2=0 \quad (1.30)$$

$S_1=0$ ga tegishli nuqtalar uchun ham, $S_2=0$ nuqtalar uchun ham qondiriladi (1.30) tenglama (bu ikkinchi tartibda bo'lgani uchun) $S_1 = 0$ va $S_2 = 0$ egri chiziqlarning kesishish nuqtalari orqali o'tadigan yana bitta konusning kesimini aniqlaydi (1.15-rasm). λ qiymatini o'zgartirib. konus kesimlarining oilasi (yoki to'plami) hosil bo'ladi, ulardan ikkitasi $S_1 = 0$ ($\lambda = 0$ uchun) va $S_2 = 0$ $\lambda=1$ uchun) tenglamalar bilan aniqlanadi.



1.15-rasm.

Parametr A qiymatini umumiy holatda aniqlash uchun $(1 — \lambda)S_1 + \lambda S_2 = 0$. egri chizig'ida yotgan yana bitta nuqta (kesishish nuqtasi emas) ni ko'rsatish kerak, agar bu nuqta $P_1 (x_1, y_1)$ nuqta bo'lsa, u holda

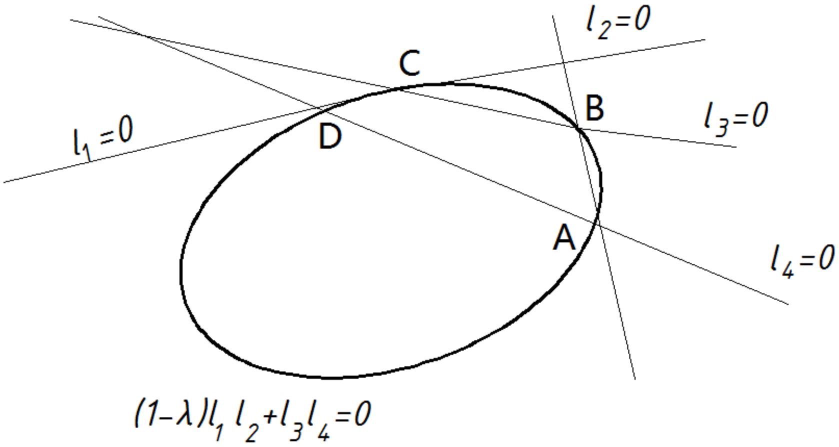
$$\lambda = \frac{S_1(x_1,y_1)}{S_1(x_1,y_1) - S_2(x_1,y_1)}$$

Bundan tashqari, $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x+b_2y + c_2) = 0$ yoki $l_1l_2 = 0$ tenglama $l_1 = 0$ va $l_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar juftligida yotgan barcha nuqtalar tomonidan qondiriladigan ikkinchi darajali tenglama ekanligiga e'tibor bering. Tenglama aslida konusni uning o'qiga parallel ravishda o'tuvchi tekislik bilan kesish natijasida olingan konusning kesimini aniqlaydi. Bunday juft chiziqdan (1.30) tenglama yordamida konus kesimlarini aniqlash uchun foydalanish mumkin.

Demak, biz bu tenglama ekanligini ko'ramiz

$$(1-\lambda)l_1l_2 + \lambda\, l_3l_4=0 \qquad (1.31)$$

ikki juft to'g'ri chiziq (l_1, l_2) va $(1_8, l_4)$ kesishgan to'rtta nuqtadan o'tuvchi konus kesimlarining oilasini yoki "to'plamini" ifodalaydi (1.16-rasmga qarang). Ixtiyoriy beshinchi nuqtani belgilash orqali kerakli qiymatini aniqlash mumkin.

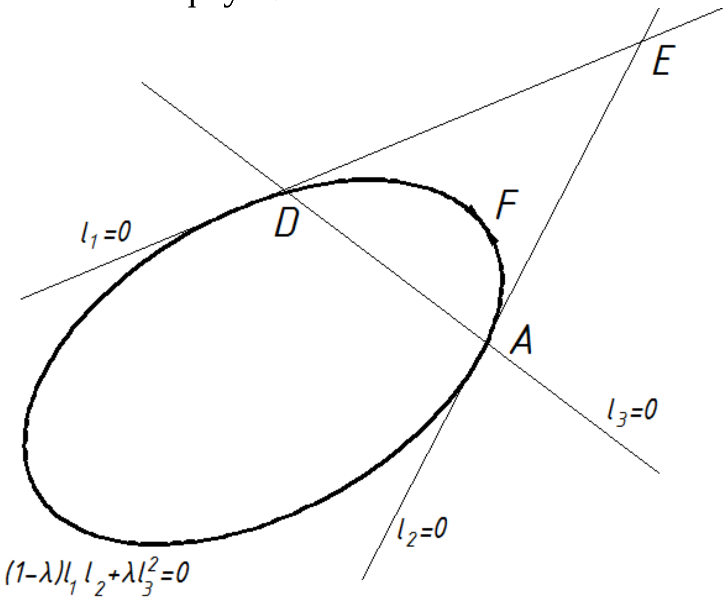


1.16-rasm.

Ushbu usul yordamida siz ikkita nuqtada ikkita urinmaga ega bo'lgan va uchinchi belgilangan nuqtadan o'tadigan konusning kesimini topishingiz mumkin. 1.16-rasmda ko'rinib turibdiki, S nuqta D nuqtaga o'tayotganda, CD urinma (D nuqtada) rasmda ko'rsatilgan konusning kesimiga intiladi. Shunga o'xshash tarzda, agar B nuqta A ga o'tsa, AB vatar A nuqtada ushbu qismning urinmasiga intiladi, Shuning uchun agar $l_3 = 0$ va $l_4 = 0$ chiziqlari to'g'ri keladigan bo'lsa, unda tenglama

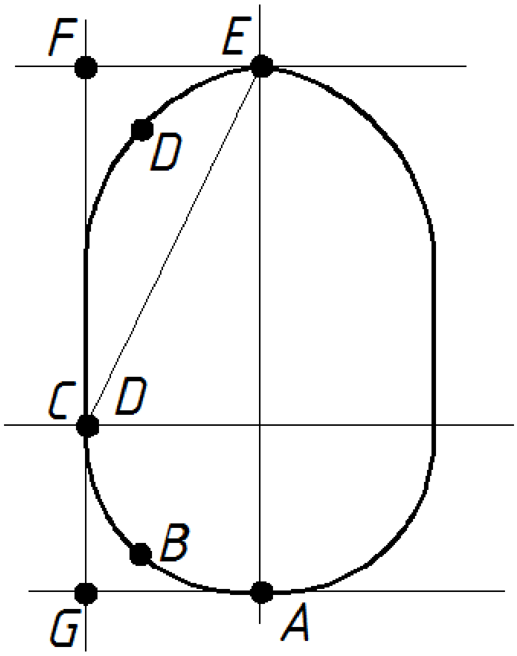
$$(1-\lambda)\, l_1 l_2 + \lambda\, l_3^2 = 0 \qquad (1\text{-}32)$$

A va D nuqtalari orqali o'tuvchi konus kesimlari to'plamini ifodalaydi va l_1 A nuqtada urinma bilan, D nuqtada l_2 urinma hosil qiladi (1.17-rasm). Uchinchi F nuqtani tanlash λ parametrini aniqlaydi.



1.17-rasm.

Konus kesimi bu holda to'rtta nuqta bilan belgilanadi: ikkita urinma nuqtasi A va D, urinmalarning kesishish nuqtasi E va tanlangan to'rtinchi nuqta F, birikish nuqtasi deb ataladi. Agar AED uchburchagi ichida F tanlansa, konusning kesimi doimo AED va D nuqtalari o'rtasida uzluksiz egri chiziq hosil qiladi, AED uchburchagi ichkarisidan o'tadi. Agar FDE va AED ning o'rta nuqtalarini bog'laydigan chiziqni ikkiga bo'linadigan bo'lsa, unda konusning kesimi mutanosib egri chiziq deb nomlanadigan parabola bo'ladi. Agar F bu parabola va AD kesma o'rtasida bo'lsa, unda biz ellips hosil qilamiz.



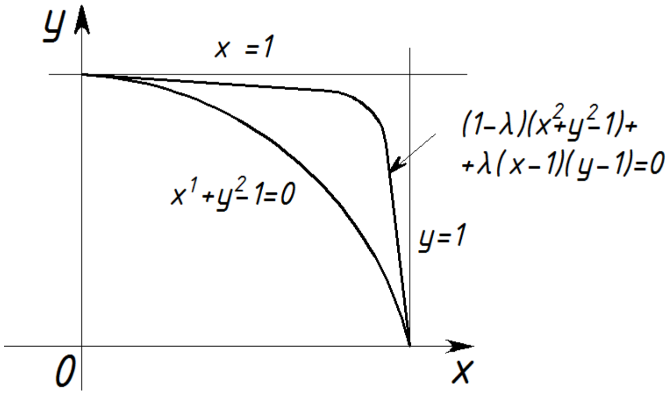
1.18-rasm.

Agar bu nuqta paraboladan tashqarida bo'lsa, unda biz giperbolani hosil qilamiz.

Layming tomonidan samolyot fyuzelyajining kesimini loyihalashtirish uchun taklif qilingan usulda har bir qismning konfiguratsiyasi beshta nuqta bilan aniqlanadi (1.18-rasm). Har bir kesma vertikal o'qga nisbatan nosimmetrik bo'lgani uchun, biz kesmaning faqat yarmini loyihalashimiz kerak, va E va A nuqtalaridagi urinmalar gorizontal chiziqlar bo'lishi kerak. G nuqta kesmaning maksimal kengligi nuqtasi bo'lganligi sababli, C da urinma vertikal yo'nalishga ega bo'lishi kerak. Rejalashtirilgan qism S nuqtasida umumiy urinma ikkita konusning kesimidan iborat. Fyuzelyaj umuman olganda beshta egri chiziq bilan tavsiflanadi - A, B, C, D va E nuqtalarining izlari, bu chiziqlar tasavvurlar tekisligi z o'qi bo'ylab harakatlanayotganda chiqib keladi.

Misol 1. Layming usulini qo'llagan holda, boshqa tekislikda yotgan egri chiziq to'rtburchak kesimga silliq o'tishni ta'minlash mumkin.

Egri chiziq $x^2+y^2-1=0$ tenglama bilan, kvadrat kesma esa juftlik $x= 1$, y= 1 juft chiziq bilan berilsin (1.19-rasm).



1.19-rasm.

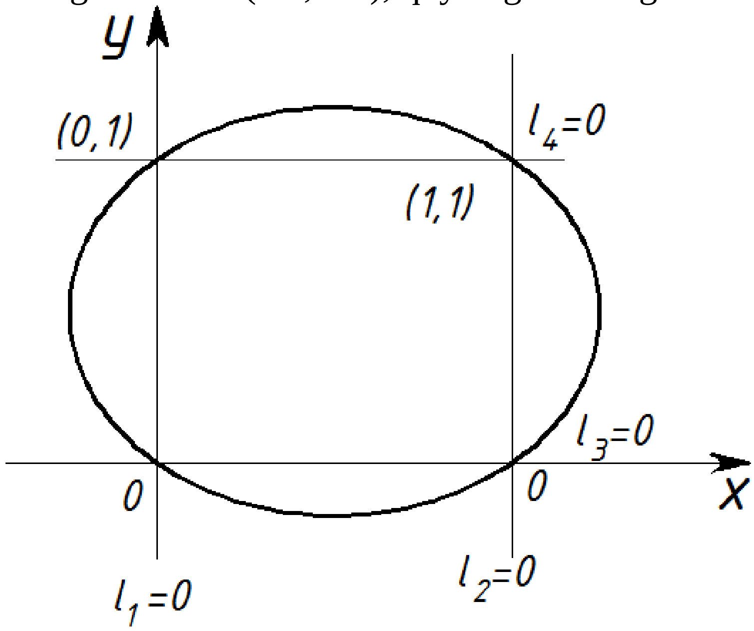
konusning qismlari quyidagicha beriladi

$$(1-\lambda)(x^2+y^2-1)+\lambda(x-1)(y-1)=0,$$

bu yerda λ 0 dan 1 gacha qiymatlarni qabul qiladi, berilgan ikkita bo'lim o'rtasida silliq o'tishni ta’minlash kerak.

2-misol. (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) va (3/2, 1/2) nuqtalardan o'tgan konusning kesimini topamiz.

Avvalo, ikkita to'g'ri chiziqni topish kerak, ular uchun dastlabki to'rtta nuqta ularning kesishish nuqtalari bo'ladi. Oddiy holatda, bunday juftliklar 1.20-rasmda ko'rsatilgan l_1 = x = 0, l_2 =x—1=0 и l_3=y= 0, l_4 = y-1=0 bo'ladi. Shuning uchun, ushbu nuqtalar orqali o'tadigan har qanday konusning kesimi (1-λ) x x (x - l) + λ y (y-1) = 0 tenglama bilan ba'zi bir λ qiymati uchun tavsiflanadi. Beshinchi nuqta koordinatalarga ega bo'lgani uchun (3/2, 1/2), quyidagicha tenglama tuzamiz.



1.20-rasm.

$$(1-\lambda)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\lambda\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=0,$$

Bu yerda λ = 3/4. Shunday qilib, x (x - 1) / 4 + 3y (y - 1) / 4 = 0.

Binobarin, $x^2+3y^2—x—3y= 0$ kerakli konusning kesimining tenglamasidir (bu holda ellips).

Misol. Tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziqlarni (1.22-rasm) ko'rib chiqing. Bu yerda,

$$df/dt=x-y+2t-1=0.$$

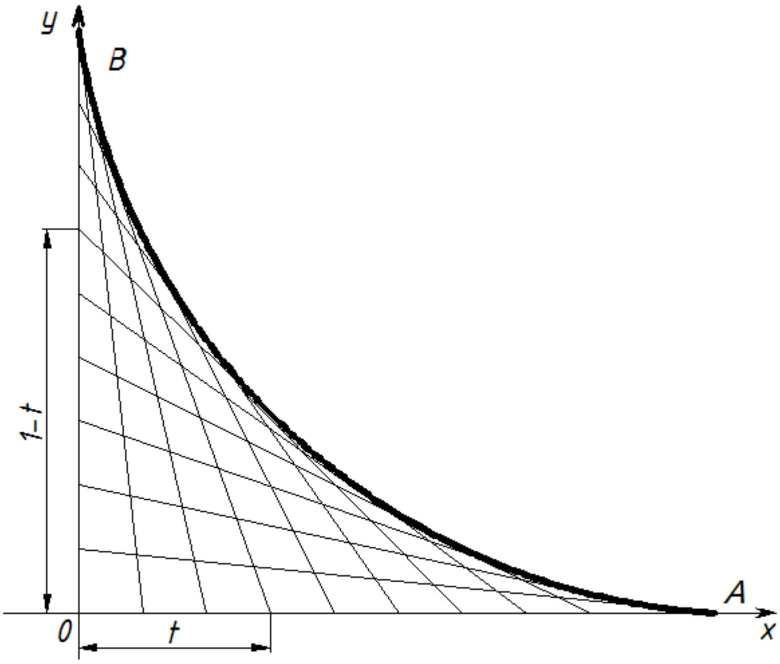
t ni yo'q qilib, aniq tenglamasini olamiz

$$x^2—2xy+y^2—2x—2y + 1 =0.$$

Agar avval *x*, keyin *y* ni alohida chiqarsak, parametrli tenglamalarni hosil qilamiz.

$$x=(1-t)^2, \qquad y=t^2$$

(Ushbu misol OA va AB to'g'ri chiziqli segmentlar maxsus holati uchun mutanosib egri chiziqni yasashning klassik usulini ko'rsatadi.)



1.22-rasm.

Agar berilgan $f(x, y, v) = 0$ oilaning egri chiziqlari parametrli tenglamalar bilan tavsiflansa,

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v) \qquad (1.34)$$

bu yerda u - har qanday egri chiziqda nuqta o'rnini belgilaydigan parametr, va v - bu oilaning egriligini belgilaydigan parametr, bu holda f $f(x, y, v) = f(x(u, v), y(u, v), v) = F(u, v)$, qayerdan $F(u, a) = 0$. Bundan kelib chiqadi:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

ma'lum bir oilaning har qanday egri chizig'ining barcha nuqtalari uchun. Bundan tashqari istalgan nuqtasi uchun biz $df/dv = 0$ nisbatiga egamiz. Bundan kelib chiqadi

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Ushbu munosabatlarni df/dx va df/dy tenglamalari sifatida ko'rib chiqsak, quyidagi tenglamani topamiz.

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$

Agar *df/dx* va *df/dy* bir vaqtning o'zida yo'qolmasa. Agar *df/dx* = 0- va *df/dy* = 0 bo'lsa, u holda *f(x, y, v)* = 0 egri chiziqning urinmasi aniqlanmaydi va egri chiziqning o'zi bu holda aniqlikka ega bo'lishi kerak. Shunday qilib, silliq egri chiziqli to'plam parametrli tenglamani olish uchun (1.35) dan foydalanib, (1.34) tenglamadan yoki *u* va yoki *v* ni chiqarib tashlash kerak.

Misol. 1.23-shaklda ko'rsatilganini ko'rib chiqamiz. To'g'ri chiziqlar oilasi berilgan.

$$x = v + u\cos v, \quad y = u\sin v.$$

.

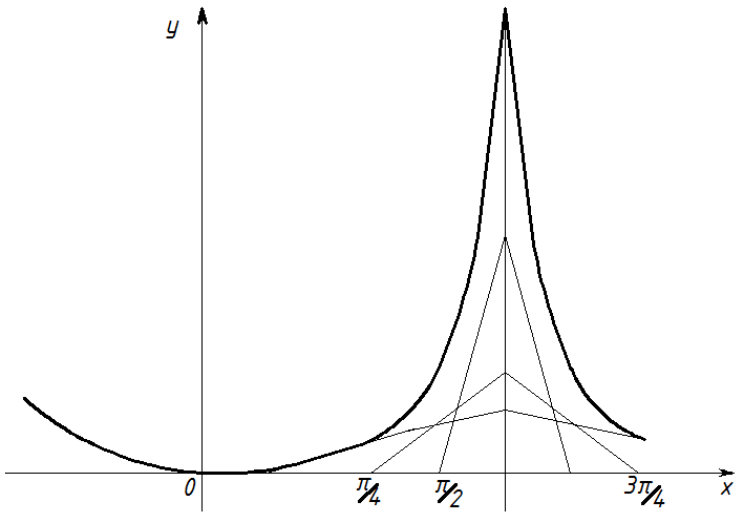


Рис. 1.23.

Bu yerda $(dx/du)=(dy/dv)-(dx/dv)$, $(dy/du)=u\cos^2 v—(l—u\sin v)\sin v=0$ mavjud. Shuning uchun $u(\cos^2 v + \sin^2 v)$—sini $v = 0$ va bundan $u=\sin v$.

Biz oxir-oqibat quyidagi munosabatlarni qo'lga kiritamiz

$x = v + \sin v\cos v$, $y = \sin 2u$, ya'ni parametrli tenglamalarni hosil qilamiz (1.23-rasm).

13. POLINOMLAR ORQALI APPROKSIMATSIYA

Polinomal yaqinlashtirish uchun qo`llanadigan usullarni ikkita sinfga bo`lish mimkin. Birinchi sinfga o`zgaruvchan *x* da bir qancha intervaldagi yaqinlashtirgan funksiyalar malum bo`lgan usullar kiradi. Masalan, funksiya e^x ni $-1 \le x \le 1$ uchun "eng yaxshi" yaqinlash bo`ladigan kub shakldagi polinomni topish kerak. "Eng yaxshi yaqinlashni" baxolash uchun bir qancha mezonlar bor, shu turdagi masalalar uchun butun boshli nazariya yaratilgan, ko`pincha ortogonal polinomlarni qo`llanishda asoslangan, Lejandr va Chebisheva polinomlari kabi. Ushbu kitobda biz faqat ikkinchi sinfga kiradigan usullarni ko`rib chiqish bilan cheklaymiz, ular yaqinlashtiradigan funksiya *y(x)* ni qiymatini jadvaldan olinadigan holatlarda, ya`ni *y* qiymatini ba`zi *x* diskert sonlari uchun beriladigan holatlarda qo`llanadi.

Qanday usulni tanlash dastlabki malumotlar turi bilan aniqlanadi. Bu yerda ikkita imkoniyat mavjud:

a) Berilgan (x_1,y_1) qiymatlarda xato bor, buning ustiga, xato ham tasodifiy, ham boshqa xususiyatli bo`lishi mumkin.
b) Berilgan qiymatlar ishonchli.

Bu holatlarni tipik misollari quyidagi: a) qiymatlar o`lchovlar yordamida aniqlanadi, bunda o`lchashda xato bo`lishi mumkin va b) qiymatlar standart jadvallardan olinadi, masalan, logarifmlar jadvalidan.

(b) holatida interpolyatsiya funksiya tuziladi, u berilgan hamma nuqtalardan (x_i, y_i) o`tishi kerak. (a) holatida bu noqulaylikga olib kelishi mumkin: interpolyatsiya funksiya malum darajaga berilgan qiymatlarini tasodifiy fluktuatsiyasini kuchaytirishi mumkin, vaholanki ularni minimal darajaga tushirib qoyish kerak. Berilgan qiymatlar ishonchsiz bo`lsa, biz approksimatsiya funksiyani qidiramiz, u berilgan nuqtalarni yaqinidan o`tadi, va aynan biron bir nuqtadan o`tishi shart emas.

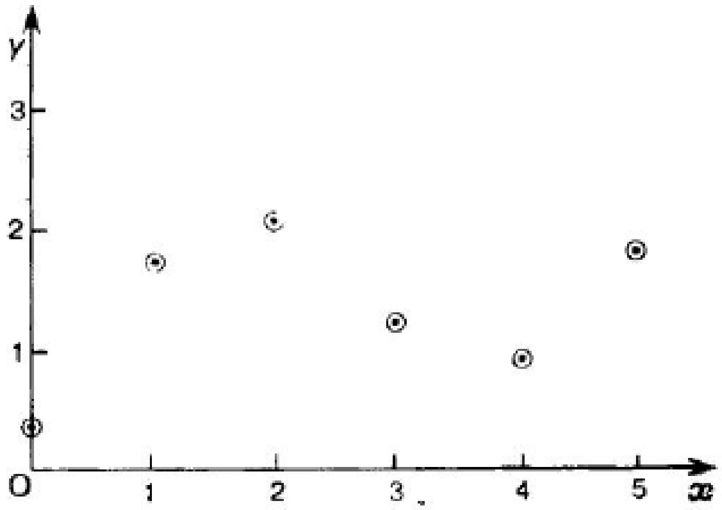
Egri chiziqlarni va sirtlarni yaqinlashishga aynan shu operatsiya qo`llanadigani uchun (dastlabki ma'lumotlarda kamchiliklarni tekislash uchun) ko'rib chiqamiz.

(a) holati uchun yaqinlashish usullari ko`rsatiladi. Aynan shu prinsiplar murakkab egri chiziqlarni va sirtlarni eng kichik kvadratlar usuli bilan approksimatsiya qilish uchun ishlatiladi.

13.1. Egri chiziqlarni eng kichik kvadratlar yo`li bilan tuzilgan polinomlar yordami bilan yaqinlashtirish

Quyidagi m`alumotlar bilan jadvalni ko`rib chiqamiz (I5.1 – rasmda tegishli nuqtalar ko`rsatilgan):

x	*y*
0	0,4
1	1,7
2	2,1
3	1,2
4	0,9
5	1,8



Chizma – I5.1.

Masalan, *x* qiymatidagi xatolarga e`tiborsiz bo`lsak, *y* qiymatida esa ahamiyatli xatoliklar bor.

Agar *y(x) p(x)* polinom yordamida yaqinlashsa, birinchi bo`lib bu polinomni darajasi haqida masalani yechish kerak. Aniqki, chiziqli funlsiya $a_1x+a_0$, uning grafik tasviri to`g`ri chiziq bilan ifodalangan, dastlabki ma`lumotlarni yaxshi yaqinlashtirmaydi. Ikkinchi darajali polinomani $a_2x^2+a_1x+a_0$ grafigi – bu parabola, ammo berilgan nuqtalar oz bo`lsa ham parabolaga o`xshamaydilar. Kub shakldagi polinom $a_3x^3+ a_2x^2+a_1x+a_0$ esa maksimum va minimumga ega bo`lishi mumkin, agar uning hosilasi $3a_3x^2+ 2a_2x+a_1$ ikkita moddiy nolga ega bo`lgan shart bilan. Demak, yaqinlash polinom sifatida kub shakldagi polinomni olish qulay.

p (x) polinomni darajasi uchga teng deb oldik, endi δ_i xatoliklarni ko`rib chiqamiz, ular quyidagi formula bilan ifodalanadi

$$\delta_i = p(x_i) - y_i = a_3x_i^3 + a_2x_i^2 + a_1x_1 + a_0 - y_i,$$

Bu yerda *i*=0,1,…,5 – jadvaldagi nuqtalar. Xatoliklar berilgan nuqtalarda *p(x)* qiymatlari *y* qiymatlaridan shu nuqtalar uchun farqlanishini ko`rsatadi. Eng kichik kvadratlar usuli polinom *p(x)* nisbatida hamma berilgan nuqtalar uchun xatoliklar kvadrati yig`indisini ifodalangan quyidagi tenglamani minimallashtiradi.

$$S = \sum_{i=0}^{5} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{5} [a_3x_i^3 + a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 - y_i]^2$$

Buning uchun hamma S xususiy hosilalarni $p(x)$ polinom koeffitsiyentlaridan nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial S}{\partial a_r}=2\sum_{i=0}^{5}[a_3x_i^3+a_2x_i^2+a_1x_i+a_0-y_i]\,x_i^r=0,\quad r=3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

Bu tenglamani qaytadan gruppalanib va aniqlik uchun, umumlashtirish chegarasini tushirib, quyidagi tenglama

$$a_3\sum x_i^{3+r}+a_2\sum x_i^{2+r}+a_1\sum x_i^{1+r}+a_0\sum x_i^r=\sum x_i^r y_i,\quad r=3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

kelib chiqadi

Ochilgan holda bu to`rt tenglamali tizim quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$\begin{aligned}
r=3:&\ a_3\sum x_i^6+a_2\sum x_i^5+a_1\sum x_i^4+a_0\sum x_i^3=\sum x_i^3y_i,\\
r=2:&\ a_3\sum x_i^5+a_2\sum x_i^4+a_1\sum x_i^3+a_0\sum x_i^2=\sum x_i^2y_i,\\
r=1:&\ a_3\sum x_i^4+a_2\sum x_i^3+a_1\sum x_i^2+a_0\sum x_i=\sum x_iy_i,\\
r=0:&\ a_3\sum x_i^3+a_2\sum x_i^2+a_1\sum x_i+a_0\sum 1=\sum y_i,
\end{aligned}$$

ya`ni, simmetrik chiziqli tenglamalari 4x4 – tizimi bo`ladi, uni koeffitsiyentlari *i* dan 0 dan 5 gacha qo`shib topiladi. Bizning misolimizda koeffitsiyentlar quyidagicha

$$\begin{aligned}
20515a_3+4425a_2+979a_1+225a_0&=333.5,\\
4425a_3+979a_2+225a_1+55a_0&=80.3,\\
979a_3+225a_2+55a_1+15a_0&=22.1,\\
225a_3+55a_2+15a_1+6a_0&=8.1.
\end{aligned}$$

Koeffitsiyentlarni ikkinchi o`nlik belgisigacha aniqlik bilan hisoblasak,natijada $a_3=0.15$, $a_2=-1.21$, $a_1=2{,}59$ kelib chiqadi, bu tizimimizni yechimi hisoblanadi. Aynan shu koeffitsiyent qiymatlarida $p(x)$ polinomi - xatoliklar kvadrati yig`indis S ni minimizatsiya qiladi. Shunday qilib, eng kichik kvadratlar usulida qurgan kub shakldagi polinomi, quyidagi ko`rinishga ega

$$p(x)=0.15x^3-1.21x^2+2.59x+0.35.$$

Jadvaldagi berilgan nuqtalardan, $p(x)$ 0.35, 1.88, 1.89, 1.28, 0.95 qiymatlarga ega; ular y ni jadvaldagi qiymatlaridan farqlanadi, ammo 0.2 dan ko`p emas. Agar olingan natijalar qonikarsiz tuyulsa, eng yaxshi yaqinlashni to`rtinchi darajali polinom bilan olish mumkin, ammo bu bir qancha qo`shimcha hisi]oblarni talab qiladi. Keyingi bo`limda ko`rsatilgandek, shunday polinomni beshinchi darajasini toppish mumkin, u hamma berilgan oltita nuqtadan o`tadi; bu holatda S o`zini minimal mumkin bo`lgan nol qiymatini oladi. Ammo P5.1 bo`limda ko`rsatgandek, bizda ishonchsiz dastlabki ma`lumotlar bo`lsa, bu xavfli

$$\sum_{r=0}^{n} a_r g_r(x)$$

hisoblanadi; amaliyotda past darajali polinomlarni , odatda ko`p nuqtalar sonini yaqinlashish uchun foydalanadilar.

Bu usulni hech qanday ahamiyatli o`zgarishsiz ko`rinishdagi

yaqinlashtiradigan funktsiyani berilgan ko`p miqdorli nuqtalarga to`g`irlash uchun foydalanish mumkin, $g_r(x)$ – har qanday berilgan funksiyalar, $a_r$ esa aniqlash kerak bo`lgan koeffitsiyentlar. Polinomal yaqinlashish $g_r=x^r$ tanloviga to`g`ri keladi.

Eng kichik kvadratlar usulini segmentlaridan topilgan , 6-bobda ko`rsatilganday, tekislikda berilgan ko`p miqdorli nuqtalarga egri chiziqni topishda ham qo`llanish mimkin.

13.2. Polinomal interpolyatsiya: Lagranj usuli

Endi interpolyatsiya qilish masalasiga qaytamiz, u egri chiziqni berilgan nuqtalardan aniq o`tkazishdan iborat. Avvalo, uchta aniq berilgan nuqtadan $(x_0,y_0)$, $(x_1,y_1)$ va $(x_2, y_2)$, bu yerda o`tadigan polinomni topishni ko`rsatamiz $x_0<x_1<x_2$.

Quyidagi misolni ko`rib chiqamiz

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

Agar $x=x_0$ desak, surat maxrajga teng bo`ladi va $L_0(x_0)=1$. Agar $x=x_1$ yoki $x=x_2$ desak, surat nolga  teng bo`ladi va , shunday qilib, $L_0(x_1)= L_0(x_2)=0$. Shu kabi

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \begin{cases} 1, & \text{agar } x=x_1, \\ 0, & \text{agar } x=x_0 \text{ yoki } x=x_2 \end{cases}$$

va

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \begin{cases} 1, & \text{agar } x=x_2. \\ 0, & \text{agar } x=x_0 \text{ yoki } x=x_1 \end{cases}$$

Endi bu tenglamalardan foydalanib, berilgan y qiymatlaridan funksiya tuzamiz:

$$p_L x = L_0(x)\,y_0 + L_1(x)\,y_1 + L_2(x)\,y_2.$$

Agar $x=x_0$ teng bo`lsa, bu tenglamani faqat o`ng tomonini birinchi hadi nolga teng bo`lmaydi. $L_0=(x_0)=1$ bo`lgani uchun, $p_L(x_0)=y_0$. Agar $x=x_1$ teng bo`lsa faqat ikkinchi hadi va $p_L(x_1)=y_1$ nolga teng bo`lmaydi; xuddi shunday $p_L(x_2)=y_2$. Demak, $p_L(x)$ funksiya qiymati $y(x)$ funksiyasi bilan hamma tugunlarda to`g`ri keladi. Demak, biz berilgan jadvaliy funksiyani (ya`ni berilgan funksiya bilan tugunlarda aniq to`g`ri keladigan) interpolyatsiya qiladigan funksiyani topdik. Ta`rif bo`yicha, $L_0(x)$,  $L_1(x)$ , $L_2(x)$ funksiyalar kvadratik polinomlar hisoblanadi; demak, $p_L(x)$ interpolyatsiya qiladigan funksiya ham kvadratik polinom. Bu yerda ajablanadigan hech narsa yo`q: uchta berilgan funksiya qiymati kvadratik interpolyatsion polinomni uchta koeffitsiyentini aniqlash uchun yetarli m`lumot deb hisoblanadi.

Ushbu bajaralgan ish oson umumlashtiradi. Aniqki, berilgan *(x_i, y_i)* nuqtalardan *n+1* ni interpolyatsiya qilish uchun, *$i=0,1,\dots,n$*, bunda $x_0<x_1<\dots<x_n$, bizga n darajali polinom n+1 koeffitsiyenti bilan kerak, quyidagi ko`rinishda

$$p_L(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\,y_i, \qquad \text{(I5.1)}$$

bu

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}.$$

ifodalash mumkin

Bu tenglama Lagranj interpolyatsiya formulasi deyiladi, *$L_1(x)$* esa – Lagranj interpolyatsiyasini fundamental polinomi. Ular hammasi *x* dan *n* darajasi polinomalari hisoblanadi, *$p_L(x)$* ni o`ziday.

Biroq bazi holatlarda *$L_1(x)$* ni formulaga (I5.1) joylashtirganda, eng yuqori *x* darajaga ega hadlar qisqarishi tufayli, *$p_L(x)$* polinoma darajasi *n* ga nisbatan kichik bo`ladi. Bunday holat, maslan, *n* + 1 berilgan nuqtalarnig to`g`ri chiziqda yotganida o`z o`rniga ega bo`ladi; bu holatda $p_L(x)$ chiziqli (birinchi darajadagi) polinomaga tushiriladi.

Formula (I5.1) bilan belgilanadigan $\le n$, darajadagi interpolatsiya polinomining o'ziga xosligini, isbotlash qiyin emas. *q (x)* ham $\le n$ darajaga ega va berilgan ko`pgina nuqtalarni interpolatsiya qiladi deb taxmin qilaylik. Shunda *$p_L(x)$* va *q (x)* qiymatlari bir xil bo'lgani uchun, *n* + 1 $x_1$ nuqtalarda nol qiymatga ega, d (x) = $p_L$ − q (x) $\le n$ darajadgi polinom hisoblanadi. Lekin 3 ilovada ko`rsatilganidek $\le n$ darajadagi polinom *n* dan ko`proq nolga ega bo`lishi mumkin emas. Bundan kelib chiqib, d (x) aynan shunday nolga teng, va shuning uchun $p_L(x)$ = *q (x)*.

Misol

Quyidagi ma'lumotlar jadvalida x = 6 da interpolyatsiya qilingan *y* indeks qiymatini toping:

i	x_i	y_i
0	2	0.6931
1	4	1.3863
2	5	1.6094

Lagranj formulasi keying interpolyatsion

$$p_L(x)=\frac{(x-4)(x-5)(x-7)}{(2-4)(2-5)(2-7)}0.6931+\frac{(x-2)(x-5)(x-7)}{(4-2)(4-5)(4-7)}1.3863+$$
$$+\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(5-2)(5-4)(5-7)}1.6094+\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(7-2)(7-4)(7-5)}1.9459.$$

polinomni (kubik) beradi:

Keyin ko`paytmalarni yoyish mumkin bo`lardi, shunga o`xshash hadlarni keltirib va $p_L(x)$ ni yaqqol ko`rinishda ifodalash, ya`ni $p_L(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ko`rinishda. Biroq bunga hech qanday ehtiyoj yo`q, chunki biz faqatgina polinomning x=6 da $p_L(x)$ qiymatini aniqlashimiz kerak; shuning uchun, bu qiymatni oxirgi tenglamaga joylashtirib, ketingi hosil bo`ladi

$$p_L(6)=\frac{2}{30}0.6931-\frac{2}{3}1.3863+\frac{4}{3}1.6094+\frac{8}{30}1.9459=1.7868.$$

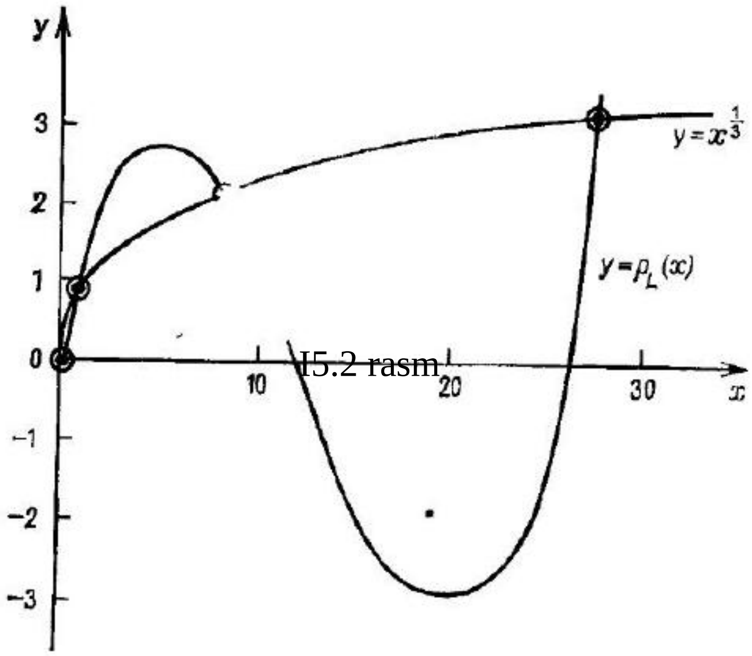
Keltirilgan malumotlar yozilmagan to`rt qiymatli logarifmlar jadvalidan olingan edi, va biz tomonimizdan olingan kattalik bu jadvallardan olingan *y* (6) = $\log_e 6 = 1.7918$

qiymatdan 0.3% ga farq qiladi xolos.

Lekin bunday omad bizga har doim ham kulib boqmaydi, va tajriba ko`rsatishicha, lagranjev interpolyatsiyasi ayrim paytlarda xato natijani berishi mumkin. Misol tariqasida kubik polinoma $p_L(x)$ yordamida interpolyatsiyasini quyidagi funksiya qiymati $y = x^{1/3}$ jadvalini keltirish mumkin.

x	0	1	8	27
y	0	1	2	3

Agar ikkala funktsiyaning grafigiga qarasak, I5.2 chi rasmda ifodalangan, bu funksiyaning interpolyatsiya qilingan qiymatlarning hech qaysisi to`liq qoniqtiruvchi hisoblanmaydi.



I5.2 rasm

Nomuvofiqlik polinom funktsiyasini polinom sifatida emas, balki polinom vazifasini taxmin qilish natijasida yuzaga keladi. Ko'rinib turibdiki, ushbu holatda biz berilgan nuqtalarning ketma-ket juftlari o'rtasida chiziqli interpolatsiya mavjud bo'lsa, aniqroq natijalarga erishamiz. ko'rib chiqilgan holat, ataylab ekstrimal bo'lsa-da, polinominal interpolatsiyadan qanday aniqlik kutish mumkinligi haqida savol tug'diradi. Analiz ko`rsatishicha, agar *(* $x_i, y_i$*)* nuqtalari aniq bir funksiya $y(x)$ grafigiga tegishli bo`lsa,

xatolarning eng katta qiymati quyidagi formula bilan baholanadi

$$|y(x)-p_L(x)| < |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|\frac{M}{(n+1)},$$

M – $x_0 \leq x \leq x_n$ intervalida $y^{(n+1)}(x)$ funktsiya moduli maksimumi. Xatoliklarning bunday baholanishi, sonli analiz uchun xos, yuqori tartib hosilalar bilan bog`liq, lekin ko`pincha ular haddan tashqari pessimistik bo`ladi va shuning uchun amaliy qo`llash uchun yaroqsiz bolib qoladi.

Biroq muhandislik maqsadida egri chiziqlarni sintez qilib turib, biz, odatda, matematik funksiyani taxmin qilmaslikka harakat qilamiz, egri chiziqni chizma yoki model orqali ifodalashga harakat qilamiz. Yuqorida keltirilgan xatolikni baholash formulasi bu maqsad uchun yaroqsiz: biz M ni aniqlay olmaymiz. Lekin agar funksiya dastlabki egri chiziqda aniqlangan ko`p nuqtalar yordamida interpolyatsiya qilinsa, tassavurimiz qoniqarlimi yoki yo`qmi haqida xulosa qilish uchun, egri chiziq grafigini chizib ikkala egri chiziqni taqqoslash kifoya. “matematik egri chiziq” dastlabki egri chiziqga nisbatan “chiroyliroq” deb boholanishi mumkin, va aynan unga imtiyoz beriladi, hattoki bu egri chiziqlar bir-biridan sezilarli darajada farq qilsa ham. Shu bilan biz xatoliklar chegarasi savollarini ko`rib chiqishni tugatamiz. Bu savolga qiziquvchi kitobxonlar batafsil malumotlarni Relston (1965) darsligidan topishi mumkin-[ N. C. Baxvalov (1972)- tax. ni ham ko`rib chiqing]

13.3. Polinom interpolatsiyasi: Ermit usuli

n + 1 nuqtalarda x_i, i = 1, 2, …, n, bizga faqatgina funksiya qiymati y_i emas balki uning hosilasi $y`_i$ ham berilgan deb faraz qilaylik. $x_i$ ning barcha nuqtalarida aynan $y_i$ va $y`_i$ qiymatlarga ega eng kichik darajadagi yagona polinom quyidagi formula orqali aniqlanadi

$$p_H(x)=\sum_{i=0}^{n} H_i(x)\,y_i+\sum_{i=0}^{n} H_i^*(x)\,y_i',$$

bu yerda

$$H_i(x)=[1-2L_i'(x_i)(x-x_i)]\,L_i^2(x),$$
$$H_i^*(x)=(x-x_i)\,L_i^2(x),$$

$L_i(x)$ funksiyasi 286 s. da aniqlanadi. $L_i(x)$ n darajadagi polinomligi tufayli, $p_H(x)$ – 2n + 1 darajadagi polinom. Shu natija bo`lishi malum edi, chunki bu polinomning barcha koeffitsientini aniqlash uchun 2$n$ +2 dastlabki natijalar kerak, biz shunday ham malum qiymatlar $y$ va $y`$ $n+1$da x_i nuqtalarda foydalangan edik. Yuqorida keltirilgan formula Erit interpolyatsiya formulasi hisoblanadi.

13.4. Polinom interpolatsiyasi: ajratilgan farqlar

Endi faqat (x_i, y_i) nuqtalar berilgan holatga qaytamiz. Lagranj (I5.3 bo`limga qarqang) interpolyatsiya usulini qo`llashdan ko`ra, Nyuton birinchi bo`lib taklif etgan, interpolyatsiya qiluvchi polinomni tuzish mumkin:

$$p(x)=\alpha_0+(x-x_0)\alpha_1+(x-x_0)(x-x_1)\alpha_2+\dots$$
$$\dots+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\alpha_n. \qquad \textbf{(I5.2)}$$

Shunday qilib, p (x) – n dan x darajadagi polinom,va bizdan barcha α_k larni aniqlash talab qilinadi. Har bir berilgan nuqtada $p(x_i) = y_i$ nisbat bo`lishini talab qilamiz. (I5.2) da $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ ga ko`ra , biz $n+1$tenglamadan tizimni olamiz:

$$\begin{aligned}
y_0 &= \alpha_0,\\
y_1 &= \alpha_0+(x_1-x_0)\alpha_1,\\
y_2 &= \alpha_0+(x_2-x_0)\alpha_1+(x_2-x_0)(x_2-x_1)\alpha_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_n &= \alpha_0+(x_n-x_0)\alpha_1+(x_n-x_0)(x_n-x_1)\alpha_2+\dots\\
&\dots+(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})\alpha_n.
\end{aligned} \qquad \textbf{(I5.3)}$$

Bu $= y_0$ ni beradi. Olingan natijani ikkinchi tenglamaga qoysak, biz $\alpha_1 = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ ni olamiz, chunki $x_1 - x_0 \neq 0$. Uchunchi tenglamadan α_2 ni topamiz va hokazo.

Shuni e'tiborga olish kerakki, (x_{n+1}, y_{n+1}) qo'shimcha nuqtani belgilash orqali biz tizimimizni α_{n+1} saqlovchi yana bir tenglama bilan oshiramiz. Barcha qolgan tenglamalar o`zgarishsiz qoladi. Bundan kelib chiqib α_0, α_1, …, α_n qiymat berilgan nuqtalarning haqiqiy raqamiga bog'liq emas.

(I5.3) dan ko`rinib turibtiki, $\alpha_0$ faqatgina $y_0$ ga bog`liq; α_1 esa y_0 va y_1 ga bog`liq, α_2- y_0 ga, y_1 va y_2 hokazo. Bu nisbatlarni biz quyidagi formula orqali ifodalaymiz:

$$\alpha_i = y[x_0, x_1, \dots, x_i].$$

Bu nisbatlar uchun boshqa belgilar ham qo`llaniladi. Shu kabi formulalarni ketma-ket berilgan nuqtalarning har qanday kichik to'plamidan ham olinishi mumkin.

Masalan, (x_0, y_0) nuqtani olib tashlab, so'ngra (x_{i+1}, y_{i+1}) nuqta qo'shilishi natijasida olingan kichik to'plamga(подмножество?) ega bo'lib, $y[x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}]$ ni hisoblash mumkin. bunday tenglamalar nisbat bilan bog`liq (masalan,

$$y[x_s, \ldots, x_t] = \frac{y[x_{s+1}, \ldots, x_t] - y[x_s, \ldots, x_{t-1}]}{x_t - x_s} \qquad \text{(I.5.4)}$$

Xildebrandni qarang, 1956), shuning uchun *ajratilgan farqlar* deb nomlanadi. (I5.4) chi tenglamadan foydalanib, ajratilgan farqlar jadvlini tuzamiz, biz qabul qilgan belgilarni saqlash maqsadida, $y_i=y[x_i]$ deb yozamiz:

x qiymatlari	y qiymatlari	1-chi ayirmalar qiymati	2-chi ayirmalar qiymati	3-chi ayirmalar qiymati
x_0	$y[x_0]$			
		$y[x_0, x_1]$		
x_1	$y[x_1]$		$y[x_0, x_1, x_2]$	
		$y[x_1, x_2]$		$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$y[x_2]$		$y[x_1, x_2, x_3]$	
		$y[x_2, x_3]$		
x_3	$y[x_3]$			

Bu belgilarda formula (I5.2) quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

Misol

y(6) uchun interpolyatsiya qilingan qiymatni qayta hisoblaymiz, 287-betdagi jadvalga qarang. (I5.4) tenglamasi yordamida ajratilgan farqlar sonli qiymat jadvali (292-betga qarang) kelib chiqadi. Demak, (I5.5)chi formula quyidagi ko`rinishga ega bo`lgan interpolyatsion polinomni beradi

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.6931 + (x-2)\,0.3466 - (x-2)(x-4)\,0.0412 + \\ &+ (x-2)(x-4)(x-5)\,0.0016 = \\ &= 0.6931 + (x-2)[0.3466 + (x-4)[-0.0412 + (x-5)\,0.0046]]. \end{aligned}$$

Polinomni bunday shaklda tasvirlash, minimal ko`paytirish harakatlarni bajarib, uni

$$p(x) = y[x_0] + (x-x_0)\,y[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\,y[x_0, x_1, x_2] + \ldots \\ \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,y[x_0, x_1, \ldots, x_n]. \qquad \text{I}$$

hisoblashga yo`l beradi; bu uchun hisoblarni eng ichki qavslardan boshlash kerak. $x=6$ bo`lganida quyidagi qiymat kelib chiqadi

$$y(6) \simeq p(6) = 1.7867$$

Funksiya $y=log_e x$ ajratilgan farqlar jadvali

x	y	1-chi		
2	0.6931			
		$\frac{1.3863-0.6931}{4-2}=0.3466$		
4	1.3863		$\frac{0.2231-0.3466}{5-2}= =-0.0412$	
		$\frac{1.6094-1.3863}{5-4}=0.2231$		$\frac{-0.0183+0.0412}{7-2}= =0\ 0046$
5	1.6094		$\frac{0.1682-0.2231}{7-4}= =-0.0183$	
		$\frac{1.9459-1.6094}{7-5}=0\ 1682$		
7	1.9459			

Oxirgi sonlarni har xilliga qaramasdan, bu yaxlit qilish xatoliklari bilan izohlabadi, bu natija Lagranjni intrpolyatsion formulasi yordami bilan olingan natijasi bilan to`g`ri keladi. Bunday natija bo`lish ayon edi, chunki ikkita usul ekvivalent.

Agar Lagranj usuli bilan ajratilgan farqlar bilan interpolyasiyani taqqoslasak, ohirgisi kata ustunlikka ega bo`lganligini ko`rish mumkin, ya`ni: har bir $x$ qiymati uchun interpolyatsiya polinomini hisoblash ancha osonroq. Agar oldindan ajratilgan farqlar jadvalini tuzsak, bizning misolimizda ko`rsatilgandek, bunda minimum arifmetik harakatlarni bajarib, har qanday qiymatlar sonini interpolyatsiya qilish mumkin.

Boshqa usullar ham mavjud, masalan, Nevill va Eytken usullari, bu usullarda interpolyatsiya qilinadigan qiymatlar iteratsiya yordamida hisoblanadi. Masalan, x_0 va x_1 orasida x nuqtasida y qiymatini topish kerak. Birinchi iteratsiya (x_0, y_0) va (x_1, y_1) orasidagi chiziqli interpolyatsiya bilan mos kattalikni beradi. Keyingi iteratsiyalar uchta nuqtqtalarda kvadratik interpolyatsiyaga, to`rtta nuqtadan kub shakldagi interpolyatsiyaga mos natijalarni beradilar. Yaqinlashish natijalarni ketma-ketlik ravon to`g`ri kelishi, eng so`nggi xato kichikligi haqida dalolat beradi, ammo har bir x qiymati uchun bu uzoq cho`zilgan tadbirni boshidan oxirgacha yangidan o`tkazish kerak. Bu usul haqida batafsilroq Xildebrand (1956) ni qarang.

Bizning ajratilgan farqlar usulini tahlil qilish yakunida, *B*-splaynlar nazariyasiga tegishli fundamental natijani isbotlaymiz (6.24 chi bo`lim).

Teorema. n darajali $p(x)$ polinomi uchun hamma n-*e* ajratilgan farqlar teng, shunday qilib hamma n+1-e ajratilgan farqlar nolga teng.

Isbot. $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ bo`lsin. Birinchi bo`lingan *p(x)* polinom ayirmasi x_0 va ixtiyoriy x nuqta orasida quyidagi formula bilan ifodalanadi

$$p[x_0,\ x]=\frac{p[x]-p[x_0]}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\sum_{i=0}^{n} a_i\,(x^i-x_0^i)=$$

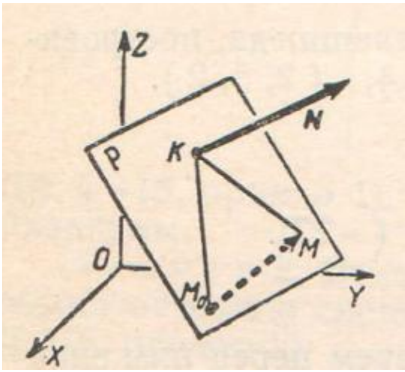
$$=\sum_{i=0}^{n} a_i\,(x^{i-1}+x_0x^{i-2}+\ldots+x_0^{i-1}).$$

Bu n-1 darajali x dan polinom. Shu tarzda ikkinchi ajratilgan farqlar $p[x_0,x_1,x]$ x dan n-2 darajali polinom bo`ladi. Shu fikrni davom etganda, *n-li* ajratilgan farqlar $p[x_0,x_1,..,x_{n-1},\ x]$ $x$ dan nol darajali polinomi bo`ladi va shuning uchun hamma x uchun doimiy qiymatga ega. Shundan bevosita har qanday $n+1$-li $p(x)$ polinomi nolga tengligi kelib chiqadi.

14. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA

14.1. Tekislik tenglamasi

A. D orqali $(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ qiymati ifodalangan, $M_0(x_0;\ y_0;\ z_o)$ nuqtasidan o'tayotgan va $\boldsymbol{N}\ \{A, B, C\}$ vektoriga perpendikulyar bo'lgan tekislik (162-chizma) birinchi darajadagi



$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0, \quad (1)$$

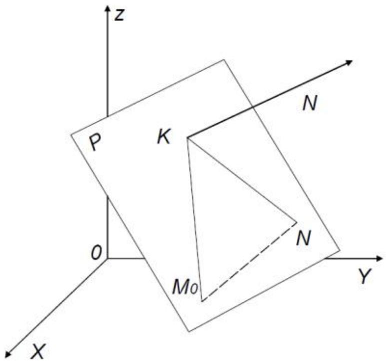
yoki

$$A_x + B_y + C_z + D = 0, \quad (2)$$

tenglamalari orqali ifodalanadi [1]).

$\boldsymbol{N}\ \{A, B, C\}$ vektori P tekislikning *normal vektori* deb ataladi.

162-chizma.



1 – izoh. "P tekisligi tenglama (1) orqli ifodalanadi" iborasi quyidagilarni anglatadi: 1) P tekisligi M har bir nuqtasining x, y, z koordinatalari tenglamani (1) qondiradi; 2) P tekisligida yotmaydigan har qanday nuqtaning x, y, z koordinatalari ushbu tenglamani qondirmaydi (§ 8 ni solishtiring).

B. Har qanday $A_x + B_y + C_z + D = 0$ birinchi darajadagi tenglama (A, B va C birdaniga nolga teng emas) tekislikni ifodalaydi.

Tenglamalar (1) va (2) vektor shaklida quyidagi ko'rinishga ega:

$$\boldsymbol{N}\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) = 0, \quad (1a)$$

$$\boldsymbol{N_r} + D = 0 \quad (2a)$$

($\boldsymbol{r_0}$ va $\boldsymbol{r}$ – M_0 va M nuqtalarining radius-vektorlari; $D = -\boldsymbol{N}\boldsymbol{r_0}$).

---

1) Tenglama (1) $N = \{A, B, C\}$ va $M_0M = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ vektorlarining perpendikulyarlik shartidir. §§ 108 va 99 ni qarang.

Misol. (2; 1; -1) nuqtasi orqali o'tadigan va $\{-2,4,3\}$ vektoriga perpendikulyar bo'lgan tekislik

$$-2(x-2)+4(y-1)+3(z+1)=0,$$

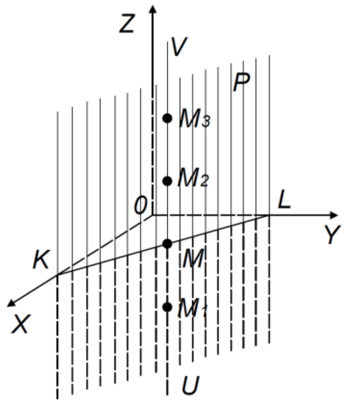
yoki

$$-2x+4y+3z+3=0$$

tenglamasi orqali ifodalanadi.

2 – izoh. Bitta tekislikni barcha koeffitsentlari va erkin hadi mos ravishda proporstsional bo'lgan ko'pgina tenglamalar orqali ifodalash mumkindir (pastda § 125 ni qarang, izoh).

14.2. Koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislik holatining alohida hollari



163-chizma.

1. $A_x + B_y + C_z = 0$ tenglamasi (erkin had $D=0$) boshidan o'tadigan tekislikni ifodalaydi.

2. $A_x + B_y + D = 0$ tenglamasi (koeffitsient $C=0$) *OZ* o'qiga parallel, $A_x + C_z + D = 0$ tenglamasi – *OY* o'qiga parallel, $B_y + C_z + D = 0$ tenglamasi *OX* o'qiga parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi.

Eslab qolish foydali: agar tenglamada *z* harfi bo'lmasa, tekislik *OZ* o'qiga parallel bo'ladi va hk.

Misol. $x+y-1=0$ tenglamasi *OZ* o'qiga parallel bo'lgan P tekislikni ifodalaydi (163-chizma).

Izoh. Analitik geometriyada tekislikdagi $x+y-1=0$ tenglamasi *to'g'ri chiziqni* (163-chizmada *KL*) ifodalaydi. Xuddi shu tenglama nima uchun fazoda *tekislikni* ifodalashini tushuntiramiz.

KL to'g'ri chizig'ida birorta *M* nuqtasini olamiz. *M* nuqtasi *XOY* tekisligida yotganligi sababli, uning uchun *z=0*. *XOY* sistemasida *M* nuqtasi $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$ koordinatalarga ega deb hisoblaymiz (ular $x+y-1=0$ tenglamasini qondiradi). Unda *OXYZ* fazoviy sistemasida M nuqtasining koordinatalari $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, z=0$ ga teng bo'ladi. Ushbu koordinatalar $x+y-1=0$ tenglammasini qondiradi (yanada ravshan bo'lishi uchun uni $1x+1y+0\cdot z-1=0$ shaklida yozib olamiz). Endilikda $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$, lekin $z\neq 0$ bo'lgan nuqtalarni, masalan $M_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right), M_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), M_3\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ va hk. nuqtalarni ko'rib chiqamiz

(163-chizmani qarang). Ularning koordinatalari ham $1x + 1y + 0 \cdot z - 1 = 0$ tenglamasini qondiradi. Ushbu nuqtalar *M* dan o'tadigan *UV* "vertikal" to'g'ri chizig'ini to'ldiradi. Xuddi shunday vertikal to'g'ri chiziqlarni *KL* to'g'ri chizig'ining barcha nuqtalari uchun chizish mumkin. Barchasi bo'lib ular *P* tekisligini to'ldiradi.

Fazoviy koordinatalar sistemasida *KL* to'g'ri chizig'ini qanday ifodalash haqida pastda aytilgan (§140, 4-misol).

3. $A_x + D = 0$ $(B = 0, C = 0)$ tenglamasi ham *OY*, ham *OZ* (2-bandni qarang) o'qiga parallel, ya'ni *YOZ* koordinata tekisligiga parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi.

Xuddi shunday, $B_y + D = 0$ tenglamasi *XOZ* tekisligiga parallel, $C_z + D = 0$ tenglamasi *XOY* tekisligiga parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi (§ 15 ni solishtiring).

4. *X=0, Y=0, Z=0* tenglamalari mos ravishda *YOZ, XOZ, XOY* tekisliklarini ifodalaydi.

14.3. Tekisliklarning parallellik sharti

Agar

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ va } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tekisliklari parallel bo'lsa, $\boldsymbol{N_1}\{A_1, B_1, C_1\}$ va $\boldsymbol{N_2}\{A_2, B_2, C_2\}$ normal vektorlari kollinear (va teskari) bo'ladi. Shuning uchun (§ 102) parallellik sharti (zarur va to'liq) quyidagi ko'rinishga egadir:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

1-misol. $2x - 3y - 4z + 11 = 0$ va $-4x + 6y + 8z + 36 = 0$

tekisliklari paralleldir, chunki $\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{8}{-4}$.

2-misol.

$2x - 3z - 12 = 0$ $(A_1 = 2, B_1 = 0, C_1 = -3)$ va $4x + 4y - 6z + 7 = 0$ $(A_2 = 4, B_2 = 4, C_2 = -6)$ parallel emas, chunki $B_1 = 0$, lekin $B_2 \neq 0$ (§ 102, izoh).

Izoh. Agar nafaqat koordinatalardagi koeffitsientlar, balki erkin hadlar ham proportsional bo'lsa, ya'ni agar

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_z}{D_1}$$

bo'lsa, tekisliklar mos keladi. Shunday qilib,

$$3x + 7y - 5z + 4 = 0 \text{ va } 6x + 14y - 10z + 8 = 0$$

tenglamalari bitta tekislikni ifodalaydi. § 18 ni solishtiring, 3-izoh.

14.4. **Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti**

Agar

$$A_1x+B_1y+\ C_1z+D_1=0 \text{ va } A_2x+B_2y+\ C_2z+D_2=0$$

tekisliklari perpendikulyar bo'lsa, $\boldsymbol{N_1}\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\boldsymbol{N_2}\{A_2,B_2,C_2\}$ normal vektorlari ham perpendikulyar (va teskari) bo'ladi. Shuning uchun (§ 108) perpendikulyarlik sharti (zarur va to'liq) quyidagi ko'rinishga egadir:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

1-misol.

$$3x-2y-2z+7=0 \text{ va } 2x+2y+z+4=0$$

tekisliklari perpendikulyardir, chunki $3\cdot 2+(-2)\cdot 2+(-2)\cdot 1=0$.

2-misol.

$$3x-2y=0\ (A_1=3, B_1=-2, C_1=0)$$

va

$$z=0\ (A_2=0, B_2=0, C_2=1$$

tekisliklari perpendikulyardir.

14.5. Ikkita tekislik o'rtasidagi burchak

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \tag{1}$$

va

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{2}$$

ikkita tekislik juftlikda teng bo'lgan to'rtta ikki yo'qli burchak hosil qiladi. Ulardan biri $\boldsymbol{N_1}\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\boldsymbol{N_2}\{A_2,B_2,C_2\}$ normal vektorlari o'rtasidagi burchakka tengdir. Har qanday ikki yo'qli burchakni φ orqali ifodalab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3}$$

Yuqoridagi belgini tanlab, *cos* $(\widehat{\boldsymbol{N_1},\boldsymbol{N_2}})$ ga ega bo'lamiz, pastdagisini tanlab, - *cos* $[180^0-\ (\boldsymbol{N_1},\boldsymbol{N_2})]$ ga ega bo'lamiz.

Misol. $x-y+\sqrt{2z}+2=0$ va $x+y+\sqrt{2z}-3=0$ tekisliklari o'rtasidagi burchak

$$cos\varphi=\pm\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+(\sqrt{2})^2}\sqrt{1+1+(\sqrt{2})^2}}=\pm\frac{1}{2}$$

tengligi orqali aniqlanadi.

$\varphi=60^0$ yoki $\varphi=120^0$ ni olamiz.

Agar $\boldsymbol{N_1}$ vektori *OX*, *OY*, *OZ* o'qlari bilan α_1, β_1, γ_1 burchaklarini, $\boldsymbol{N_2}$ vektori esa α_2, β_2, γ_2 burchaklarini hosil qilsa, quyidagi kelib chiqadi:

$$cos\varphi = \pm(cos\alpha_1 cos\alpha_2 + cos\beta_1 cos\beta_2 + cos\gamma_1 cos\gamma_2). \quad (4)$$

§ 101 ning (3) va (1) – (3) formulalaridan kelib chiqadi.

14.6. Berilgan tekislikka parallel ravishda berilgan nuqtadan o'tgan tekislik

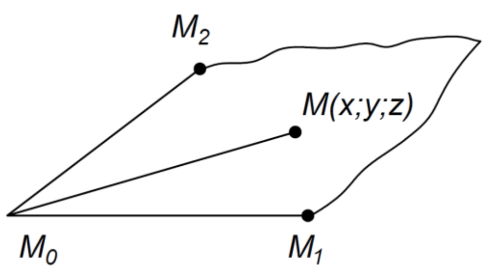
$M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ nuqtasidan o'tgan va $A_x + B_y + C_z + D = 0$ tekisligiga parallel bo'lgan tekislik quyidagi tenglama bilan ifodalanadi: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$

§§ 123 va 125 dan kelib chiqadi.

Misol. (2; -1; 6) nuqtasidan o'tgan va $x + y - 2z + 5 = 0$ tekisligiga parallel bo'lgan tekislik $(x-2) + (y+1) - 2(z-6) = 0$ tenglamasi bilan ifodalanadi, ya'ni $x + y - 2z + 11 = 0.$

14.7. Uchta nuqtadan o'tgan tekislik

Agar $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ nuqtalari bitta to'g'ri chiziqda yotmasa, unda ularning o'rtasidan o'tgan tekislik (164-chizma) quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:



164-chizma.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Ushbu tenglama $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}$ vektorlarining komplanarligini ifodalaydi.

Misol. $M_0(1;\ 2;\ 3)$, $M_1(2;\ 1;\ 2)$, $M_2(3;\ 3;\ 1)$ nuqtalari bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi, chunki $\overrightarrow{M_0M_1}\{1,-1,-1\}$ va $\overrightarrow{M_0M_2}\{2,1,-2\}$ vektorlari kollinear emas. $M_0M_1M_2$ tekisligi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

ya'ni

$x + z - 4 = 0.$

Izoh. Agar M_0, M_1, M_2 nuqtalari bitta to'g'ri chiziqda yotsa, tenglama (1) ayniyatga aylanadi.

14.8. O'qlardagi kesmalar

Agar $A_x + B_y + C_z + D = 0$ tekisligi *OX* o'qiga parallel bo'lmasa (ya'ni $A \neq 0$; §124), unda u shu o'qda $a = -\frac{D}{A}$ kesmasini kesib o'tadi. Xuddi shunday, OY, OZ o'qlaridagi kesmalar $b = -\frac{D}{B}$ (agar $B \neq 0$) va $c = -\frac{D}{C}$ (agar $C \neq 0$) bo'ladi (§ 32 ni solishtiring).

Misol. $3x + 5y - 4z - 3 = 0$ tekisligi o'qlarda $a = \frac{3}{3} = 1,\ b = \frac{3}{5},\ c = -\frac{3}{4}$ kesmalarini kesib o'tadi.

14.9. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi

Agar tekislik o'qlarda *a, b, c* kesmalarini (nolga teng bo'lmagan) kesib tashlasa, uni "tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi" deb ataladigan quyidagi tenglama orqali ifodalash mumkin:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (1)$$

Tenglamani (1) uchta (a; 0; 0), (0; b; 0) va (0; 0; c) nuqtadan o'tadigan tekislik tenglamasidek olish mumkin (§ 129 ni qarang).

Misol. $3x-6y+2z-12=0$ tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasini yozing.

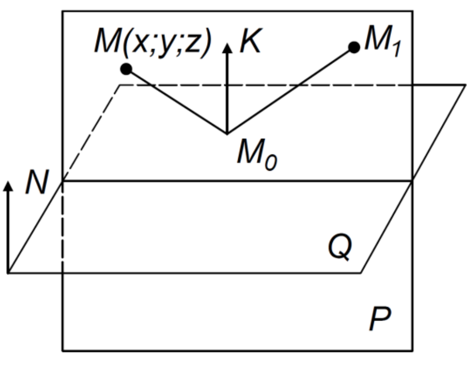
$a=4, b=-2, c=6$ ni topamiz (§130). Kesmalar bo'yicha tenglamasi:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1.$$

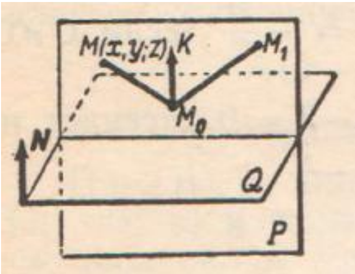
1-izoh. Koordinatalarning boshidan o'tgan tekislikni kesmalar bo'yicha tenglama orqali ifodalab bo'lmaydi.

2-izoh. *OX* o'qiga parallel, lekin ikkita boshqa o'qlarga parallel bo'lmagan tekislikni quyidagi tenglama bilan ifodalash mumkin: $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, bu yerda *b* va *c* – *OY* va *OZ* o'qlaridagi kesmalardir. Abstsissa va ordinata o'qiga parallel bo'lgan tekislikni quyidagi tenglama bilan ifodalash mumkin: $\frac{z}{c}=1$. Xuddi shunday, boshqa o'qlarga, bittasiga yoki ikkitasiga parallel bo'lgan tekisliklarni ifodalash mumkin (§ 33 ni solishtiring, 2 - izoh).

14.10. Berilgan tekislikka perpendikulyar ravishda ikkita nuqtadan o'tgan tekislik



$Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasi bilan berilgan Q tekisligiga perpendikulyar, $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, va $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ikkita nuqtalardan o'tgan



165-chizma.

P tekisligi (165-chizma) quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Ushbu tenglama $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}\ va\ \boldsymbol{N}\{A, B, C\} = \overrightarrow{M_0K}$ vektorlarining komplanarligini ifodalaydi.

Misol. $3x + 4y + z - 6 = 0$ tekisligiga perpendikulyar, $M_0(1; 2; 3)$ va $M_1(2; 1; 1)$ nuqtalaridan o'tgan tekislik quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 - 1 & 1 - 2 & 1 - 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ya'ni $x - y + z - 2 = 0.$

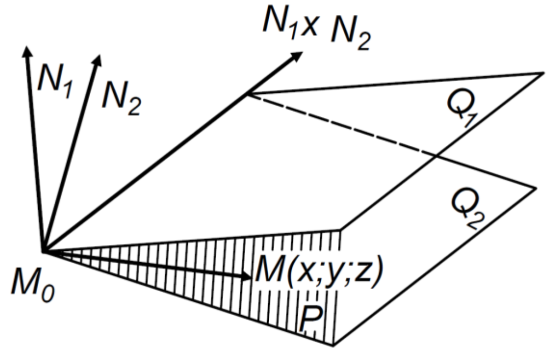
Izoh. M_0M_1 to'g'ri chizig'i Q tekisligiga perpendikulyar bo'lgan holda, P tekisligi noaqniqdir. Shunga ko'ra tenglama (1) ayniyatga aylanadi.

14.11. Ikkita tekislikka perpendikulyar ravishda berilgan nuqtadan o'tgan tekislik

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ikkita (parallel bo'lmagan) Q_1, Q_2 tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan va $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtasidan o'tgan P tekisligi quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

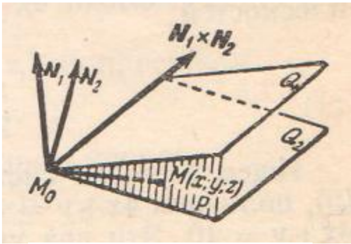
Ushbu tenglama $\overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{N_1}\{A_1, B_1, C_1\}$ va $\boldsymbol{N_2}\{A_2, B_2, C_2\}$ vektorlarining komplanarligini ifodalaydi [1]).



Misol/ $x + 2y + z - 4 = 0$ va $2x + y + 3z + 5 = 0$ tekisliklariga perpendikulyar bo'gan va (1; 3; 2) nuqtasidan o'tgan tekislik quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ya'ni $5x - y - 3z + 4 = 0$.



166-chizma.

Izoh. Q_1, Q_2 tekisliklari parallel bo'lgan holda, P tekisligi noaqniqdir. Shunga ko'ra tenglama (1) ayniyatga aylanadi.

14.12. Uchta tekislikning kesishgan nuqtasi

Uchta tekislik birorta ham umumiy nuqtaga ega bo'lmasligi mumkin (agar kamida ulardan ikkitasi parallel bo'lsa hamda ularning kesishma to'g'ri chiziqlari parallel bo'lsa), son-sanoqsiz ko'p umumiy nuqtalarga ega bo'lishi mumkin (agar ularning hammasi bitta to'g'ri chiziqdan o'tsa) yoki bitta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin. Birinchi holda

$$A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3x + C_3z + D_3 = 0,$$

tenglamalar sistemasi yechilishiga ega emas, ikkinchi holda – son-sanoqsiz ko'p yechilishilarga ega, uchinchi holda – bitta yechilishiga egadir. Tekshirish uchun aniqlovchilarni qo'llash juda qulaydir (§183, 190), ammo boshlang'ich algebra vositalari bilan ham amallash mumkin.

1-misol.

$$7x - 3y + z - 6 = 0, \quad (1)$$
$$14x - 6y + 2z - 5 = 0, \quad (2)$$
$$x + y - 5z = 0, \quad (3)$$

tekisliklari umumiy nuqtalarga ega emas, chunki tekisliklar (1) va (2) paralleldir (§ 125). Tenglamalar sistemasi nomuvofiqdir [tenglamalar (1) va (2) bir-biriga zid].

2-misol. Uchta tekislik

$$x + y + z = 1, \tag{4}$$
$$x - 2y - 3z = 5, \tag{5}$$
$$2x - y - 2z = 8 \tag{6}$$

umumiy nuqtaga egaligini tekshirish.

(4) - (6) sistemasining yechilishiini qidiramiz. z ni (4) va (5) dan chiqarib, $4x + y = 8$ ni; z ni (4) va (6) dan chiqarib, $4x + y = 10$ ni olamiz. Ushbu ikkita tenglama nomuvofiqdir. Demak, uchta tekislik umumiy nuqtaga ega emas. Ular orasida parallel tekisliklar bo'lmagani uchun, tekisliklar juftlikda kesishgan uchta to'g'ri chiziq paralleldir.

3-misol. $x + y + z = 1,\ x - 2y - 3z = 5,\ 2x - y - 2z = 6$ tekisliklari umumiy nuqtalarga egaligini tekshirish.

2-misolda keltirilgani kabi yo'l tutib, ikki marta $4x + y = 8$ ga ega bo'lamiz,

ya'ni aslida ikkita emas, bitta tenglama. U son-sanoqsiz ko'p yechilishilarga egadir. Demak, uchta tekislik son-sanoqsiz ko'p umumiy nuqtalarga ega, ya'ni bitta to'g'ri chiziqdan o'tadi.

4-misol. $x - y + z = 1,\ x + 2y - 1 = 0,\ x + y - z + 2 = 0$ tekisliklari bitta umumiy nuqtaga (-1; 1; 2) ega, negaki tenglamalar sistemasi yagona yechilishiga ega^ $x = -1, y = 1, z = 2$.

14.13. Tekislik va nuqtalar juftligining o'zaro joylashuvi

$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1),\ M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtalari va

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

tekisligining o'zaro joylashuvini quyidagi belgilar orqali aniqlash mumkin (§ 27 ni solishtiring):

a) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ va $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ sonlari bir xil belgiga ega bo'lsa, M_1 va M_2 tekislikning (1) bir tomonida yotadi.

b) ushbu sonlar qarama-qarshi belgiga ega bo'lsa, M_1 va M_2 tekislikning (1) turli tomonlarida yotadi.

d) ushbu sonlardan biri (yoki ikkalasi) nolga teng bo'lsa, M_1, M_2 nuqtalardan biri (yoki ikkalasi) tekislikda yotadi.

1-misol. (2; 3; 3) va (1; 2; -1) nuqtalari $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ tekisligining bir tomonida joylashgan, chunki 6·2+3·3+2·3-6=21 va 6·1+3·2+2(-1)-6=4 sonlarning ikkalasi ham musbatdir.

2-misol. Koordinatalarning boshi (0; 0; 0) va (2; 1; 1) nuqtasi $5x + 3y - 2z - 5 = 0$ tekisligining turli tomonlarida yotadi, chunki 5·0+3·0-2·0-5=-5 va 5·2+3·1-2·1-5=6 sonlari qarama-qarshi belgilarga egadir.

14.14. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nuqtasidan

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

tekisligigacha bo'lgan *d* masofa

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad (2)$$

ya'ni

$$d = |\delta| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3)$$

kattaligining absolyut qiymatiga teng (§ 28 ni solishtiring).

Misol. (3; 9; 1) nuqtasidan $x - 2y + 2z - 3 = 0$ tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

Yechilishi.

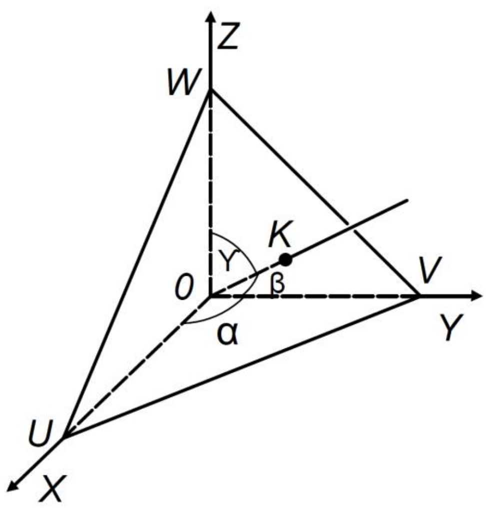
$$\delta = \frac{y_1 + 2y_1 + 2z_1 - 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1 \cdot 3 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 1 - 3}{3} = -5\frac{1}{3},$$

$$d = |\delta| = 5\frac{1}{3}.$$

1-izoh. δ kattaligining belgisi bo'yicha M_1 nuqtasi va O boshining tekislikka nisbatan joylashishi haqida fikr yuritish mumkin (§ 28 ni solishtiring, 1-izoh).

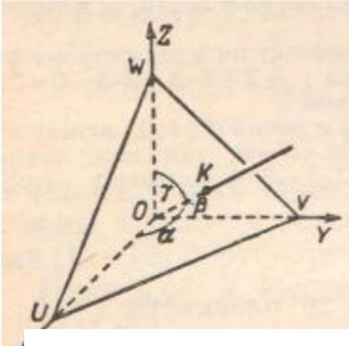
2-izoh. § 28 ning 2-izohida keltirilgani kabi fikr yurgizib, formulani (3) analitik usulda chiqarish mumkin. Tekislikka (1) perpendikulyar, M_1 nuqtasidan o'tgan to'g'ri chiziqning tenglamasini parametrik shaklda olish qulaydir (§§ 153, 156 ni qarang).

14.15. Tekislikning qutbli parametrlari



UVW tekisligining (167-chizma) *qutbli masofasi* deb *O* boshidan tekislikka o'tkazilgan *OK* perpendikulyarining *p* masofasiga aytiladi. Qutbli masofa musbat yoki nolga teng bo'ladi.

Agar *UVW* tekisligi boshidan o'tmasa, *OK* perpendikulyarida musbat yo'nalish sifatida $\overrightarrow{OK}$ vektorining yo'nalishi qabul qilinadi. Agar *UVW* tekisligi boshidan o'tsa, musbat yo'nalish perpendikulyarda ixtiyoriy tanlanadi.



167-chizma.

UVW tekisligining *qutbli burchaklari* deb *OK* to'g'ri chizig'i va koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi o'rtasidagi

$$\alpha =< XOK, \beta =< XOK, \gamma =< ZOK$$

burchaklarga aytiladi (ushbu burchaklar musbat va 180^0 dan oshmaydigan hisoblanadi). α, β, γ burchaklari $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$ nisbati bilan bog'liqdir (§ 101).

Qutbli masofa *p* va qutbli α, β, γ burchaklar *UVW* tekisligining qutbli parametrlari deb ataladi.

Agar *UVW* tekisligi $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasi orqali berilgan bo'lsa, uning qutbli parametrlari quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} cos\alpha &= \mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ cos\beta &= \mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ cos\gamma &= \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

D>0 bo'lsa, yuqoridagi belgilar, *D<0* bo'lsa, pastki belgilar olinadi. Agar *D=0* bo'lsa, faqat yuqoridagi va pastki belgilar ixtiyoriy ravishda olinadi.

[1)] § 29 ni solishtiring.

1-misol. $x - 2y + 2z - 3 = 0$ (*A=1, B=-2, C=2, D=-3*) tekisligining qutbli parametrlarini toping.

Yechilishi. Formula (1)

$$p = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

ni beradi. Pastki formulalarni olish kerak bo'lgan (chunki *D=-3<0*) formulalar (2)

$$cos\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3},$$

$$cos\beta = \mp\frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3},$$

$$cos\gamma = \mp\frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$$

ni beradi. Demak,

$$\alpha \approx 70^0 32', \beta \approx 131^0 49', \gamma \approx 48^0 11'.$$

2-misol. $x - 2y + 2z = 0$ tekisligining qutbli parametrlarini toping.

Fomula (1) *p=0* ni beradi (tekislik boshidan o'tadi); formulalarda (2) yoki faqat yuqoridagi, yoki faqat pastki belgilarni olish mumkin. Birinchi holda

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \cos\beta = +\frac{2}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3},$$

demak,

$$\alpha \approx 109^0 28', \beta \approx 48^0 11', \gamma \approx 131^0 49',$$

ikkinchi holda

$\alpha \approx 70^0 32', \beta \approx 131^0 49', \gamma \approx 48^0 11'$

bo'ladi.

14.16. Tekislikning normal tenglamasi

Qutbli masofa *p* (§ 137) va qutbli α, β, γ burchaklarga ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; § 101) ega tekislik

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (1)$$

tenglamasi orqali ifodalanadi. Ushbu tenglama tekislikning *normal tenglamasi* deb ataladi.

1- misol. Qutbli masofasi $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ga teng, barcha qutbli burchaklari esa o'tmas va o'zaro teng bo'lgan tekislikning normal tenglamasini tuzing.

Yechilishi. α=β=γ da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ sharti $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ni beradi, α, β, γ burchaklari esa o'tmas bo'lganligi sababli, minus belgisini olish kerak. Izlangan tenglama – bu $-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ dir.

Izoh. Xudi shu tekislik $x + y + z + 1 = 0$ tenglamasi orqali ham ifodalanadi (oldingi tenglamaning ikkala qismi $-\sqrt{3}$ ga ko'paytirilgan), ammo ushbu tenglama – normal emas, chunki koordinatalarning koeffitsientlari qutbli burchaklarning kosinuslarimas (ular kvadratining yig'indisi 1 ga teng emas) va hamda erkin hadi musbatdir.

2-misol. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 5 = 0$ tenglamasi normal emas, chunki $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$ bo'lsa ham, erkin hadi erkindir.

3-misol. $-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$ tenglamasi normaldir; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}, p = 5(\alpha \approx 109^0 28', \beta \approx 48^0 11', \gamma \approx 131^0 49')$.

Tenglamani (1) chiqarish. Ko'rib chiqilayotgan tekislik (167-chizmadagi *UVW*) *K* nuqtasidan o'tadi ($p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma$) va $\overrightarrow{OK}$ vektoriga perpendikulyardir. $\overrightarrow{OK}$ ni o'rniga masofasi masshtabning birligiga teng bo'lgan xuddi o'sha yo'nalishdagi ***a*** vektorini olish mumkin. ***a*** vektorining koordinatalari $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ (§ 101). Tenglamani (1) qo'llab § 101, normal tenglamani (1) olamiz.

14.17. Tekislik tenglamasini normal ko'rinishga keltirish

$Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasi orqali berilgan tekislikning normal tenglamasini topish uchun, berilgan tenglamaning ikkala qismini $\mp\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ga bo'lish yetarlidir, bunda *D>0* bo'lsa, yuqoridagi belgi, *D<0* bo'lsa, pastki belgi olinadi; agarda *D=0* bo'lsa, istalgan belgini olish mumkin.

$\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x \mp \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y \mp \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z - \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$ tenglamasini olamiz.

Ushbu tenglama normal, chunki (2) *x, y, z* da koeffitsientlar mos ravishda $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ ga teng, § 137 (1) sababli esa, erkin had *–p* ga tengdir.

1-misol.

$$x - 2y + 2z - 6 = 0 \qquad (1)$$

tenglamasini normal ko'rinishga keltiring. Tenglamaning ikkala qismini $\sqrt{+1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ ga bo'lamiz (radikal oldidan plyus belgisi turadi, chunki -6 - erkin had manfiydir). Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0.$$

Demak,

p=2, $cos\alpha = \frac{1}{3},\ cos\beta = -\frac{2}{3}, c\,os\gamma = \frac{2}{3}$ $(\alpha \approx 70^0 32', \beta \approx 131^0 49', \gamma \approx 48^0 11')$.

2-misol.

$$x - 2y + 2z + 6 = 0 \qquad (2)$$

tenglamasini normal ko'rinishga keltiring. Ekin hadi musbat. Shuning uchun $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = -3$ ga bo'lamiz. Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 2 = 0.$$

Demak,

p=2,

$cos\alpha = -\frac{1}{3},\ cos\beta = \frac{2}{3}, c\,os\gamma = -\frac{2}{3}$ $(\alpha \approx 109^0 28', \beta \approx 48^0 11', \gamma \approx 131^0 49')$.

3-misol.

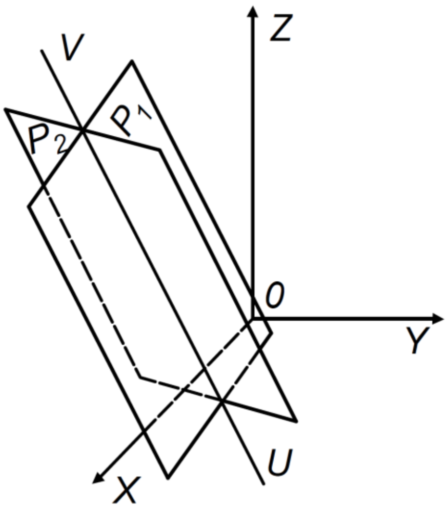
$$x - 2y + 2z = 0$$

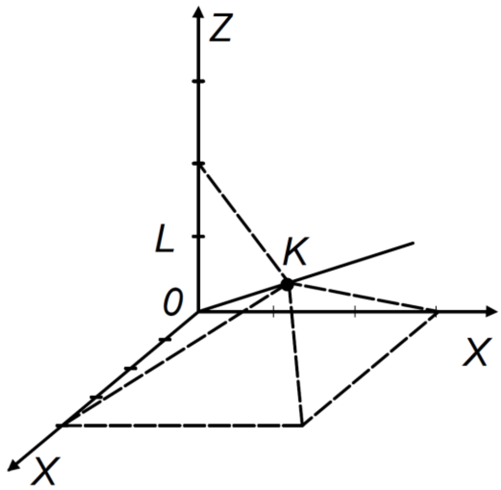
tenglamasini normal ko'rinishga keltiring. D=0 (tekislik boshdan o'tadi) bo'lgani uchun, yoki +3 ga, yoki -3 ga bo'lish mimkin. Yoki $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0$, yoki $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0$ ga ega bo'lamiz. Ikkala holda ham *p=0*. Birinchi holda α, β, γ kattaliklari 1-misolda keltirilgani kabi, ikkinchi holda esa, 2-misolda keltirilgani bo'ladi.

Izoh. Agar $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasidan erkin had manfiy bo'lib, $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ bo'lsa, ushbu tenglama normal hisoblanadi (§ 138, 3-misol) va uni o'zgartirish kerak emasdir.

14.18. Fazoda to'g'ri chiziqning tenglamasi

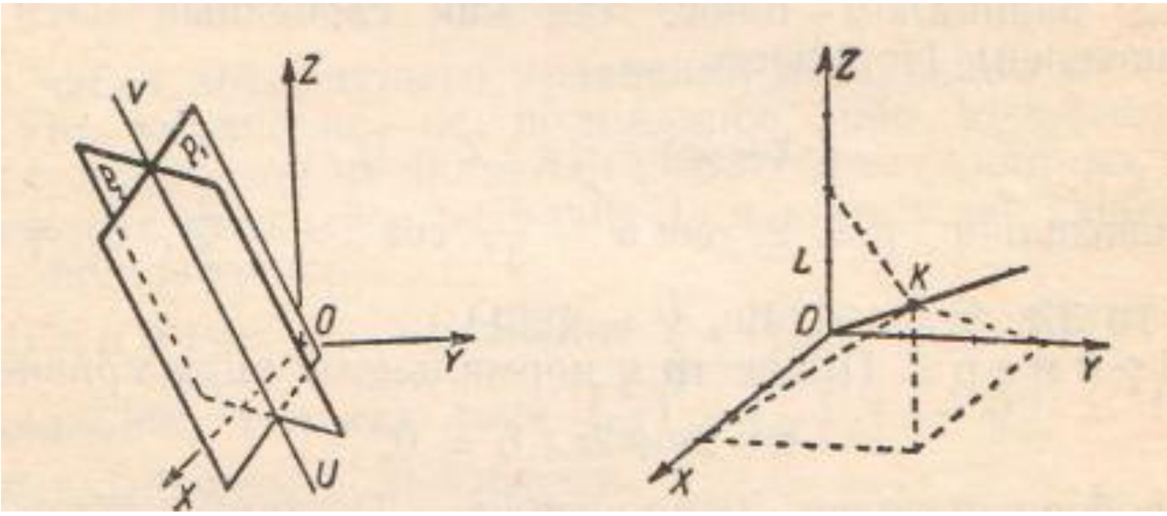
Har qanday *UV* to'g'ri chiziq (168-chizma) *UV* dan o'tgan qandaydir ikkita (turli) P_1 va P_2 tekislikni ifodalovchi ikkita tenglama sistemasi bilan taqdim etiladi:





$$A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0, \quad (1)$$
$$A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0. \quad (2)$$

(1) va (2) tenglamalar (birgalikda olinganda) *UV* to'g'ri chizig'ining tenglamalari deb ataladi.



Izoh. "*UV* to'g'ri chizig'i (1) – (2) sistemasi orqali ifodalanadi" degan ibora quyidagilarni anglatadi: 1) *UV* to'g'ri chizig'ining har qanday *M* nuqtasining *x*, *y*, *z* koordinalari (1) va (2) tenglamalarning ikkalasini ham qondiradi; 2) *UV* da yotmagan har qanday nuqtaning koordinatalari bir vaqtda (1), (2) tenglamalarini qondirmasa-da, ularning birini qondirishi mumkin.

1-misol. *O* boshdan va *K* (4; 3; 2) nuqtasidan o'tgan *OK* to'g'ri chizig'ining (169-chizma) tenglamalarini yozing.

168-chizma. 169-chizma.

Yechilishi. *OK* to'g'ri chizig'i – bu *KOZ* va *KOX* tekisliklarining kesilishidir. *OZ* o'qida qandaydir nuqtani olib, masalan *L* (0; 0; 1), *KOZ* tekisligining tenglamasini tuzamiz (*O*, *K*, *L* uchta nuqtadan o'tgan kabi; § 129). Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ ya'ni } 3x-4y=0. \tag{3}$$

Xuddi shunday KOX tekisligining

$$2y-3z=0 \tag{4}$$

tenglamasini topamiz. *OK* to'g'ri chizig'i (3) – (4) tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

Darhaqiqat, OK to'g'ri chizig'ining har qanday M nuqtai ham KOZ, ham KOX tekisligida yotadi; ya'ni uning koordinatali bir vaqtda (3) va (4) tenglamalarni qondiradi. Boshqa tomondan, OK da yotmagan N nuqtasi bir vaqtda KOZ va KOX ikkala tekislikka tegishli bo'la olmaydi; demak uning koordinatalari bir vatda (3) – (4) tenglamalar sistemasini qondira olmaydi.

2-misol. 1-misolning *OK* to'g'ri chizig'ini

$$\begin{cases} 3x-4y=0, & (3) \\ 2x-4z=0 & (5) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi orqali ifodalash ham mumkin. Ularning birinchisi *KOZ* tekisligini, ikkinchisi *KOY* tekisligini ifodalaydi.

Xuddi shu *OK* to'g'ri chizig'ini $2x-3z=0, 2x-4z=0$ sistemasi orqali ifodalash mumkin.

3-misol. 1-misolda ko'rib chiqilgan *OK* to'g'ri chizig'ida $M_1(2;\ 2;\ 3)$, $M_2(-4;\ -3;\ -3)$, $M_3(-8;\ -6;\ -4)$ nuqtalari yotishini aniqlash.

M_1 nuqtasining koordinatalari na (3), na (4) tenglamani qondirmaydi; M_1 nuqtasi *UV* to'g'ri chizig'ida yotmaydi. M_2 nuqtasining koordinatalari (3) tenglamani qondirib, (4) tenglamani qondirmaydi; M_2 nuqtasi *KOZ* tekisligida yotadi, lekin *KOX* tekisligida yotmaydi; demak, M_2 *OK* da yotmaydi. M_3*OK* da yotadi, chunki (3) va (4) tenglamalarni qondiradi.

4-misol. $z=0$ tenglamasi *XOY* tekisligini ifodalaydi. $x+y-1=0$ tenglamasi *OZ* o'qiga parallel bo'lgan *P* tekisligini ifodalaydi (§ 124, misol). *XOY* va *P* tekisliklari kesishadigan to'g'ri chiziq (163-chizmadagi *KL*) quyidagi sistema orqali ifodalanadi:

$$x+y-1=0,\ z=0.$$

14.19. Birinchi darajali ikkita tenglama to'g'ri chiziqni ifodalovchi shart

Agar A_1, B_1, C_1 koeffitsientlari A_2, B_2, C_2 koeffitsientlariga proportsional bo'lmasa,

$$\begin{cases} A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0, & (1) \\ A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

sistemasi to'g'ri chiziqni ifodalaydi [bu holda (1) va (2) tekisliklari parallel emas (§ 125)].

Agar A_1, B_1, C_1 koeffitsientlari A_2, B_2, C_2 koeffitsientlariga proportsional bo'lib, lekin erkin hadlar $A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1 \neq D_2 : D_1$ proportsiyasiga bo'ysunmasa, sistema nomuvofiq bo'ladi va hech qanday geometrik obrazni ifodalamaydi [(1) va (2) tekisliklari parallel va mos kelmaydi].

Agar barcha A_1, B_1, C_1, D_1 to'rtta kattalik A_2, B_2, C_2, D_2 kattaliklarga proportsional bo'lsa:

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1 = D_2 : D_1,$$

(1), (2) tenglamalardan biri boshqasining natijasidir va sistema tekislikni ifodalaydi [(1) va (2) tekislik mos keladi].

1-misol. $2x - 7y + 12z - 4 = 0, 4x - 14y + 36z - 8 = 0$ sistemasi to'g'ri chiziqni ifodalaydi (ikkinchi tenglamada A va B koeffitsientlari birinchiga nisbatan ikki baravar kattaroq, C koeffitsienti esa – uch baravar).

2-misol. $2x - 7y + 12z - 4 = 0, 4x - 14y + 24z - 8 = 0$ sistemasi tekislikni ifodalaydi (*A*, *B*, *C*, *D* barcha to'rtta kattalik proportsionaldir).

3-misol. $2x - 7y + 12z - 4 = 0, 4x - 14y + 24z - 12 = 0$ sistemasi hech qanday geometrik obrazni ifodalamaydi (*A*, *B*, *C* proportsional, *D* esa xuddi o'sha proportsiyaga bo'ysunmaydi; sistema nomuvofiqdir).

14.20. To'g'ri chiziqni tekislik bilan kesilishi

L to'g'ri chizig'i

$$\begin{cases} A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0, & (1) \\ A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

va P tekisligi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

bitta ham umumiy nuqtaga ega bo'lmasligi (agar $L||P$ bo'lsa), son-sanoqsiz ko'p nuqtalarga ega bo'lishi (agar P da L yotsa) yoki faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin. Masala (1), (2), (3) uchta tekisliklarning umumiy nuqtalarini topishga taqaladi [1]) (§ 134 ni qarang).

1-misol.

$$x + y + z - 1 = 0, \qquad x - 2y - 3z - 5 = 0$$

tog'ri chizig'i

$$2x - y - 2z - 8 = 0$$

tekisligi bilan umumiy nuqtalarga ega emas (ular parallel) (§ 134, 2-misolni qarang).

2-misol.

$x - 2y - 3z - 5 = 0, \qquad 2x - y - 2z = 6$

tog'ri chizig'i $x + y + z = 1$ tekisligiga yotadi (§ 134, 3-misolni qarang).

3-misol. $x + y - z + 2 = 0,\ x - y + 2 = 0$ to'g'ri chizig'i $x + 2y - 1 = 0$ tekisligi bilan (-1; 1; 2) nuqtasida kesishadi ((§ 134, 4-misolni qarang).

4-misol. L to'g'ri chizig'ida birorta nuqtaning koordinatalarini aniqlang:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 + 3 = 0, \\ 5x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

x koordinatasiga qandaydir qiymatni beramiz, masalan, $x=3$. $-3y - z + 9 = 0, -y + z + 7 = 0$ sistemasiga ega bo'lamiz. Uni yechib, $y = 4,\ z = -3$ ni topamiz. (3; 4; -3) nuqtasi L to'g'ri chizig'ida yotadi (*YOZ* ga parallel bo'lgan, $x=3$ tekisligi bilan kesishganida). Xuddi shunday ravishda, $x=0$ olib, $(0; -\frac{5}{4}; \frac{27}{4})$ nuqtasini L ni *YOZ* tekisligi bilan kesishganida topamiz va hk. Xuddi shunday, y yoki z koordinatasiga turli qiymatlarni berish mumkin.

5-misol. L to'g'ri chizig'ida birorta nuqtaning koordinatalarini aniqlang:

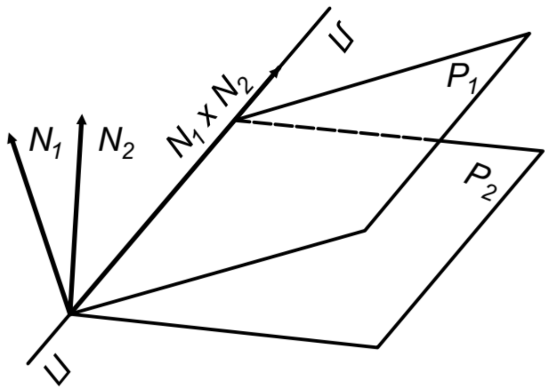
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 4 = 0, \\ 8x - 6y + 4z - 3 = 0. \end{cases}$$

Oldingi misolga teskari, bu yerda x koordinatasiga ixtiyoriy qiymat berish mumkin emas. Shunday qilib, $x=0$ da nomuvofiq bo'lgan

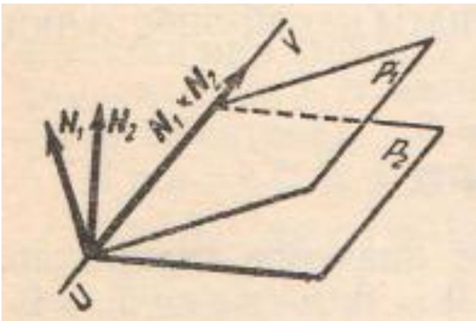
$-3y + 2z - 4 = 0, -6y + 4z - 3 = 0$ sistemasiga ega bo'lamiz. L to'g'ri chizig'i *ZOY* tekisligiga paralleldir. y (yoki z) koordinatasiga ixtiyoriy qiymatlar berish mumkin; masalan, $z=0$ olib, $(\frac{5}{2}; \frac{17}{6}; 0)$ nuqtasiga ega bo'lamiz. x uchun doim bir xil $x = \frac{5}{2}$ qiymat chiqaveradi, bunda L to'g'ri chizig'i *ZOY* ga parallel bo'lgan $x = \frac{5}{2}$ tekisligida yotadi.

14.21. Yo'naltiruvchi vektor

A. Har qanday (nolga teng bo'lmagan), *UV* (yoki unga parallel bo'lgan) to'g'ri chizig'ida yotgan ***a*** *{l, m, n}* vektori ushbu to'g'ri chiziqning *yo'naltiruvchi vektori* deb ataladi. Yo'naltiruvchi vektorning *l, m, n* koordinatalari to'g'ri chiziqning *yo'naltiruvchi koeffitsientlari* deb ataladi.



Izoh. *l, m, n* yo'naltiruvchi koeffitsientlarini bir xil k (nolga teng bo'lmagan) soniga ko' paytirib, *lk, mk, nk* sonlariga ega bo'lamiz, ular ham yo'naltiruvchi koeffitsientlar bo'ladi (bular ***a*** bilan kollinear bo'lgan ***a****k* vektoring koordinatalaridir).



B. *UV* to'g'ri chizig'ining

$$\begin{cases} A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0, & (1) \\ A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

170-chizma.

yo'naltiruvchi vektori sifatida (1) va (2) tenglamalari orqali ifodalangan, P_1 va P_2 tekisliklarining (170-chizma) $\boldsymbol{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\boldsymbol{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ normal vektorlari bo'lgan $\boldsymbol{N_1} \times \boldsymbol{N_2}$ vektorli ko'paytmani olish mumkindir. Darhaqiqat, *UV* to'g'ri chizig'i $\boldsymbol{N_1}$, $\boldsymbol{N_2}$ normal vektorlariga perpendikulyardir.

Misol. $2x - 2y - z + 8 = 0,\ x + 2y - 2z + 1 = 0$ to'g'ri chizig'ining yo'naltiruvchi koeffitsientlarini toping.

Yechilishi. $\boldsymbol{N_1} = \{2, -2, -1\}$ va $\boldsymbol{N_2} = \{1, 2, -2\}$ qiymatlariga egamiz. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N_1} \times \boldsymbol{N_2}$ ni berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida qabul qilamiz.

$$\boldsymbol{a} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{6, 3, 6\}$$

ni topamiz. Yo'naltiruvchi koeffitsientlar $l=6$, $m=3$, $n=6$ ga teng bo'ladi.

Izoh. Ushbu sonlarni $\frac{1}{3}$ ga ko'paytirib, $l'=2$, $m'=1$, $n'=2$ yo'naltiruvchi koeffitsientlarni topamiz. Yo'naltiruvchi koeffitsientlat sifatida $-2, -1, -2$ va hk. sonlarni ham qabul qilish mumkin.

14.22. To'g'ri chiziq va koordinatalar o'qlari o'rtasidagi burchak

Koordinatalar o'qlari va L to'g'ri chizig'i hosil qiladigan α, β, γ burchaklari

$$cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

nisbatlardan kelib chiqib joylashgan, bu yerda *l*, *m*, *n* – *L* to'g'ri chizig'ining yo'naltiruvchi koeffitsientlaridir.

§ 101 dan kelib chiqadi.

$cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ kattaliklari L to'g'ri chizig'ining *yo'naltiruvchi kosinuslari* deb ataladi.

Misol. Koordinatalar o'qlari $2x-2y-z+8=0,\ \ x+2y-2z+1=0$ to'g'ri chizig'i hosil qiladigan burchaklarni toping.

Yechilishi. Berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi koeffitsientlari sifatida (§ 143, misol) $l=2, m=1, n=2$ ni olish mumkin. Demak, $cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3}, cos\beta = \frac{1}{3}, cos\gamma = \frac{2}{3}$, bu yerdan $\alpha \approx 48^0 11', \beta \approx 70^0 32', \gamma \approx 48^0 11'$ chiqadi.

14.23. Ikki to'g'ri chiziq o'rtasidagi burchak

L va L' to'g'ri chiziqlari o'rtasidagi φ burchak (ya'ni, ular o'rtasidagi burchaklarning biri) quyidagi formula:

$$cos\varphi = \pm\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}} \qquad (1)$$

bu yerda l, m, n va l', m', n' - L va L' to'g'ri chiziqlarining yo'naltiruvchi koeffitsientlaridir, yoki $cos\varphi = cos\alpha cos\alpha' + cos\beta cos\beta' + cos\gamma cos\gamma'$ formulasi bo'yicha topiladi.

§ 109 dan kelib chiqadi.

Misol.

$$\begin{cases} 2x-2y-z+8=0, \\ x+2y-2z+1=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+y+3z-21=0, \\ 2x+2y-3z+15=0, \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlari o'rtasidagi burchakni toping.

Yechilishi. Birinchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi koeffitsientlari (§ 143, misol) $l=2, m=1, n=2$ ga teng. Agar ikkinchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\{4,1,3\}\,x\,\{2,2,-3\}$ vektorli ko'paytmasini qabul qilsak, uning yo'naltiruvchi koeffitsientlari $-9, 18, 6$ ga tengdir. Ularni $\frac{1}{3}$ ga ko'paytirib (kichik sonlar bilan ishlash uchun) (§ 143, izoh), $l=-3, m=6, n=2$ ga ega bo'lamiz:

$$cos\varphi = \pm\frac{2\cdot(-3)+1\cdot6+2\cdot2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+6^2+2^2}} = \frac{4}{21},$$ bu yerdan $\varphi = 79^0 01'$ chiqadi.

14.24. To'g'ri chiziq va tekislik o'rtasidagi burchak

L to'g'ri chizig'i $(l, m, n$ yo'naltiruvchi koeffitsientlari bilan) va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekisligining o'rtasidagi ϕ burchak quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$\sin\phi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

§ 145 dan kelib chiqadi (agar L to'g'ri chizig'i va {A, B, C} normal vektori o'rtasida burchak bo'lsa, $\varphi = 90^0 \pm \phi$).

Misol. $3x - 2y = 24,\ 3x - z = -4$ to'g'ri chizig'i va $6x + 15y - 10z + 31 = 0$ tekisligi o'rtasidagi burchakni toping. $l = 2, m = 3, n = 6$ (§ 143) ga egamiz. Burchakni topamiz:

$$sin\varphi = \frac{|6\cdot2 + 15\cdot3 + (-10)\cdot6|}{\sqrt{6^2 + 15^2 + (-10)^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{3}{133},$$ shunda $\varphi \approx 1^0 18'$.

14.25. To'g'ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikulyarlik sharti

l, m, n yo'naltiruvchi koeffitsientlariga ega $Ax + By + Cz + D = 0$ tekisligining parallellik sharti – bu:

$$Al + Bm + Cn = 0. \qquad (1)$$

U to'g'ri chiziq va $\{A, B, C\}$ normal vektorning perpendikulyarligini ifodalaydi.

To'g'ri chiziq va tekislikning (belgilari oldingidek) perpendikulyarlik sharti – bu $\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$. (2)

U to'g'ri chiziq va normal vektorning parallelligini ifodalaydi.

14.26. Tekisliklar dastasi

Bitta UV to'g'ri chizig'idan o'tayotgan barcha tekisliklar to'plami, *tekisliklar bog'lami* deb ataladi. UV to'g'ri chizig'i boglamning *o'qi* deb ataladi.

Agar bog'lamga tegishli bo'lgan ikkita turli P_1 va P_2 tekisliklarining

$$A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$
$$A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

tenglamalari (ya'ni boglam o'qining tenglamalari, § 140 ni solishtiring) ma'lum bo'lsa, unda bog'lamning har bitta tekisligini

$$m_1(A_1x + B_1x + C_1z + D_1) + m_2(A_2x + B_2x + C_2z + D_2)=0 \qquad (3)$$

ko'rinishdagi tenglama orqali ifodalash mumkin.

Aksincha, (3) tenglama m_1, m_2 ning har qanday (bir vaqtda nolga teng bo'lmagan) qiymatlarida UV o'qli bog'lamga tegishli tekislikni ifodalaydi [2]). Shu jumladan, $m_1 = 0$ da, P_2 tekisligini, , $m_2 = 0$ bo'lganda esa – P_1 tekisligiga ega bo'lamiz. (3) tenglama tekisliklar bog'lamining tenglamasi deb ataladi [3]). $m_1 \neq 0$ da (3) tenglamani m_1 ga bo'lishimiz mumkin. $m_2 : m_1$ ni λ orqali ifodalab, quyidagi teglamaga ega bo'lamiz:

$$A_1x + B_1x + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2x + C_2z + D_2) = 0. \tag{4}$$

---

1) § 24 ni solishtiring.

2) pastda 1-misolning sharhini qarang.

3) agar (1) va (2) tekisliklar parallel bo'lsa (bir-biriga to'g'ri kelmasa), (3) tenglama m_2, m_1 ning har qanday qiymatlarida ikkita berilgan tekisliklarga parallel bo'lgan barcha tekisliklarni ifodalaydi.

12 M. Ya. Vigodskiy

Bu yerda har qanday qiymatlar faqat bitta λ harfiga berilgan, lekin (4) tenglamadan P_2 tekisligining tenglamalarini olib bo'lmaydi.

1-misol. Bog'lamning ikkita tekislik tenglamari, ya'ni bog'lam o'qining tenglamalari berilgan:

$$5x - 3y = 0, \tag{5}$$

$$3z - 4x = 0. \tag{6}$$

Bog'lam tenglanasi – bu:

$$m_1(5x - 3y) + m_2(3z - 4x) = 0. \tag{7}$$

Masalan, $m_1 = 2,\ m_2 = -3$ olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

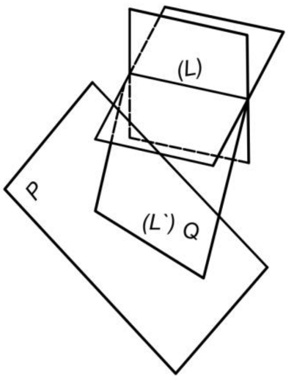
$$2(5x - 3y) + (-3)(3z - 4x) = 0. \tag{8}$$

(8) tenglama yoki

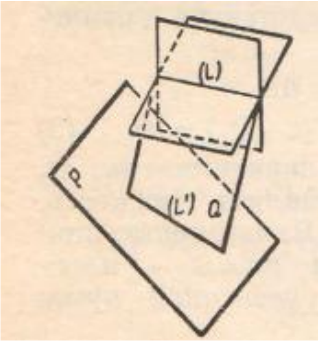
$$22x - 6y - 9z = 0 \tag{8a}$$

bog'lam tekisligining birini ifodalaydi.

Sharh. UV to'g'ri chizig'ida qanday bo'lsa ham $M(x, y, z)$ nuqtasini olamiz. Uning x, y, z koordinatalari (5) va (6) teglamalarini qondiradi, va, demak, (8) ni tenglamani ham qondiradi. Demak, (8) tekislik UV to'g'ri chizig'ining har qanday M nuqtasidan o'tadi, ya'ni bog'lamg tegishlidir.



2-misol. 1-misolning *UV* to’g’ri chizig’I va (1; 0; 0) nuqtasidan o’tgan tekislikning tenglamasini toping.



171-chizma.

Yechilishi. Izlangan tekislik (7) tenglamaning ko’rinishi orqali ifodalanadi. Oxirgisi x=1, y=0, z=0 da qondirilishi kerak. Ushbu qiymatlarni (7) ga qo’yib, $5m_1 - 4m_2 = 0$, ya’ni $m_1 : m_2 = 4:5$ ni topamiz. 4(5x-3y)+5(3z-4x)=0, ya’ni 5z-4y=0 tenglamasiga ega bo’lamiz.

3-misol. L to’g’ri chizig’ining

$$\begin{matrix} 2x + 3y + 4z + 5 \\ x - 6y + 3z - 7 \end{matrix} \qquad (9)$$

P tekisligiga

$$2x + 2y + z + 15 = 0 \qquad (10)$$

bo’lgan proyektsiyasining tenglamalarini toping.

Yechilishi. Izlangan L' proyektsiyasi (171-chizma) bu *P* tekisligi *Q* tekisligi bilan kesishayotgan to’g’ri chiziqdir (*P* ga perpendikulyar ravishda *L* orqali o’tkazilgan). *Q* tekisligi *L* o’qli bog’lamga tegishli bo’lob, quyidagi ko’rinishdagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$(2x + 3y + 4z + 5) + \lambda(x - 6y + 3z - 7) = 0. \qquad (11)$$

λ ni topish uchun (11) tenglamani

$$(2 + \lambda)x + (3 - 6\lambda)y + 1 \cdot (4 + 3\lambda)z + 5 - 7\lambda = 0 \qquad (11a)$$

ko’rinishda ifodalab (10) va (11) tekisliklarning perpendikulyarlik shartini yozib olamiz:

$$2(2 + \lambda) + 2(3 - 6\lambda) + 1 \cdot (4 + 3\lambda) = 0.$$

Bu yerdan $\lambda = 2$ chiqadi. (11a) ga qo’yib, Q tekisligining tenglamasiga ega bo’lamiz. Izlangan proyektsiya

$$\begin{cases} 4x - 9y + 10z - 9 = 0, \\ 2x + 2y + z + 15 = 0 \end{cases}$$

tenglamalari orqali ifodalanadi.

14.27. To’g’ri chiziqning koordinata tekisliklariga bo’lgan proyektsiyalari

To’g’ri chiziq quyidagi tenglamalar orqali ifodalanagan bo’lsin:

$$\begin{cases} A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0, & (1) \\ A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

bu yerda C_1 va C_2 bir vaqtda nolga teng emas ($C_1 = C_2 = 0$ holi pastda 3-misolda ko’rib chiqilgan). *XOY* tekisligiga to’g’ri chiziqning proyektsiyasini topish uchun, (1)-(2) tenglamalardan z ni chiqarib yuborish yetarlidir. Olingan tenglama (z=0 tenglamasi bilan birga) izlangan proyektsiyani ifodalaydi [1]). Xuddi shunday usulda *YOZ* va *ZOX* tekisliklariga bo’lgan proyektsiyalar topiladi.

1-misol. *L* to’g’ri chizig’ining

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z - 12 = 0 & (3) \\ x - y + 4z - 10 = 0 & (4) \end{cases}$$

XOY tekisligiga proyektsiyasini toping.

Yechilishi. z ni chiqarish uchun, berilgan tenglamalardan birini 4 ga, ikkinchisini – 3 ga ko’paytirib qo’shamiz:

$$4(2x + 4y - 3z - 12) + 3(x - 2y + 4z - 10) = 0, \qquad (5)$$

ya’ni

$$11x + 10y - 78 = 0. \qquad (6)$$

Ushbu tenglama

$$z = 0 \qquad (7)$$

tenglamasi bilan birgalikda L to’g’ri chizig’ining *XOY* tekisligiga L' proyektsiyasini ifodalaydi.

______

1) pastda 1-misolning sharhini qarang.

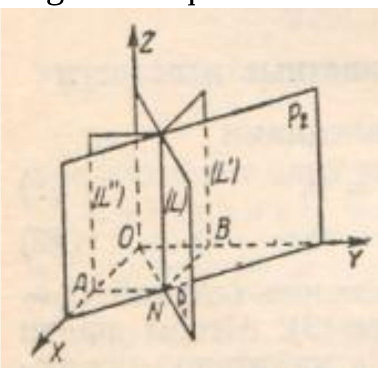
12*

Sharh. (5) tekislik *L* to’g’ri chizig’i orqali o’tadi (§ 148). Boshqa tomondan, (6) dan ko’rinib turganidek (z bo’lmaganida), ushbu tekislik (§ 124, 2-band) *XOY* tekisligiga perpendikulyardir. Demak, (6) tekislik (7) tekislik bilan kesishayotgan to’g’ri chiziq – bu *L* to’g’ri chizig’ining (7) tekislikka bo’lgan proyektsiyasidir (§ 148, 3-misolni solishtiring).

2-misol. *L* to’g’ri chizig’ining

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z - 12 = 0 & (8) \\ 2x - 5y - 4 = 0 & (9) \end{cases}$$

z=0 tekisligiga bo’lgan proyektsiyasi (*XOY* tekis koordinatalar sistemasida) (9) tenglama orqali ifodalanadi. *z* ni chiqarish talab etilmaydi, chunki (9) tenglamada u mavjud emas. (9) tekislik *XOY* tekisligiga perpendikulyardir; u *L* to’g’ri chizig’ini *XOY* ga proyektsiya qiladi.



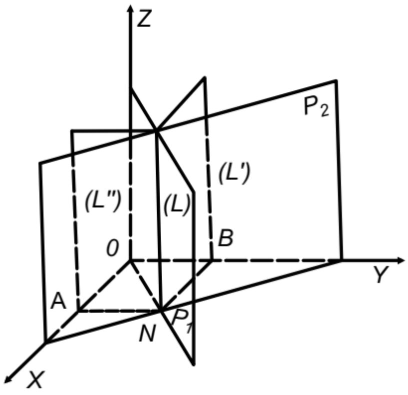
172-chizma.

3-misol. *L* to’g’ri chizig’ining

$$\ldots - 3y = 0 \qquad (10)$$
$$\ldots + y - 4 = 0 \qquad (11)$$

koordinatali tekisliklarga bo’lgan proyektsiyalarini toping.

Yechilishi. Ikkala tenglamalarda ham *z* mavjud emas, shuning uchun ikkala P_1 va P_2 tekisliklari (172-chizma) *XOY* tekisligiga perpendikulyardir. *L* to’g’ri chizig’i *XOY* ga perpendikuyardir va $z_N = 0$ koordinatali *N* nuqtasiga proyektsiyalanadi. (10)-(11) sistemasidan $x_N = \frac{12}{5}, y_N = \frac{8}{5}$ ni topamiz.



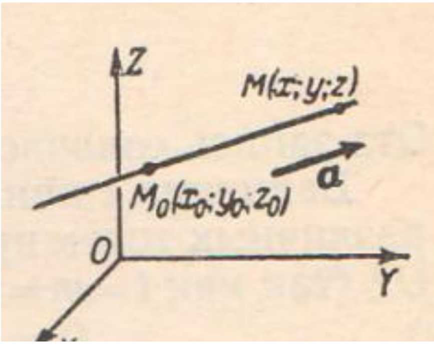
YOZ tekisligiga L' proyektsiyasining tenglamasini *x* ni (10) va (11) dan chiqarib, umumiy usul yordamida topish mumkin. $y = \frac{8}{5}$ ga, ya'ni y_N uchun yuqorida topilgan tenglikka ega bo'lamiz (chizmadan ko'rinib turibdiki, L' to'g'ri chizig'i *OZ* dan $y_N = AN$ga teng bo'lgan *OB* masofada turibdi). L''ning *XOZ* tekisligiga proyektsiyasining tenglamasi $x = \frac{12}{5}$ dir.

14.28. To'g'ri chiziqning simmetrik tenglamalari

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtasidan o'tib, ***a*** *{l, m, n}* yo'naltiruvchi vektoriga ega (§ 143) *L* to'g'ri chizig'i ***a*** *{l, m, n}* va $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ vektorlarinig kollinearligini ifodalovchi

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (1)$$

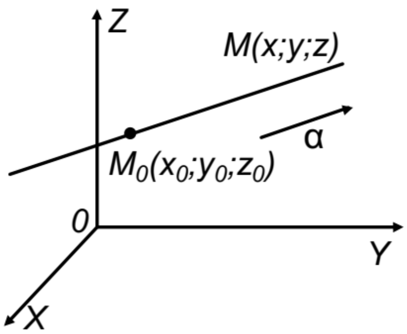
tenglama orqali ifodalanadi (173-chizma). Ushbu tenglamalar to'g'ri chiziqning *simmetrik* (yoki *kanonik*) tenglamalari deb ataladi.



173-chizma.

1-izoh. M_0 nuqtasi sifatida L to'g'ri chizig'ining har qanday nuqtasini olib, a yo'naltiruvchi vektorni ka yo'naltiruvchi vektori bilan almashtirish mumkinligi sababli, x_0, y_0, z_0, l, m, n kattaliklarning har biriga alohida ixtiyoriy qiymat berish mumkin.

1-misol. $A\ (5;\ -3;\ 2)$ va $B\ (3;\ 1;\ -2)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqning simmetrik tenglamalarini yozing. M_0 sifatida *A* nuqtasini olib, a vektori o'rniga $\overrightarrow{AB} = \{-2, 4. -4\}$ ni olish mumkin. Simmetrik tenglamalar quyidagicha bo'ladi:



$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-4}. \qquad (2)$$

M_0 sifatida B ni olib, a o'rniga $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\{1,-2,2\}$ ni olsak, simmetrik tenglamalar quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{2} \qquad (3)$$

2-izoh. (2) tashkil topgan uchta

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+3}{4};\ \frac{x-5}{-2}=\frac{z-2}{-4},\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-4} \qquad (4)$$

tenglamadan faqat ikkitasi (har qanday) mustaqildir, uchinchisi esa ularning natijasidir; masalan, birinchi tenglamadan ikkinchisini ayirib, uchinchisini topish mumkin. (4) tenglamalardan har biri koordinata tekisliklarining biriga perpendikulyar bo'lgan AB to'g'ri chizig'idan o'tgan tekislikni ifodalaydi; shu bilan birga, u AB to'g'ri chizigining mos koordinata tekisligiga bo'lgan proyektsiyasini ifodalaydi (§ 149).

2-misol. $M_0(5;0;1), M_1(5;6;5)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqning simmetrik tenglamalari quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-5}{0}=\frac{y-0}{6}=\frac{z-1}{4} \qquad (5)$$

$\frac{x-5}{0}$ ifodasi shartlidir; u (§ 102, izoh) x-5=0 ni bildiradi, shuning uchun (5) ni o'rniga

$$x=5,\frac{y}{6}=\frac{z-1}{4} \qquad (6)$$

sistemasini yozish kerak.

$M_0M_1$to'g'ri chizig'i OX o'qiga perpendikulyardir (chunki $L=0$).

3-misol. $A\ (2;\ 4;\ 3)$ va $B\ (2;\ 4;\ 5)$ nuqtalaridan o'tgan to'g'ri chiziqning simmetrik tenglamalari quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-3}{2}.$$

Ushbu yozuv x=2 va y=4 ekanligini anglatadi.

Z kattaligi AB to'g'ri chizig'ining har qanday nuqtalari uchun turli (har qanday) qiymatlarni oladi. AB to'g'ri chizig'i OZ o'qiga paralleldir ($l=m=0$ ekanligi sababli).

14.29. To'g'ri chiziq tenglamalarini simmetrik ko'rinishga keltirish

$$A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$
$$A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

to'g'ri chizig'ining tenglamalarini simmetrik ko'rinishga keltirish uchun, to'g'ri chiziqda yotgan har qanday nuqtaning x_0, y_0, z_0 koordinatalarini va l, m, n yo'naltiruvchi koeffitsientlarini aniqlash kerak.

1-misol. $2x - 3y - z + 3 = 0,\ 5x - y + z - 8 = 0$

to'g'ri chizig'ining tenglamalarini simmetrik ko'rinishga keltiring.

Yechilishi. § 142 (4-misol) da berilgan kabi, to'g'ri chiziqda $M_0(3; 4; -3),\ x_0 = 3, y_0 = 4, z_0 = -3$ nuqtasini topamiz. Yo'naltiruvchi koeffitsientlarini

$$l = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4; m = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7; n = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 13$$

aniqlab, simmetrik tenglamalarga ega bo'lamiz:

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+3}{13}.$$

2-misol. $x + y - 3z - 2 = 0, -3x + 4y - 6z + 21 = 0$ tenglamalarini simmetrik ko'rinishga keltiring.

Y yoki z koordinatasiga birorta qiymatni beramiz (x koordinatasiga ixtiyoriy qiymat berish mumkin emas; § 142, 5-misolni solishtiring); masalan, y=0 ga teng deb olamiz. $M_0(5; 0; 1)$ nuqtasiga ega bo'lamiz. Yo'naltiruvchi koeffitsientlar $l = 0, m = 15, n = 10$ yoki ($\frac{1}{5}$ ga ko'paytirib) $l = 0, m = 3, n = 2$ bo'ladi. Quyidagi simmetrik tenglamalarga ega bo'lamiz (§ 152, 2-misolni solishtiring):

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}.$$

3-misol. Quyida berilgan to'g'ri chiziq uchun ham:

$$x + y - 6 = 0, x - y + 2 = 0 \qquad (3)$$

x_0 va y_0 qiymatlari (3) tenglamalar yordamida to'liq aniqlanadi: $x_0 = 2, y_0 = 4$. z_0 koordinatasiga har qanday qiymat berish mumkin, masalan $z_0 = 3$. So'ngra $l = 0, m = 0, n = 2$ yo'naltiruvchi koeffitsientlarini topamiz. Quyidagi simmetrik tenglamalarga ega bo'lamiz (§ 150, 3-misolni solishtiring):

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-3}{2}.$$

14.30. To'g'ri chizining parametrik tenglamalari

$\frac{x-x_0}{l}, \frac{y-y_0}{m}, \frac{z-z_0}{n}$ nisbatlardan har biri $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ vektorni ***a*** $\{l,\ m,\ n\}$ (kollinear) vektorning bo'linmasiga tengdir. Buni t orqali belgilaymiz. Shunda

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ushbu tenglamalar *to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari* deb ataladi; t (parametr) kattaligi turli qiymatlarni olganda, $M(x;\ y;\ z)$ nuqtasi to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanadi. t=0 da u M_0 bilan mos keladi; t ning musbat va manfiy qiymatlariga to'g'ri chiziqda M_0 dan turli tomonlarda joylashgan nuqtalar javob beradi.

Vektorli shaklda (1) uchta tenglama bitta tenglama bilan almashadi:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{t}. \qquad (2)$$

14.31. Parametrik berilgan to`g`ri chiziqning tekislik bilan kesishuvi

Tekislik *P*

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

va to`g`ri chiziq *L* ni umumiy nuqtasini (agar mavjud bo`lsa)

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt \qquad (2)$$

(2) formuladan topiladi, agar tenglama[1]) ga *t* miqdorini qo'ysak

$$(Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (3)$$

(2) misolni (1)ga qo'ysak oxirgi formula kelib chiqadi

1-misol. Tekislik

$$2x+3y+3z-8=0$$

bilan to`g`ri chiziqning kesishuvini aniqlang

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

Yechilishi. Tekislikning parametrik tenglamalari quyidagi:

$$x = -5 + 3t, \quad y = 3 - t, \quad z = -3 + 2t \qquad (4)$$

2x+3y+3z-8=0 ni tenglamaga qo'ysak, *9t-18=0* chiqadi, *t=2* qayerdan. Bu qiymatni (4) ga qo'ysak, *x=1, y=1, z=1* kelib chiqadi. Izlangan nuqtalar (1;1;1).

Misol 2. Tekislik *2x+3y+3z-8=0* bilan birinchi misoldagi to`g`ri chiziq bilan kesishuvini aniqlang.

Yechilishi. Xuddi shu tarzda *0*t+0=0* kelib chiqadi; bu tenglamani yechilishii mavjud emas. Nuqtalar kesishmagan (to`g`ri chiziq tekislikga parallel).

Misol 3. Tekislik *3x+y-4z=0* bilan birinchi misoldagi to`g`ri chiziq bilan kesishuvini aniqlang.

Yechilishi. Xuddi shu tarzda $0*t+0=0$ kelib chiqadi; bu tenglamaning son-sanoqsiz yechilishii mavjud (to`g`ri chiziq tekislikda yotgan).

Izoh. Parametrik tenglamalardan foydalanib (4), to`rtinchi $t$ nomalum kiritildi va to`rtta tenglama olindi (uchta berilgan o`rnga). Bu murakkablik sistemani oson yechilishii bilan o`zini oqlaydi.

---

[1] Tenglama (3) ayrim holatlarda yechilishisiz bo`lishi mumkun (pastda 2 misol ga qarang) yoki son-sanoqsiz yechilishilari bo`lishi mumkun (pastda 3 misol ga qarang).

14.32. Ikkita berilgan nuqtlardan o`tgan to`g`ri chiziqning tenglamalari

$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtalardan o`tgan to`g`ri chiziq quyidagi tenglamalar bilan ifodalanadi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Misollarni §150 da ko`ring.

14.33. Berilgan nuqtadan berilgan to`g`ri chiziqga perpendikular o`tgan tekislikning tenglamasi

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtadan o`tgan va to`g`ri chiziqga perpendikular bo`lgan tekislik

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

normal vektorga ega $\{l_1, m_1 n_1\}$, demak. Quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$l_1\ (x-x_0)+m_1\ (y-y_0)+n_1\ (z-z_0)=0$$

yoki vektor shaklida

$$a_1(r-r_0)=0.$$

Misol. (-1;-5,8) nuqtadan o`tgan tekislik va $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5}$ to`g`ri chiziqga perpendikular bo`lgan tekislik $2(y+5)+5(z-8)=0$ tenglamasi bilan ifodalanadi, ya`ni

$$2y+5z-30=0.$$

14.34. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikga perpendikular ravishda o`tgan to`g`ri chiziqning tenglamasi

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtadan o`tgan va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikga perpendikular bo`lgan to`g`ri chiziq, yo`naltirilgan vektorga ega $\{A\ ,B,\ C\}$, va, demak, simmetrik tenglamalar bilan (§150) ifodalanadi

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

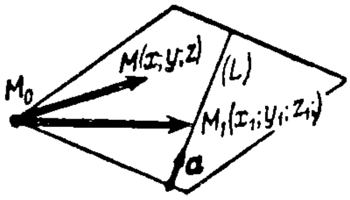
Misol. Koordinatalar boshidan va $3x+5z-5=0$ tekislikdan o`tgan to`g`ri chiziq, $\frac{x}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z}{5}$ simmetrik tenglamasi yoki *x=3t*, *y=0*, *z=5t* parametrik tenglamasi (§152) bilan ifodalanadi.

14.35. Berilgan nuqtadan va berilgan to`g`ri chiziqdan o`tgan tekislikning tenglamasi

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtadan va *L* to`g`ri chiziqdan o`tgan tekislik

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \qquad (1)$$

M_0 dan o`tmagan, quyidagi tenglama bilan ifodalanadi



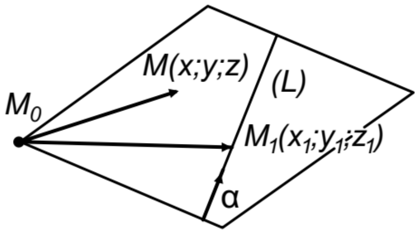
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

174-chizma

yoki vektor shaklida

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_0})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

(2a)



(2) yoki (2a) tenglamasi vektorlarni tengligini ifodalaydi, (174-chizma) $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}$, va *a (l,m,n).*

Misol. $M_0(5,2,3)$ nuqtadan va $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{3}$ to`g`ri chiziqdan o`tgan tekislik, quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-3 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ya'ni

$x - 2y - 1 = 0.$

Izoh. Agar to`g`ri chiziq (1) M_0 nuqtasidan o`tsa, tenglama (2) ayniyatga aylanadi va misol son-sanoqsiz yechilishilarga ega bo`ladi (*L* o`qi bilan tekisliklar bog`lamiga ega bo`lamiz;).

,

14.36. Berilgan nuqtadan va berilgan ikkita to`g`ri chiziqga parallel ravishda o`tgan tekislikning tenglamasi

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtadan va berilgan L_1 va L_2 to`g`ri chiziqlarga (yoki $\boldsymbol{a_1}$ va $\boldsymbol{a_2}$ vektorlarga) parallel ravishda (o`zaro noparallel) o`tgan tekislik, quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

bu yerda l_1, m_1, n_1 va l_2 ,m_2 ,n_2 – berilgan to`g`ri chiziqlarning yo`naltirilgan koeffitsiyenti (yoki berilgan vektorlarning koordinatalari). Vektor shaklida

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})\boldsymbol{a_1}\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0} \qquad (1a)$$

(1) yoki (1a) tenglama $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ vektorlarni komplanarligini ifodalaydi (M-izlangan tekislikni erkin nuqtasi).

Izoh. Agar L_1 va L_2 to`g`ri chiziqlar parallel ravishda bo`lsa, ya`ni $\boldsymbol{a_1}$ va $\boldsymbol{a_2}$

kollinear bo`lsa, tenglama (1) ayniyatga aylanadi, va misol son-sanoqsiz yechilishilarga ega bo`ladi (Berilgan to`g`ri chiziqlarga parallel ravishda, *M* o`qi bilan tekisliklar bog`lamiga ega bo`lamiz).

14.37. Berilgan to`g`ri chiziqdan va berilgan boshqa to`g`ri chiziqga parallel ravishda o`tgan tekislikning tenglamasi

L_1 va L_2 – noparallel to`g`ri chiziqlar desak. L_1 to`g`ri chizgdan va L_2 to`g`ri chiziqga parallel ravisgda o`tgan tekislik, quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

shundan, x_1, y_1, z_1 – L_1 to`g`ri chiziqdagi birorta M_1 nuqtasining koordinatasi.

Bu misolda noodatiy xolat §158 (M_0 nuqta vazifasini M_1 bajaryapti).

§158 ga izoh o`z kuchida qoladi.

14.38. Berilgan to`g`ri chiziqdan va berilgan tekislikga parallel ravishda o`tgan tekislikning tenglamasi

L_1 to`g`ri chizig`idan

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (1)$$

va berilgan Q tekislikga perpendikular (L_1 ga perpendikular bo`lmagan)

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

ravishda o`tgan *P* tekisligi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

Vektor shaklida

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0} \qquad (3a)$$

Sharh. *P* tekisligi L_1 to`g`ri chiziqdan o`tadi va *Q* tekislikning *N* normaliga (*A*,*B*,*C*) parallel.

Izoh. Agar tekislik (2) to`gri chiziqga (1) perpendikular bo`lsa, tenglama (3) ayniyatga aylanadi, va misol son-sanoqsiz yechilishilarga ega bo`ladi.

To`g`ri chiziqni har qanday tekislikga proyeksiyasi.

Tekislik (3) L_1 to`g`ri chiziqni Q tekislikga proyeksiyalantiradi. Ya`ni, Q tekislikga $L_1$ to`g`ri chiziqning proyeksiyasi bo`lgan L` chizig`i, (2)-(3) tenglamalar tizimi bilan ifodalanadi.

14.39. Berilgan nuqtadan berilgan to`g`ri chiziqga tushirgan perpendikularni tenglamasi

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtasidan L_1 to`g`ri chiziqga tushirgan perpendikular

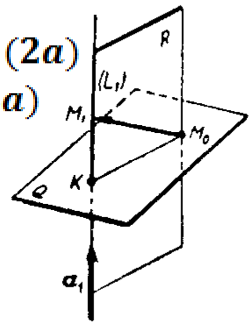
$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (1)$$

(M_0 dan o`tmagan), quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\begin{cases} l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0, & (2) \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0. & (3) \end{cases}$$

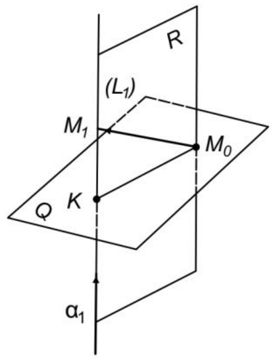
Yoki vektor shaklida

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{2a}) \\ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{3a}) \end{cases}$$



Alohida olgan tenglama (2), M_0 dan L_1 ga perpendikular ravishda o`tkazgan (§ 155) $Q$ tekisligini ifodalaydi (175-chizma), tenglama (3) esa, $M_0$ nuqtasi va $L_1$ to`g`ri chiziqidan o`tkazgan R tekislikni ifodalaydi (§157).

Izoh. Agar to`g`ri chiziq L M_0 nuqtasidan o`tsa, tenglama (3) ayniyatga aylanadi (§120), ($L_1$ to`g`ri chiziqda olgan nuqtadan $L$ ga son-sanoqsiz perpendikulyarlar o`tkazish mumkin) 175-



Misol. (1;0;1) nuqtasidan,

$$x=3z+2,\ y=2z \qquad (1a)$$

to`g`ri chiziqga tushirgan perpendikulyar tenglamasini toping.

Perpendikulyar asosini ham toping.

Yechilishi. (1a) tenglamasini simmetrik shakliida yozish mumkin (§ 151), quyidagicha

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1} \qquad (1b)$$

Izlangan perpendikulyar quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\begin{cases} 3(x-1)+2(y-0)+1(z-1)=0, & (2b) \\ \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2-1 & 0 & 0-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0. & (3b) \end{cases}$$

yoki soddalashtirishdan keyin

$$3x+2y-4=0, \qquad (2d)$$

$$x-2y+z=0. \qquad (3d)$$

K perpendikulyarni asos koordinatalarini, uch tenglamalar tizimini (1b), (2d) yechganimizda topamiz. Tenglama (3d) o`z ozicha konishi kerak. $K\left(\frac{11}{7};-\frac{2}{7};-\frac{1}{7}\right)$ kelib chiqadi.

Izoh. Uch tenglamalar tizimi (1b), (3a) son-sanoqsiz yechilishilarga ega (chunki *R* tekisligi L_1 to`g`ri chiziqni kesib o`tmaydi).

14.40. Berilgan nuqtadan berilgan to`g`ri chiziqga tushirgan perpendikularni uzunligi

Tenglama (1) da berilgan $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqta va L_1 to`g`ri chiziq berilgan.

M_0 nuqtadan L_1 to`g`ri chiziqgacha masofani topish kerak, ya`ni $M_0$ nuqtasidan $L_1$ to`g`ri chiziqgacha tushirilgan M_0K perpendikulyar uzunligi (175-chizma).

K perpendikulyar asosini birinchi topib (§162, misol), keyin M_0K kesma uzunligini topish mimkin. Quyidagi formulani qo`llash osonroq (§162 dagi belgilar bilan)

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}},$$

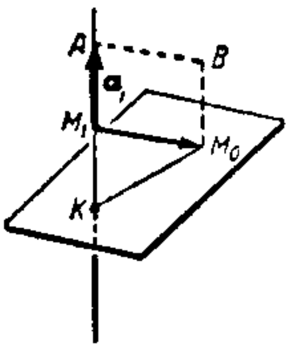
(1)

ya`ni vektor shaklida

$$d=\frac{\sqrt{[(r_0-r_1)xa_1]^2}}{\sqrt{a_1^2}}$$

(1a)

(1a) ni surati – M_1M_0BA (176-chizma, $M_1A=a_z$) parallelogrammni yuzasi, maxraji esa, M_1A asosni uzunligi. Shunday qilib, kasr parallelogramm M_0K balandligiga teng.



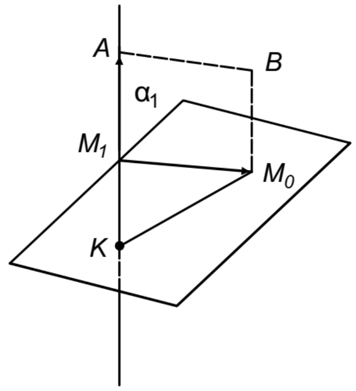
Misol. $M_0(1;\ 0;\ 1)$, nuqtasidan $x=3z+2$, $y=2z$ to'g'ri chiziqga tushirgan perpendikularni uzunligi toping.

Yecim. §161 dagi misolda $K\left(\frac{11}{7};-\frac{2}{7};-\frac{1}{7}\right)$ ni topdik.

Demak,

$$d=|M_0K|=\sqrt{(\tfrac{11}{7}-1)^2+(\tfrac{2}{7})^2+(-\tfrac{1}{7}-1)^2}=2\sqrt{\tfrac{3}{7}}.$$

176-chizma. Endi formula (1) dan foydalanamiz. §161 dagi (1b)ga ko`ra, $x_1=2$, $y_1=0$, $z_1=0$, $l_1=3$, $m_1=2$, $n_1=1$, shunday qilib,



$$\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$d = \frac{\sqrt{(-2^2)+4^2+(-2)^2}}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$$

kelib chiqadi.

14.41. Ikkita to`g`ri chiziqning kesishuvi yoki bitta tekislikda yotgan holati

Agar

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad, \qquad (1)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad (2)$$

to`g`ri chiziqlar bitta tekislikda yotsa,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

yoki vektor shaklida

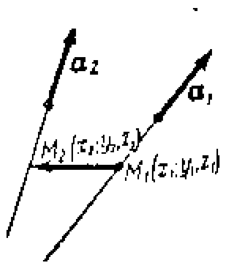
$$(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1})\boldsymbol{a_1}\boldsymbol{a_2}=\boldsymbol{0}\ . \qquad (3a)$$

Qayta, agar shart (3) bajarilsa, shunda to`g`ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi.

Sharh. Agar (1) va (2) tog`ri chiziqlar bitta tekislikda yotsa, shu tekislikda M_1M_2

Yotadi (177-chizma), ya`ni $\overrightarrow{M_1M_2}, a_1, a_2$ vektorlar komplanar (va teskari). Aynan shuni tenglama (3) ifodalaydi (§120ga qarang).

Izoh. Agar $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ [bunda (3) albatta qoniqtiriladi], shunda to`g`ri chiziqlar parallel ravishda o`tgan. Aks holda, shart (3) ni qoniqtiradigan to`g`ri chiziqlar kesishadi.



Misol.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \qquad (1)$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4} \qquad (2)$$

177-chizma

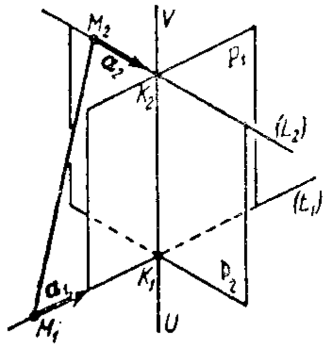
to`g`ri chiziqlarning kesishishini aniqlang, va qaysi nuqtada kesishishini aniqlang.

Yechilishi. (1) va (2) to`g`ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi, chunki $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ga teng bo`lgan aniqlovchi (3) nolga aylanadi.

Bu to`g`ri chiziqlar noparallel (yo`naltiruvchi koeffitsiyentlar proportsional emas). Kesishuv nuqtasini topish uchun, uch nomalumlu to`rtta tenglama tizimini (1),(2) yechish kerak. Odatda, bunday tizimni yechilishii mavjud emas, ammo bu holatda [shart (3) bajarilgani uchun], yechilishii mavjud. Biror bir uchta tenglamalar tizimini yechsak, $x=1$, $y=2$, $z=3$ kelib chiqadi. To`rtinchi tenglama qonoqadi. Kesishuv nuqtasi- (1;2;3).

14.42. Ikkita berilgan to`g`ri chiziqga umumiy perpendikulyar tenglamalari

UV to`g`ri chiziq, ikkita noparallel to`g`ri chiziqlarni kesib (L_1 va L_2 178-chizmada)



$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$
$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

va ularga perpendikulyar ravishda bo`lib, quyidgi (vektor shaklida) tenglamalar bilan ifodalanadi

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad , \qquad (1)$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}=0 \qquad , \qquad (2)$$

Bunda, $\boldsymbol{a_1}=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\boldsymbol{a_2}=\{l_2, m_2, n_2\}$ va $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_1}\times\boldsymbol{a_2}$.

Alohida olgan tenglama (1), L_1 to`g`ri chiziqdan $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_1}\times\boldsymbol{a_2}$ vektorga parallel ravishda o`tgan $P_1$ tekisligini ifodalaydi (§159). Shu singari (2) $L_1$ dan $\boldsymbol{a}$ ga parallel bo`lgan P_2 tekislikni ifodalaydi.

K_1 nuqtasi, UV L_1 ni kesishganda, L_1 bilan P_2 tekisligi bilan kesishuvida topiladi. Shu singari K_2 nuqtasi topiladi, keyinchalik K_1 K_2 umumiy perpendikulyar uzunligini topish mumkin.

Izoh. L_1 va L_2 parallel o`tgan holda (unda $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ va (1), (2) tenglamalar ayniyatga aylanadi) son-sanoqsiz $UV$ to`g`ri chiziqlar mavjud bo`ladi. Ularni bitta tenglamasini olish uchun, L_1 da ixtiyoriy K_1 nuqtasini olamiz va K_1 dan o`tadigan $\boldsymbol{a_1}\times\boldsymbol{b}$ vektor yo`nalishida o`tgan to`g`ri chiziq tenglamasini tuzamiz, bu yerda $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a_1}\times(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1})$.

Misol 1.

$$x=2+2t, \qquad y=1+4t, \qquad z=-1-t, \qquad (3)$$

$$x=-31+3t`, \qquad y=6+2t`, \qquad z=3+6t`, \qquad (4)$$

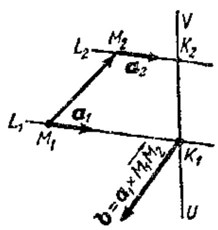
to`g`ri chiziqlarga umumiy perpendikulyar tenglamalarini toping.

Yechilishi. $\boldsymbol{a_1}=\{2, 4, -1\}$, $\boldsymbol{a_2}=\{3, 2, 6\}$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_1}\times\boldsymbol{a_2}\{26,-15,-8\}$.

Izlangan perpendikulyar quyidagi tenglamalar bilan ifodalanadi

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x+31 & y-6 & z-3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix}=0,$$



179-chizma

yoki soddalishtirishlardan keyin

$$\begin{cases} 47x + 10y + 134z + 30 = 0, & (5) \\ 74x + 180y - 97z + 1505 = 0 & (6) \end{cases}$$

(3)-(6) tizimlardan to`g`ri chiziq (3) bilan umumiy perpendikulyar kesishmasidagi K_1 nuqtasini topamiz. K_1 (-2;-7;1) kelib chiqadi. Shu singari K_2 (-28;8;9). Umumiy perpendikulyar uzunligi d

$$d = \sqrt{(-2+28)^2 + (-7-8)^2 + (1-9)^2 =}\ \sqrt{965}.$$

Misol 2. $x=2+2t$, $y=3+2t$, $z=-t$,

(7)

$x= 5 +2t^`$, $y= 4+2t^`$, $z= 1+t^`$,

(8)

to`g`ri chiziqlarga umumiy perpendikulyar tenglamalarini toping.

To`g`ri chiziqlar parallel ravishda $\boldsymbol{a_1}=\boldsymbol{a_2}=\{2,2,1\}$, $\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}=\{3,1,1\}$,

$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a_1}\ x\ (r_2-r_1)=\{1,1,-4\}$. Umumiy perpendikulyarni yo`naltiruvchi vektori $\boldsymbol{a_1}$ x $\boldsymbol{b}$ = {-9,9,0}, yoki $\frac{1}{9}$ga ko`paytirilganda – {-1,1,0}. Boshlang`ich nuqta deb (7)chi to`g`ri chiziqdagi K_1 (2+2t; 3+2t,t) ixtiyoriy nuqtasini olamiz.

Umumiy perpendikulyar tenglamasi kelib chiqadi

$$\frac{x-(2+2t)}{-1} = \frac{y-(3+2t)}{1}, \qquad z = t,$$

t-ixtiyoriy son. Umummiy perpendikulyar (9) bilan to`g`ri chiziq (8) kesishma K_2 nuqtasini topish uchun, ibora (8) ni (9)chi tenglamaga qo`yish kerak.

$\frac{3+2(t^` - t)}{-1} = \frac{1+2(t^` - t)}{1} = \frac{1+(t^` - t)}{0}$ kelib chiqadi.

Shu yerda mavjud bo`lgan har qanday tenglama $t^` = t - 1$ ni beradi;

(8) ga qoyib, K_2(3+2t; 2+2t; t) ni topamiz,

$$d = |K_1K_2| = \sqrt{[(3+2t)-(2+2t)]^2 + [(2+2t)-(3+2t)]^2 + [t-t]^2 =}\ \sqrt{2}.$$

14.43. Ikkita to`g`ri chiziq o`rtasida eng qisqa masofa

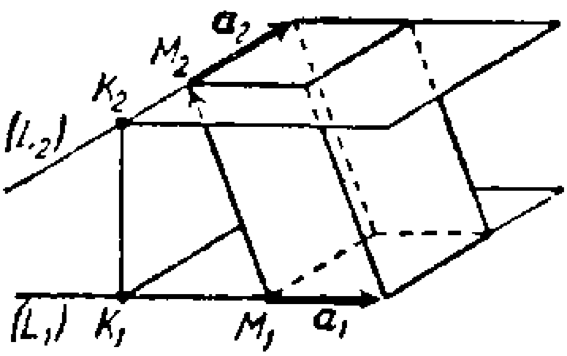
L_1 va L_2 to`g`ri chiziqlar orasida eng kichik masofa – bu ularning umumiy perpendikulyarni d uzunligi. Uni umumiy perpendikulyar tenglamasini tuzib topish mimkin (§ 164, 1 va 2 misol). Ammo bevosita d ni topish osonroq.

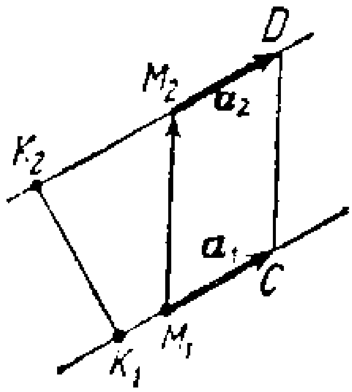
1) L_1 va L_2 to`g`ri chiziqlar parallel bo`lmasa (180-chizma),

$$d = \frac{|(r_2 - r_1)a_1 a_2|}{|a_1 x a_2|} = \frac{|(r_2 - r_1)a_1 a_2|}{\sqrt{(a_1 x a_2)^2}} \qquad (1)$$

($r_1, r_2 - M_{1,} M_2$nuqtalarning radius-vektori, $a_1, a_2 - L_{1,} L_2$to`g`ri chiziqlarning yo`naltiruvchi vektori).

Kasr (1) ni surati - $\overrightarrow{M_0 M_1}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ vektorlarda tuzilgan parallelepiped hajmi (§121). Maxraji-





180-chizma 181-chizma

uning asosini maydoni (§111). Demak, umum kasr - K_1K_2=d balandligi.

Kesishgan to`g`ri chiziqlar uchun ($\overrightarrow{K_1K_2}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ vektorlar komplanar) formula (1) $d=0$ ni beradi. Parallel to`g`ri chiziqlar uchun ($\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ vektorlar kollinear) yaroqsiz ($\frac{0}{0}$ ni beradi).

2) L_1 va L_2 to`g`ri chiziqlar parallel bo`lsa (181-chizma),

$$d = \frac{|(r_2 - r_1)x a_1|}{|a_1|} = \frac{\sqrt{[(r_2 - r_1)x a_1]^2}}{\sqrt{a_1^2}} \qquad (2)$$

($\boldsymbol{a_1}$ ni o`rniga $\boldsymbol{a_2}$ ni olish mumkin).

Kasr (2) ni surati - M_1M_2DC parallelogrammning maydoni, maxraji esa – M_1C asosni uzunligi. Umum kasr – $K_1K_2 = d$ balandligi.

Misol 1. § 164 dagi 1 misolning ikkita to`g`ri chiziq o`rtasida eng qisqa masofani toping [$\boldsymbol{r_1}=\{2, 1, -1\}$, $\boldsymbol{r_2}=\{-31, 6, 3\}$ $\boldsymbol{a_1}=\{2, 4, -1\}$, $\boldsymbol{a_2}=\{3, 2, 6\}$].

Yechilishi. Berilgan to`g`ri chiziqlar parallel emas.

$$\left\{ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{26, -15, -8\},$$

$$\boldsymbol{(r - r_1)a_1a_2 = -33 * 26 + 5 * (-15) + 4 * (-8) = -965}.$$

Formula (1) dan:

$$d = \frac{965}{\sqrt{(26)^2+(-15)^2+(-8)^2}} = \frac{965}{\sqrt{965}} = \sqrt{965}.$$

Misol 2. § 164 dagi 2 misolning ikkita to`g`ri chiziq o`rtasida eng qisqa masofani toping [$\boldsymbol{a_1}$,= $\boldsymbol{a_2}$=$\{2, 2, 1\}$, $\boldsymbol{r_2}$ - $\boldsymbol{r_1}$ =$\{3,1,1\}$].

Yechilishi. To`g`ri chiziqlar parallel; formula (2) dan:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \sqrt{2}.$$

Izoh. To`g`ri chiziqlar o`rtasida eng qisqa masofasiga (agar ular perpendikulyar yoki parallel bo`lmasa), belgi yozib qo`shish mumkin (§ 165a ga qarang).

14.44. Sirtlar tenglamasi tenglamasi

x, y, z, koordinatalarini bog`laydigan tenglama S yuzasi tenglamasi deyiladi, agar keyingi ikki shartga rioya qilingan bo`lsa: 1) S yuzasining har bir nuqtasi x, y, z koordinatalari ushbu tenglamani qoniqtiradi, 2) s yuzasida yotmagan har qanday nuqtaning x,y, z koordinatalari bu tenglamani qondirmaydi (§7 ga garang). Izoh. Agar koordinatalar tizimini o`zgartirsak, yuza tenglamasi ham o`zgaradi(yangi tenglama eskisidan koordinatalarni qayta hosil qiluvchi tenglamalar orqali hosil bo`ladi § 166).

Misol 1. x+y+z-1= 0 ushbu tenglama tekis yuza tenglamasi hisoblanadi. To'rtburchak koordinatali tizimni to'g'ri tanlash bilan bir xil yuzali boshqa birinchi darajali tenglama bilan ifodalanishi mumkin.

Misol 2. Sharning (sfera), markazli radiusning R yuzasi koordinatalarning boshida quyidagi tenglama orqali ifodalanadi

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

(1) yoki 1) Agar M(x, y, z) nuqta shu yuzada yotsa, unda OM = $\sqrt{x^2+y^2}+z^2$ masofa R radiusga teng, bundan kelib chiqib, (1) tenglama qoniqtiriladi. 2) Agar M yuzada yotmasa, shunda OM $\neq$ R, va tenglama qoniqtirilmaydi.

Misol 3. Markazli R radius sferasi, C (a; b; c) nuqtada quyidagi tenglama orqali ifodalanadi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \qquad (2)$$

x, y, z, koordinatalarini bog`lab turadigan tenglama, yuzani emas, balki boshqa geometrik tasvirlarni ifodalashi mumkin, yoki hech qanday geometrik tasvirni ifodalamasligi mumkin.(§ 58 ga qarang).

Misol 4. $x^2+y^2+z^2 + 1 = 0$ tenglamasi hech qanday geometrik tasvirni ifodalamaydi, chunki u (haqiqiy) yechilishiga ega emas.

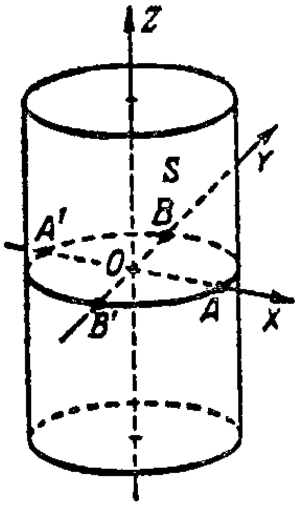
Misol 5. $x^2+y^2+z^2 = 0$ tenglamasi yagona haqiqiy yechilishiga ega x = 0, y = 0, z = 0 bitta nuqtani ifodalaydi.

Misol 6. Bir vaqtning o`zida $x-y = 0$ va $z-y = 0$, to`g`ri chiziq $x =y =z$ ni ifodalasagina, $(x-y)^2 + (z-y)^2 = 0$ tenglamasi qoniqtiriladi.

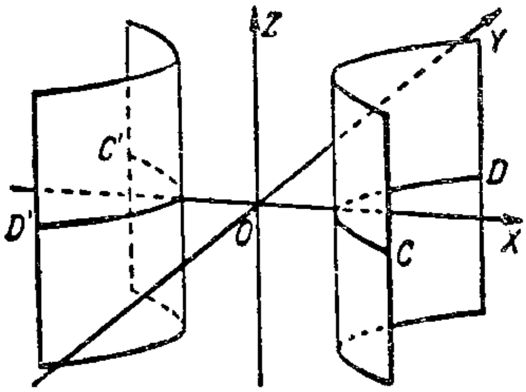
14.45. Koordinata o'qlaridan biriga parallel bo'lgan silindrsimon sirtlarni hosil qilish.

Harakatsiz to`g`ri chiziqqa paralel ravishda, to`g`ri chiziq(shakllantiruvchi) harakati natijasida hosil bo`lgan yuza silindrsimon deb ataladi. Shakllantiruvchinig har qanday holadida kesib o`gan har bir chizig`i yo`naltiruvchi deb ataladi.

z Koordinatalarini o`z ichiga olmaydigan va tekislikda L ning qaysidir chizig`i XOY ni namoyon qiluvchi har bir tenglama, fazoda silindrik yuzani ifodalaydi, shakllantiruvchisi OZ o`qiga parallel, yo`naltiruvchisi sifatida L chizig`i xizmat qiladi.



182- chizma



183-chizma

Misol 1. Tenglama

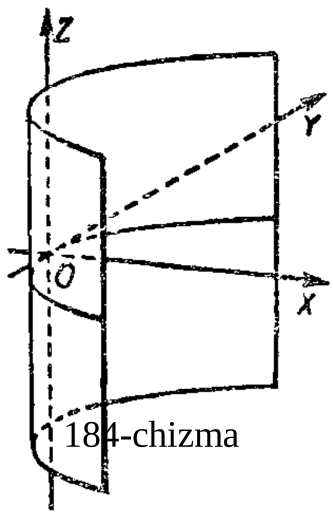
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

XOY tekisligida yarimo`qli a = OA, b = OB (182- chizma) ABA`B` elipsini ifodalaydi. U fazoda silindrik yuza S ni ifodalaydi, shakllantiruvchisi OZ o`qiga parallel, yo`naltiruvchi sifatida ABA`B` ellips(eliptik silindr) xizmat qiladi.

Misol 2. Tenglama $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ silindrik yuzani ifodalaydi(183-chizma), shakllantiruvchisi OZ o`qiga parallel, yo`naltiruvchi sifatida giperbola CDC`D` (giperbolik silindr).

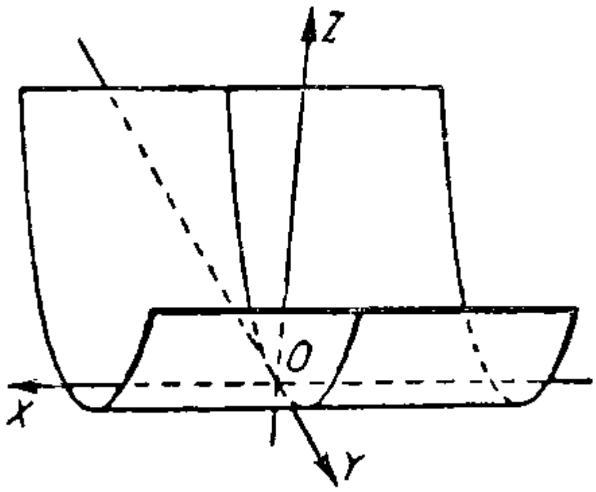
Misol 3. Tenglama $y^2 = 2px$ parabolic silindrni ifodalaydi(184-chizma).

Shakllantiruvchisi OX (yoki OY) o`qiga parallel, silindrik yuzani ifodalovchi, x (yoki y) koordinatalarni o`z ichiga olmaydigan tenglama.



184-chizma

Misol 4. Tenglama $y^2 = 2pz$, joylashgan, 185-chizmada ko`rsatilganidek parabolik silindrni ifodalaydi.
Izoh. Agar yo`naltiruvchi – to`g`ri chiziq bo`lsa, unda silindrik yuza – tekis. Bunga ko`ra $Ax + By + D = 0$ tenglamasi fazoda OZ o`qiga paralle tekislikni ifodalaydi.

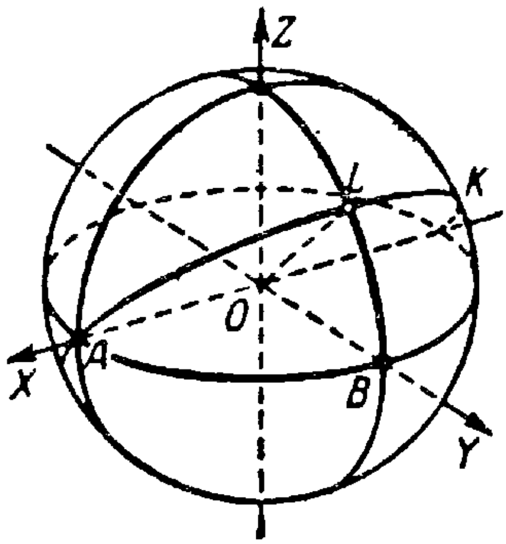


14.46. Egri chiziq tenglamasi

Chiziqni ikkita yuzalarning kesishuvi deb hisoblash mumkin va shu bilan birga ikkita tenglama tizimini ifodalash mumkin.

Ikkita (birga olingan) tenglamalar, agar keyingi shartlarga rioya qilinga bo`lsa, x, y, z, majburiy koordinatalari L chiziq tenglamasi deyiladi:

185-chizma



1) L chiziqning har bir M nuqtasining koordinatasi ikkita tenglamani ham qoniqtiradi; 2) L chizig`ida yotmaydigan har bir nuqta koordinatasi ikkita tenglamani birdaniga qoniqtira olmaydi (faqatgina bittasini qoniqtira oladi; § 140 ga qarang).

Misol 1. Ikkita tenglama $y - z = 0$, $x - z = 0$ ikki tekislikning kesishuvi kabi (misol 1§ 140 ga qarang) to`g`ri chiqni ifodalaydi.

Misol 2. Ikkita tenglama $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = z$

har biri ifodalaydi: birinchisi – O nuqta markazi bilan, α sfera radiusini (186- chizma), ikkinchisi – LOX tekisligi (OL tekisligi YOZ burchagini teng ikkiga bo`ladi). Birgalikda olingan bu tenglamalar katta doira 186-chizma aylanasini ALK ni ifodalaydi.

Izoh 1.Bitta chiziq har xil (bir – biriga teng ahamiyatli) tenglamalar tizimi bilan ifodalanishi mumkin, yoki uni har xil juft yuzalar kesishuviday olish mumkin.

Izoh 2. Ikkita tenglamalar tizimi faqtgina chiziqni emas, balki boshqa geometrik tasvirlarni ham ifodalay oladi; shuningdek hech qanday geometrik tavirni ifodalamasligi ham mumkin.

Misol 3. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z=5$ Tenglamalar tizimi (0; 0; 5) nuqtani ifodalaydi, unda $z = 5$ tekislik $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sferaga tegishli.

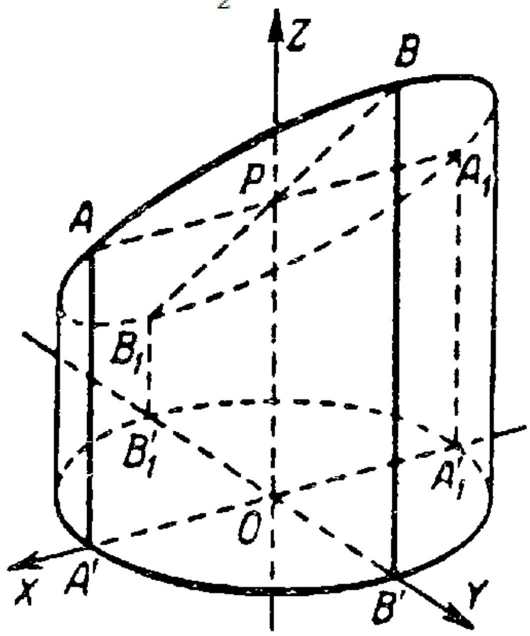
Misol 4. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x + y + z = 1$ Tenglamalar tizimi hech qanday geometrik tasvirni ifodalamaydi, birinchi tenglama uchun faqat $x = 0$, $y = 0$ qiymatlari qoniqtiradi va ular ikkinchi tenglamani qoniqtirmaydi.

14.47. Koordinatalar tekislikda egri chiziq proektsiyasi

1. L chiziq ikkita tenglama orqali ifodalansin, ulardan biri z ni o`z ichiga olsin, ikkinchisi esa o`z ichiga olmasin [1]). Shunda ikkinchisi “vertikal” silindrik yuzani ifodalaydi, bu yuzani L_1 yo`naltiruvchisi – XOY yuzasida (§ 168); XOY tekisligida L chiziq proektsiyasi $L_1$ chizig`ida yotadi (uni to`liq yoki qisman qamrab oladi).

Misol 1. Tenglamalar,

$$z = y + \frac{3}{2},\ x^2 + y^2 = 1$$



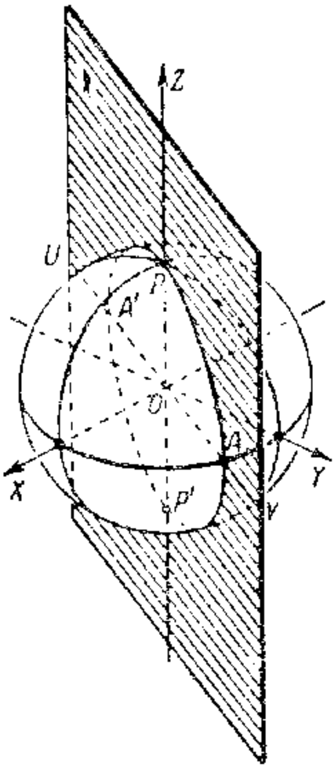
187-chizma

aylana silindrik yuza $x^2 + y^2 = 1$ va $z = y + \frac{3}{2}$ tekislik kesib o`tadigan (187-chizmada P tekislik), $ABA_1B_1$ (ellips) chiziqni ifodalaydi ( 187-chizma). $x^2 + y^2 = 1$ tenglama XOY tekislikda $A`B`A`_1B`_1$ aylanani ifodalaydi. $ABA_1B_1$ chiziq proektsiyasi $A`B`A`_1B`_1$ chiziq bilan bir xil.

Misol 2. Tenglamalar

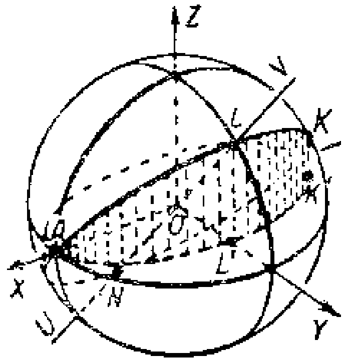
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = mx$$

bu sferaning y = mx (188-chizmada R tekisligi) tekisligi bilan kesishishi sifatida (“meridian”) APA`P` sfera O ning katta doirasini ifodalaydi (188-chizma). y = mx Tenglama XOY tekisligida UV to`g`ri chiziqni ifodalaydi. APA`P` meridian proektsiyasi UV to`g`ri chizig`i va XOY tekisligida yotadi, lekin uning faqatgina bir qismini qoplaydi, aynan kesma AA`.



2. L chiziqni ifodalovchi ikkita tenglama ham z ni o`z ichiga olsin; shunda L chiziq proektsiyasini topish uchun XOY tekisligida z ni berilgan tenglamalardan chiqarish kerak. [1]). Chiqarish natijasida hosil bo`lgan tenglama, qidirilgan proektsiya (uni to`liq yoki bir qismini qoplagan holda) L` chiziqda yotadigan XOY tekislikni ifodalaydi.

188-chizma



Xuddi shunday, XOZ va YOZ tekisligida chiziqning proektsiyalari ham mavjud. M 1 dan kelib chiqadiki.

Misol 3. $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (1)$$

$$y = z \quad (2)$$

Tenglamalar orqali ifodalanadigan (§ 169, Misol 2 ga qarang), aylanani ko`rib chiqamiz (189-chizmadagi ALK).

---

[1]) z ni ikkita tenglamadan chiqarish – uchinchi tenglamani topmoq, ikkita berilgan tenglamar tizimini qoniqtiruvchi z ni o`z ichiga olmaydigan va x y ning o`sha barcha qiymatlaridan qoniqish demakdir.

Uni proektsiyasini topish uchun XOY tekisligida z ni (1) va (2) dan chiqaramiz. Quyidagi tenglama hosil bo`ladi

$$x^2 + 2y^2 = a^2 \qquad (3)$$

U XOY tekisligida yarimo`qli OA = a, OL` = $\frac{a}{\sqrt{2}}$, AL`K` ellipsini ifodalaydi. ALK aylanasinig proektsiyasi AL`K` ellipsini to`liq qoplaydi.

ALK aylanasining proektsiyasini topish uchun XOZ tekisligida (1) va (2) dan y ni chiqarish kerak. Quyidagi tenglama hosil bo`ladi

$$x^2 + 2z^2 = a^2 \qquad (4)$$

XOZ tekisligida xuddi AL`K` ga o`xshash o`lchamga ega ellipsni ifodalaydi. Ushbu ellipsni aylana proektsiyasi to`liq qoplaydi.

ALK aylana proyektsiyasini topish uchun YOZ tekisligida x ni chiqarish shart emas, chunki tenglamalardan biri (y=z) shu siz ham x ni o`z ichiga oladi. y=z tenglamasi YOZ tekisligida UV ning barcha to`g`ri chizig`ini ifodalaydi, lekin qidirilgan proektsiya uning kesmasinigina qoplaydi (NL).

14.48. Algebraik sirtlar va ularning tartibi

Ikkinchi darajali algebraik tenglamalar (uch nomalumli x, y, z) deb quyidagi ko`rinishga ega bo`lgan tenglamalarga aytiladi

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + \\ + Kz + L = 0,$$

har xolda bu tenglamada oltita A, B, C, D, E, F kattaliklardan biri nolga teng emas. Xuddi shu kabi har qanday darajadagi algebraik tenglama aniqlanadi (§ 37 ga qarang).

Agar ba'zi bir sirt S birinchi darajali tenglama bilan har qanday to'rtburchaklar koordinata tizimida ifodalangan bo'lsa, unda boshqa to'rtburchaklar tizimda u bir xil darajadagi tenglama bilan ifodalanadi (§ 37 ga qarang).

Birinchi darajali tenglama bilan ifodalanadigan sirt, birinchi tartib algebraik sirt deyiladi.

Birinchi tartibning barcha sirti bu tekislik. Ikkinchi tartib sirtlari keyingi paragriflarda ko`rib chiqilgan.

Sfera

Ikkinchi daraja tenglamasi (§ 167, misol 2) markazi koordinatalarni boshida bo`lgan *R* radiusni sferasini ifodalaydi

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (1)$$

Agar sferani boshi bilan markazi to`g`ri kelmasa, bu ham ikkinchi daraja tenglama bilan ifodalanadi, ya`ni

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \qquad (2)$$

a,*b*,*c*-sfera markazini koordinatalari (§ 38 ga qarang).

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Gx+Hy+Kz+L=0 \qquad (3)$$

ikkinchi darajali tenglama sferani faqat quyidagi sharoitda ifodalaydi

$$A=B=C \qquad (4)$$

$$D=0,\ E=0,\ F=0, \qquad (5)$$

$$G^2+H^2+K^2-4AL>0 \qquad (6)$$

(§ 38 ga qarang). Bu sharoitda

$$a=\frac{G}{2A},b=\frac{H}{2A},c=-\frac{K}{2A},R^2=\frac{G^2+H^2+K^2-4AL}{4A^2}. \qquad (7)$$

Misol. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$

(A=B=C=1, D=E=F=0, G=-2, H= - 4, K=0, L= -4)

tenglama sferani ifodalaydi. $x^2-2x\ \ va\ y^2-4y$ ni butun kvadratlargacha to`ldirib va o`ng qismiga kompensatsiya uchun $1^2, 2^2$ ni qo`shib, quyidagi tenglama kelib chiqadi

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9,$$

Ya`ni, *a=1*, *b=2*, *c=0*, *R=3.*

Qolganini (7) formuladan topamiz.

Ellipsoid

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ tenglamasi bilan ifodalangan yuza [1]), *ellipsoid* deb aytiladi [1]) (190-chizma).

---

[1]) bu yerda va keyinchalik, *a,b,c* harflar bilan ayrim kesmalar uzunligi ifodalangan, ya`ni a,b,c sonlari musbat.

Ellipsoid *ABA`B`* (1) bilan *XOY* tekislik kesishgan chizig`i quyidagi tizim (§ 169) bilan ifodalanadi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad z=0.$$

U quyidagi sistemaga teng kuchli

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad z=0,$$

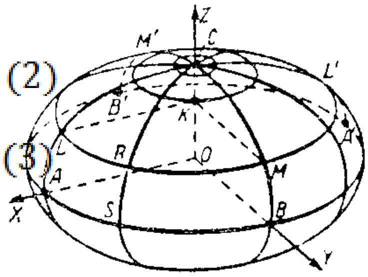
shunday qilib *ABA`B`* - bu ellips *OA=a, OB=b* yarim o`qlari bilan.

Ellipsoid (1)ni *YOZ, XOZ* tekisliklar bilan kesishlari, ya`ni *M`CMB* ellipsi *OB=b, OC=c* yarim o`qlar bilan[2]) va *L`CLA OA=a, OC=c.*

Ellipsoidni *z=h* tekisligi bilan kesishi (*LML`M`* 190-chizmada) quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \tag{2}$$

$$z=h. \tag{3}$$



Ammo agar $|h|>c$ bo`lsa, tenglama (2) geometrik o`ringa ega bo`lmaydi («mavhum elliptik silindr»; § 58, misol 5 ga qarang). Bu holatda tekislik ellipsoidni kesishmaydi.

190-chizma

$|h|=c$ bo`lganda, tenglama (2) *OZ* o`qini ifodalaydi (*x=0, y=0;* § 58, misol 4). Demak, *z=c* tekisligi ellipsoid bilan bitta umumiy *C(0;0;c)* (urinish nuqtasi) nuqtaga ega; xuddi shu tarzda *z=-c* tekisligi ellipsoidga *C` (0;0;-c)* nuqtasiga tegadi (chiziqda ko`rsatmagan).

---

[1])“Ellipsoid” yunoncha so`zi “ellipsoidsimon” so`zini ma`no anglatadi. Bu so`z yuzani nomlashga to`g`ri kelmasada, ammo juda chuqur o`rnashib qolgan. Yunoniston geometriya olimlari aylanish ellipsoidlarni (boshqalarni ko`rib chiqmagan) *sferoid* deb atagan (ya`ni “sferoidsimon”). Bu nom hozirgi kunda ham ishlatiladi.

[2]) Ilgari (§ 41) *c* harfi bilan fokus masofani yarimini belgilagan edilar [$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, c<a]. Bu yerda *c* o`zga manoga ega va har qanday mazmunni anglatadi.

Agar $|h| < c$ bo`lsa, izlangan kesim – bu *a* va *b* yarim o`qlari proportsional bo`lgan ellips.

$$KL = a = \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2},} \quad ,$$

$$KM = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2},} \quad , \qquad (4)$$

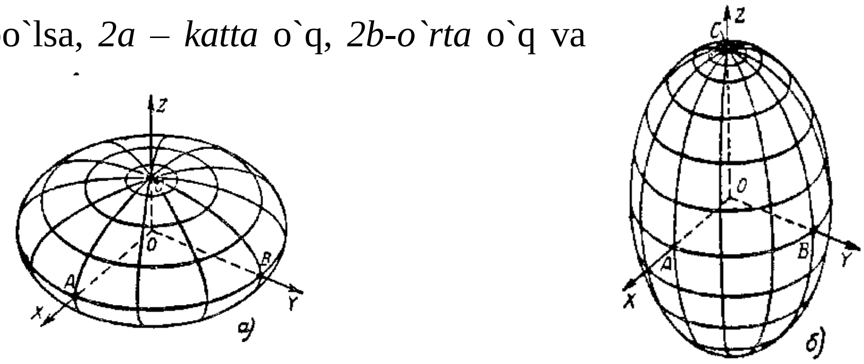
XOY tekislikdan uzoqlashga qadar, kesimlar kattaligi kichrayadi (shunda ularning barchasi o`xshashdir).

Shu kabi holat *YOZ,ZOX* tekislikga parallel bolgan kesimlar uchun.

O nuqtasi-bu ellipsoid (1)ni simmetriya markazi. *XOY,YOZ,XOZ* tekisligi – simmetriya tekisligi, *OX,OY* o`qlari- Simmetriya o`qi [1]).

Uch o`qli ellipsoid. Agar *a,b,c* uchala kattaliklari har xil bo`lsa (ya`ni A`*CA, B`CB, ABA*` ellipslardan birontasi ayhlanaga aylanmaydi), ellipsoid (1) uch o`qli deb ataladi. *`CA, B`CB, ABA`* ellipslar asosiy deb ataladi; ularning cho`qqilari [*A (a; 0;0), A` (-a;0;0), B (0;b;0), C (0;0;c), C` (0;0;-c)*] – uch o`qlii ellipsoidni *cho`qillari* deb ataladi. *AA`, BB`, CC`* kesmalari (asosiy ellipslarni o`qlari), hamda ularning uzunligi – *ellipsoidni o`qlari* deb ataladi.

Agar *a>b>c* bo`lsa, *2a – katta* o`q, *2b-o`rta* o`q va *2c-kichik*.



191-chizma

Aylanish ellipsoidi. Agar *a,b,c* kattaliklaridan ikkitasi, masalan, *a* va *b* teng bo`lsa shunga tegishli asosiy ellips *A`BA* va unga parallel bo`lgan hamma kesimlar aylanaga aylanadi. *OZ* o`qidan o`tgan har qanday *CRS* kesmasini, *CLA* ellipsini

OZ o`qi yo`nidan burilishi bilan olish mumkin, ya`ni ellipsoid – bu aylanish sirti (*CLA*, *CRS*, *CMB* va boshqalar – *meridianalar*, *A`BA* aylanasi - *ekvator*). Bunday ellipsoid *aylanish ellipsoidi* deb ataladi. Uni tenglamasi quyidagi ko`rinishga ega

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad (5)$$

Agar $a>c$ bo`lsa, aylanish ellipsoidi *siqilgan* deb ataladi (191-chizma, a), $a<c$ bo`lsa, *cho`ziq* (191-chizma, a). Aylanish ellipsoidning ikki o`qining holati noaniq.

Agar $a=b=c$ bo`lsa, ellipsoid sferaga aylanadi, va uchala o`qini holati noaniq bo`ladi.

Izoh 1. Aylanish ellipsoidni sferani uning ekvatoriga bir xil siqishda bo`ladigan sirt deb atash mumkin (§ 40 ga qarang). Agar siqilish koeffitsiyenti $k<1$ bo`lsa, siqilgan ellipsoid kelib chiqadi, $k>1$ bo`lsa-cho`ziq.

Uch o`qli ellipsoidni aylanish ellipsoidni uning meridianiga bir xil siqishda bo`ladigan sirt deb atash mumkin.

Izoh 2. Ellipsoid tenglama (1) bilan ifodalansa, agar koordinata o`qlari ellipsoid o`qlari bilan to`g`ri kelsa. Boshqa holatlarda ellipsoid boshqa tenglamalar bilan ifodalanadi.

Misol 1. Quyidagi tenglama qaysi sirtni ifodalashini aniqlang

$$16x^2 + 3y^2 + 16z^2 - 48 = 0.$$

Yechilishi. Tenglama quyidagi ko`rinishga keltiriladi

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

U $a=c=\sqrt{3}$, $b=4$ yarim o`qli cho`ziq aylanish ellipsoidni ifodalaydi. Aylanish o`q sifatida *Oy* chiqadi.

Misol 2. Quyidagi tenglama qaysi sirtni ifodalashini aniqlang

$$x^2 - 6x + 4y^2 + 9z^2 + 36z - 99 = 0.$$

Yechilishi. Tenglama quyidagi ko`rinishga keltiriladi

$$(x-3)^2 + 4y^2 + 9(z+2)^2 = 144.$$

Koordinatalar boshini (3;0;-2) nuqtasiga o`tkazib qoyamiz; shunda, $x`^2 + 4y`^2 + 9z`^2 = 144$, yoki

$$\frac{x`^2}{144} + \frac{y`^2}{36} + \frac{z`^2}{16} = 1.$$

Ushbu tenglama *a=12, b=6, c=4* yarim o`qli uch o`qli ellipsiidni ifodalaydi; markazi (3;0;-2) nuqtasida yotadi, o`qi koordinata o`qiga parallel ravishda.

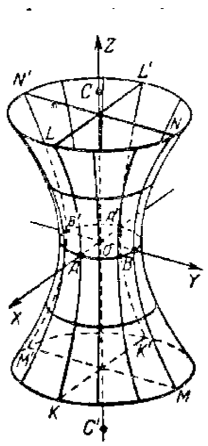
Bir pallali giperboloid

Quyidagi tenglama bilan igodalaydigan sirt, *bir pallali giperpboloid* deb ataladi (192-chizma)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

“Giperboloid” nomlanishi sababi – bu sirtning kesimlari o`rtasida giperbolalar mavjudligi uchun. Shunday, xususan *x=0* (*MNN`M`* 192-chizmadagi) va y=0 *(KLL`K`)*

tekisliklar kesimlari. Bu kesimlar (o`z tekisliklarida) quyidagi tenglamalar bilan ifodalanaydi



$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3)$$

“Bir pallali” nomlanish shuni ta`kidlaydiki, sirt (1) *ikki pallali giperboloidni* sirtiga teskarisicha (§ 175 ga qarang) ikkita “pallaga” uzmagan, balki uzluksiz cheksiz *OZ* o`qida cho`zilgan naychadir.

z=h

(4)

192-chizma tekisligi , h ni har qanday qiymatida (§ 173 ga qarang) (1) sirt bilan kesimda $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ yarim o`qlar bilan ellips [2]) hosil qiladi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}\ . \qquad (5)$$

Hamma ellipslar (5) o`xshaydi, cho`qqilari giperbola (2) va (3) da yotadi; ellipslar kattaligi kesimlar *XOY* tekislikdan uzoqlashgan sari kattalashadi. *XOY* tekisligi bilan kesim, bu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5`)$$

ellips (*tomoqli* *ellips* *ABA`B`*).

---

[1])Ya`ni "giperboloidsimon". 205-betdagi [1]) chi havolaga qarang

[2]) bu yerda $a \neq b$ ga deb taxmin qilingan. Agar $a=b$ bo`lsa, (5) chi ellipslar aylanaga aylanadilar; pastda tenglama (6) ga qarang.

Giperbolalar (2) va (3), hamda ellips (5`) asosiy kesimlar deb aytiladi, ularning *A(a;0;0), A`(-a;0;0), B (0;b;0), B` (0;-b;0)* cho`qqilari – bir pallali giperbloid cho`qqilari deb aytiladi. *AA`=2a, BB`=2b* (asosiy giperbolalarning haqiqiy o`qlari) kesmalar, va ko`pincha, *AA`*, *BB`* to`g`ri chiziqlari ham *ko`ndalang o`qlar* deb aytiladi. *OZ* o`qiga (har bir asosiy giperbolalarning mavhum o`qi)qo`yilgan *CC`=2OC=2c* kesmasi, bir pallali giperbloidning *bo`ylama o`qi* deb aytiladi.

O nuqtasi – bu bir pallali giperbloidni (1) simmetrik markazi, *XOY*, *YOZ, ZOX* tekisliklari-simmetriya tekisligi, *OX*, *OY*, *OZ* o`qlari – simmetriya o`qlari.

Bir pallali aylanisg giperboloidi. Agar $a=b$ bo`lsa, tenglama (1) quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (6)$$

ABA`B` tomoqli ellips radius *a* li *tomoqli aylanaga* aylanadi. *XOY* ga parallel bo`lgan hamma kesmalar ham aylanadir. *KLL`K`* va *MNN`M`* (hamda hamma bo`ylama o`qlardan o`tadigan kesmalar) kesmalar teng giperbolalar bo`ladilar, hamda (6) chi sirtni *KLL`K`* giperbolani bo`ylama o`qni yonidan aylanish natijasida hosil qilish mumkin. Sirt (6) *bir pallali aylanish giperboloidi* deb ataladi. Uning ikkita (ko`ndalang) o`qining holati nomalum bo`ladi, uchinchisi (bo`ylama) o`qi aylangan giperbolaning mavhum o`qi bilan to`g`ri keladi. Aylanish giperboloidga qaraganda *(a=b)* , bir pallali giperboloid (1) $a \neq b$ bo`lganda *uch o`qli* deyiladi.

Izoh. Bir pallali aylanish giperboloidni uning mavhum o`qidan aylanish natijasida hosil bolgan sirt deb aniqlash mumkin, uch o`qli bir pallali aylanish giperboloidni –

bir pallali aylanish gipeboloidni qandaydir meridian tekisligiga bir maromda siqish natijasida hosil bo`ladigan sirt deb.

Misol. Sirt turini aniqlang

$x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 16 = 0.$

Yechilishi. Ushbu tenglama quyidagi ko`rinishga keltiriladi

$$- \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1.$$

U markazi *(0;0;0)* nuqtasida bo`lgan bir pallali aylanish giperboloidni ifodalaydi, aylanish o`qi – *OX* (chunki manfiy koeffitsiyent x^2 oldida turibti). Tomog`li aylana radiusi $r=2$, bo`ylama yarim o`q – 4ga teng.

Ikki pallali giperboloid

Quyidagi tenglama bilan ifodalangan sirt, *ikki pallali giperboloid* deb aytiladi (chizma-193)

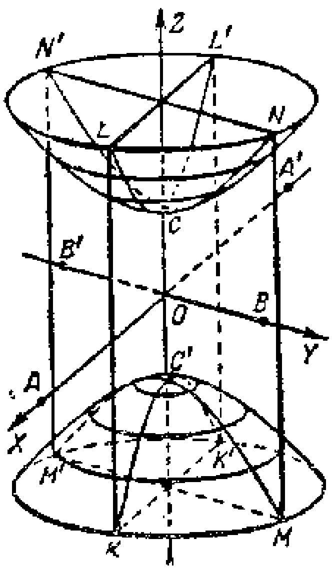
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (1)$$

XOZ va *YOZ* tekisliklar bilan kesimlar quyidagi tenglamalar bilan ifodalanadilar

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Bu-giperbolalar (193-chizmadagi *KK`L`L* va *MM`N`N*). Har biri uchun *OZ* o`qi *haqiqiy* o`q deb hisoblanadi (§ 174 ga qarang).



$z=h$ tekisliklar giperboloid (1) bilan uchrashmaydi $|h| < c$ bo`lganda (§ 174 ga qarang). $h=\pm c$ bo`lganda *C (0;0;c)* va *C` (0;0;-c)* nuqtalarda giperboloidga tegadi.

$|h| > c$ bo`lganda, kesmalarda bir biriga o`xshash ellipslar (*KMK`M`*, *LNL`N`* va boshqalar) hosil bo`ladi [1])

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \qquad (4)$$

XOY tekislikdan uzoqlangan sari ularning hajmi

193-chizma kattalashadi.

Shunday qilib, sirt (1) ikkita ajrashgan palladan iborat, shu yerdan ikki pallali giperboloid nomi kelib chiqadi. (2)va (3) chi giperoloidlar *asosiy* kesimlar deb ataladi, ularning ummumiy *C* va *C`* cho`qqilari-ikki pallali giperboloidni *cho`qqilari*, ularning haqiqiy *CC`* o`qi – ikki pallali giperboloidni *ko`ndalang o`qi*, mavhum *AA`=2a* va BB`=2b o`qlari - *siimetriyani bo`ylama o`qi* deb aytiladi

Ikki pallali giperboloid *O* markaziga ega, *OX,OY,OZ* simmetriya o`qi va *XOY, YOZ, ZOX* simmetriya tekisliklariga ega.

XOY tekisligiga qaraganda, giperboloidni ikkita pallasi bir biriga simmetrik.

Ikki pallali aylanish giperboloidi. Tenglama (1), *a=b* bo`lganida quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

va giperbolani o`z haqiqiy o`qi yonida aylangan sirtni ifodalaydi. U *ikki pallali aylanish giperboloid* deb nomlanadi. *a* va *b* teng bo`lmagan ko`ndalang yarim o`qlari bilani ikki pallali giperboloid uch o`qli deb nomlanadi.m

Misol 1. Sirt turini aniqlang

$$3x^2-5y^2-2z^2-30=0.$$

Yechilishi. Ushbu tenglama quyidagi ko`rinishga keltiriladi

$$\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{15}-\frac{x^2}{10}=-1.$$

Ikki pallali (uch o`qli) giperboloid mavjud. Bo`ylama o`qi $\sqrt{10}$ ga tengva *OX* o`qi bilan to`g`ri keadi, bitta ko`ndalang o`qi $\sqrt{6}$ ga teng va *OY* o`qi tomoniga yo`nalgan, boshqasi $\sqrt{15}$ ga teng va *OZ* o`qi tomoniga yo`nalgan.

Misol 2. $x^2-y^2-z^2=-1$

tenglamasi *bir pallali* (ikki pallali emas) giperboloidni ifodalaydi (garchi o`ng qismida +1 emas, -1 tursa, ammo chap qismida ikkita manfiy qo`shiluvchi). Ushbu tenglamani $y^2+z^2-x^2=1$ ko`rinishga keltirib, ushbu giperboloid teng tomonli giperbolani uni mavhum o`qi (*OX* o`qi bilan to`g`ri keladigan) yo`nida aylanish natijasida hosil bo`lgani ko`rinadi.

Ikkinchi tartibli konus

Konusaviy sirt deb, harakatsiz nuqtadan (konusaviy sirt cho`qqisi) harakatlanuvchi to`gri chiziq (yasovchi) o`tgan natijasida hosil bo`lgan har qanday sirt deb aytiladi. Yasovchini har qanday holatida kesgan har qanday (cho`qqidan o`tmagan) chiziq, yetakchi deb aytiladi.

Quyidagi ko`rsatgandek, konisaviy sirt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (1)$$

Ikkinchi tartibli konus deb aytiladi (194-chizma).

Uni *XOZ* (*y=0*) tekisligi bilan kesishi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

ya`ni

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0. \qquad (2)$$

Bular- boshidan o`tgan (§ 58) (*KL* va *K`L`*) to`g`ri chiziqlar juftligi. *YOZ* tekisligi bilan kesimda to`g`ri chiziqlar juftligini (*MN* va *M`N`*) olamiz:

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=0. \qquad (3)$$

OZ o`qidan o`tgan har qanday boshqa tekislik bilan kesish *y=kx*, (§ 169) dagi tizim bilan ifodalanadi

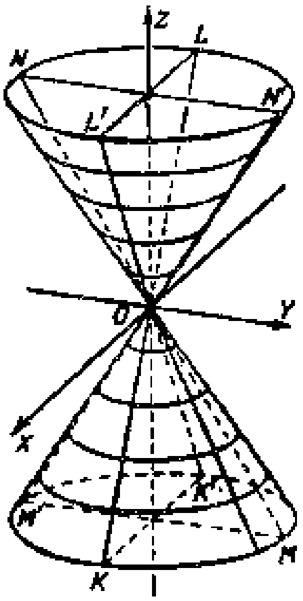
$$y=kx, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (4)$$

Bu ham boshdan o`tgan to`g`ri chiziqlar juftligi:

$$y=kx, \quad x\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}+\frac{z}{c}=0 \qquad (5)$$

va

$$y=kx, \quad x\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}-\frac{z}{c}=0. \qquad (6)$$



194 - chizma

Demak, sirt (1) konusaviy, *O*-uni cho`qqisi.

Konus (1) ni har qanday tekislik bilan kesishi *z=h* (*h≠0* bo`lganida), bu ellipsdir

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}; \qquad (7)$$

h=0 bo`lganida, u *O (0;0;0)* nuqtasiga aylanadi. Hamma ellipslar (7) o`xshaydi, ularning cho`qqilari (2) va (3) kesishlarda yotadi.

a=b bo`lganda, hamma ellipslar (7) aylanaga aylanadi, ikkinchi tartibli konus – aylana konusga

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (8)$$

Ikkinchi tartibli konus – bu aylana konusni o`qli kesim tekislikga bir tekis siqish natijasida hosil bo`ladigan sirt.

Konus (1) ni *XOZ* (yoki *YOZ* tekisligi) tekislikga parallel bo`lgan tekisliklar bilan kesimlari, giperbola mohiyati.

Izoh. Har qanday ikkinchi tartibli konuslarni cho`qqidan o`tmaydigan tekisliklardan kesimlari – aylana [1]), ellips, giperbola va parabola bo`ladi. Bularni har bir chizig`i yetakchi deb olish mumkin. Shuning uchun ikkinchi tartibli konusni “elliptik” nomlash maqsadga muvofiq.

Misol 1. $x^2+y^2=z^2$ tenglamasi aylana konusni ifodalaydi; XOZ tekislik bilan kesim – bu $x=\pm z$ to`g`ri chiziqlar juftligi. Yasovchilar o`q bilan 45° burchakni hosil qiladilar.

Misol 2. $-x^2+9y^2+3z^2=0$ tenglamasi ikkinchi tartibli (aylana emas) konusni ifodalaydi. Har qanday $z=h$ $(h\neq 0)$ tekislik bilan kesim – bu $x^2-9y^2=3h^2$ giperbola; $h=0$ bo`lganida, yasovchilar juftligiga aylanadi. Xuddi shu kabi holat $y=l$ kesimlar uchun. $x=d$ kesimlar ($d\neq 0$) – ellipslar.

Elliptik paraboloid

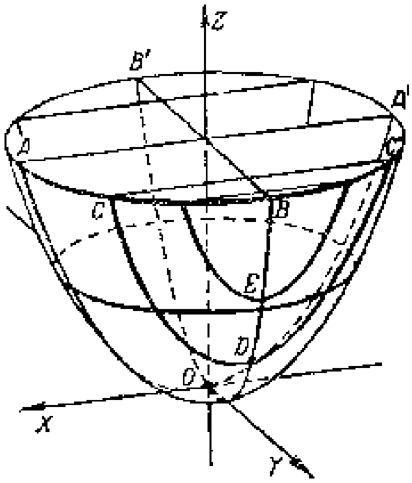
Quyidagi tenglama bilan ifodalangan sirt ($p>0$, $q>0$) – *elliptik paraboloid* deyiladi (195-chizma)

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\ . \qquad (1)$$

XOZ va *YOZ* (asosiy kesimlar) tekisliklar bilan kesimlar – bu parabolalar (*AOA*`, *BOB*`)

$$x^2=2pz, \qquad (2)$$

$$y^2=2qz; \qquad (3)$$



195-chizma

ikkalasi ham botiqlik bilan bir tomonga (“yuqoriga”) qaragan.

$z=0$ tekisligi paraboloidni O nuqtasida tegadi, $z=h$ tekisiklar $h>0$ bo`lganda paraboloidni bir biriga o`xshash $\sqrt{2ph},\sqrt{2qh}$ yarim o`qlar bilan ellipslarni kesadi

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=h \qquad (4)$$

Elliptik paraboloid simmetriya markaziga ega emas; u *XOZ* va *YOZ* tekisliklar va *OZ* o`qiga nisbatdan simmetrik. *OZ* to`g`ri chizig`i elliptik paraboloidni o`qi deyiladi, *O* nuqtasi – uni *cho`qqisi*, *p* va *q* kattaliklari – *parametrlari*.

$p=q$ bolganda parabolalar (2) va (3) teng bo`ladi, ellipslar (4) aylanaga aylanadilar va paraboloid (1) parabolani uni o`qi yo`nidan aylangan natijasida hosil bo`lgan sirt bo`ladi (*aylanish paraboloidi*) [1]).

Elliptik paraboloidni aylanish paraboloidni uni meridianiga bir xil siqishda hosil bo`ladigan sirt deb aytish mumkin.

Misol. $z^2=x^2+y^2$ sirti – bu $z=x^2$ parabolani uni o`qi (*OZ* o`qi) yonida aylanish natijasida hosil bo`lgan aylanish paraboloidi. $x^2=y2+z^2$ sirt ham o`sha paraboloid, faqat boshqacha jo`ylashgan (aylanish o`qi *OX* bilan to`g`ri keladi).

Izoh. Elliptik paraboloidni $y = f$ tekjisligi bilan kesishda $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{f^2}{2q}$ *(CDC`)* to`g`ri chiziqga ega bo`lamiz; bu-parabola, *AOA*` ($z = \frac{x^2}{2p}$) parabolaga (§ 50) teng; uni o`qi ham “yuqoriga” yo`naltirilgan, cho`qqisi esa $D(0; f; \frac{f^2}{2q})$ nuqtasi. D nuqtani koordinatalari $x=0$, $y^2=2qz$ tenglamalarni qoniqtiradi, ya`ni D BOB` parabolaga yotadi. Demak, elliptik paraboloid parabola *(AOA`)* ni parallel ravishda ko`chirganda hosil bo`ladigan sirt, bunda uning cho`qqqisi boshqa parabolada *(BOB`)* harakatlanadi. Bunda harakatlangan va harakatsiz parabolalarni tekisliklari perpendikulyar, o`qlari esa teng yo`naltirilgan.

Giperbolik paraboloid

Quyidagi tenglama bilan ifodalangan sirt ($p>0$, $q>0$) – *giperbolik paraboloid* deyiladi (196-chizma)

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}. \qquad (1)$$

XOZ va *YOZ* (*asosiy kesimlar*) tekisliklar bilan kesimlar – bu parabolalar (*AOA`*, *BOB`*)

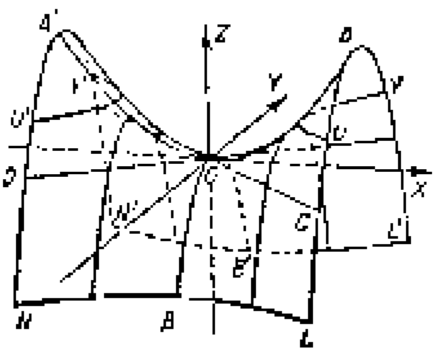
$$x^2=2pz, \qquad (2)$$

$$y^2=-2qz. \qquad (3)$$

Elliptik paraboloid asosiy kesimlariga farqli o`laroq (§ 177), (2) va (3) parabolalar botiqligi bilan *qarama qarshi tomonga* yo`naltirgan (*AOA*` parabola – “yuqoriga”, *BOB*`-“pastga”). Sirt (1) egarsimon ko`rinishga ega.

Giperbolik paraboloidni (1) *XOY* ($z=0$)tekislik bilan kesimi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0. \qquad (4)$$



196-chizma

Bular – *OD*, *OC* to`g`ri chiziqlar juftligi [1]) (§ 58, misol 1).

XOY ga parallel bo`lgan $z=h$ tekisliklar, giperbolik paraboloidni quyidagi giperbolalardan kesishadi

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = h, \quad z = h. \qquad (5)$$

$h>0$ bo`lganda, bu giperbolalarning (masalan, *UVV`U`* giperbolada) haqiqiy o`qi *OX* o`qiga parallel; $h<0$ bo`lganda, bu giperbolalarning (masalan, LNN`L` giperbolada) haqiqiy o`qi *OY* o`qiga parallel. *XOY* tekislikdan bir tomonda yotgan hamma giperbolalar (5), bir biriga o`xshaydi; ular ikkitadan (§ 47) *XOY* dan boshga tomonda yotgan giperbolalar (5) bilan biriktirganlar.

Giperbolik paraboloid markazga ega emas; u *XOZ* va *YOZ* tekisliklar va *OZ* o`qiga nisbatdan simmetrik. *OZ* to`g`ri chizig`i giperbolik paraboloidni o`qi deyiladi, *O* nuqtasi – uni *cho`qqisi*, *p* va *q* kattaliklari – *parametrlari*.

Izoh 1. Giperbolik paraboloid (yuqorida ko`ringan ikkinchi tartibli sirtlarga nisbatdan) *p* va *q* ni hech qanday kattaliklarida aylanish sirti bo`lmaydi.

Izoh 2.

Giperbolik paraboloidni, elliptic paraboloidday, bitta asosiy kesimni (masalan, *BOB`*) boshqasiga (*AOA`*) parallel tarzda ko`chirganda hosil qilish mumkin. Ammo endi harakatlanuvchi va harakatsiz parabolalar botiqliklar bilan qarama qarshi tomonlarga yo`naltirgan.

Misol. $z^2 = x^2 + y^2$ sirti – bu giperbolik paraboloid; ikkita asosiy kesim – bu o`zaro teng bo`lgan, ammo qarama qarshi tomonga yo`naltirgan parabolalar. Bu parabolalarni birini boshqasidan parallel tarzda siljgan holda sirtni hosil qilish mumkin. $z=h$ $(h\neq 0)$ tekislik bilan kesim - bu teng tomonli $a = \sqrt{|h|}$, $b = \sqrt{|h|}$ yarim o`qlar bilan giperbola. $h=0$ bo`lganda u perpendikulyar to`g`ri chiziqlar juftiga aylanadi ($x+y=0$, $x-y=0$). Agar bu to`g`ri chiziqlarni *OX`*, *OY`* koordinat o`qlar sifatida olsak, yuqoridagi giperbolik paraboloid $z=2x`y`$ tenglamasi bilan ifodalanadi (§ 36).

$z = \frac{xy}{a}$ tenglamasi , $z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a}$ tenglamasiday bir xil giperboloidni ifodalaydi, ammo birinchi holatda *OX*, *OY* o`qlari cho`qqidan o`tadigan to`g`ri chiziqli yasovchilar bilan to`g`ri keladi (§ 180).

Ikkinchi tartibli sirtlar ro`yxati

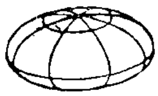
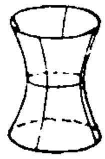
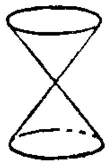
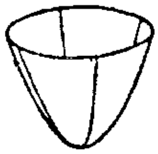
Har qanday ikkinchi darajali tenglamani

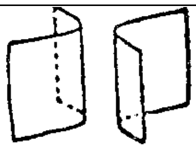
$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$

koordinatalar o`zgarishi formulalar (§ 166) yordamida quyidagi 17 tenglamaga aylanish mumkin, ular kanonik deb nomlanadi.

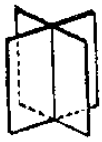
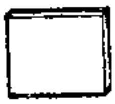
Bundan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (№14) tenglamasi sirtni ifodalanmasdan, to`g`ri chiziqni ifodalaydi ($x=0$, $y=0$). Ammo aytishlaricha , u *mavhum tekisliklar juftligini* ifodalaydi (haqiqiy to`g`ri chiziqni kesishganda) (§ 58, misol 4 ga qarang).

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (№13) tenglamasi faqat bitta nuqtani (0;0;0) ifodalaydi.

/B	Kanonik tenglama	Sxematik tasvir	Sirtning nomlanishi	B ob
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		Ellipsoid (xususan, aylanish ellipsoidi va sfera)	1 73
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		Bir pallali giperboloid	1 74
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		Ikki pallali giperboloid	1 75
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$		Ikkinchi tartib konusi	1 76
	$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$		Elleptik paraboloid	1 77
	$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$		Giperbolitik paraboloid	1 78
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		Elliptik silindr	1 68

	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		Giperbolitik silindr	1 68

Davomi

/B	Kanonik tenglama	Sxematik tasvir	Sirtning nomlanishi	B ob
	$y^2 = 2px$		Parabolik silindr	1 68
0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		Bir juft kesishuvchi sirtlar	
1	$\frac{x^2}{a^2} = 1$		Bir juft parallel sirtlar	
2	$x^2=0$		Bir juft mos sirtlar	
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$		Haqiqiy cho`qqiga ega xayoliy ikkinchi darajadagi konus (0; 0; 0)	
4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		Bir juft xayoliy yuzalar (xaqiqiy to`g`ri chiziqda kesishadigan)	
5	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$		Xayoliy ellipsoid	
6	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$		Xayoliy elliptik silindr	
7	$\frac{x^2}{a^2} = -1$		Bir juft xayoliy parallel tekisliklar	

Ammo (№4 tenglamaga o`xshashligi bo`yicha) aytishlaricha, tenglama № 13 ikkinchi tartib xayoliy konusini ifodalaydi (haqiqiy cho`qqisiga ham ega).

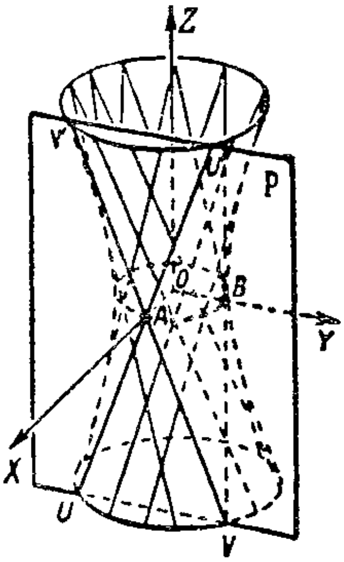
№ 15, 16, 17 tenglamalar hech qanday geometrik tasvirni ifodalamaydi. Biroq aytishlaricha, ular shunga mos ravishda xayoliy ellipsoidni (№ 1 ga qarang), xayoliy elleptik silindr (№ 7 ga qarang) va bir nechta xayoliy parallel tekisliklar (№ 11 ga qarang) taqdim etadilar.

Ushbu shartli atamani ishlatgan holda, ikkinchi tartib har bir yuza 217- 218 sahifada keltirib o`tilga 17 ta yuzalardan biri deb aytish mumkin.

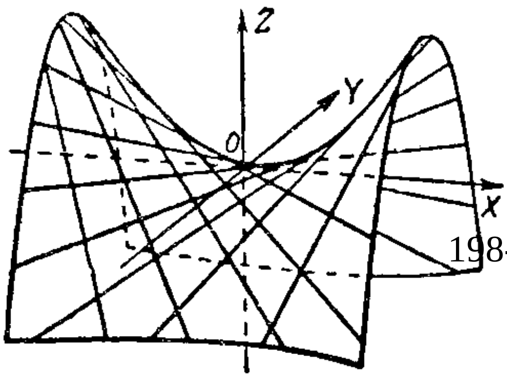
Ikkinchi tartib yuzalarning to`g`ri cgiziqli hosil qiluvchilari

Agar yuza to`g`ri chiziq harakati orqali hosil bo`lsa (hosil qiluvchi orqali), u chiziqli yuza deb ataladi. Ikkinchi tartib yuzalardan ikkinchi tartib silindrlar va konus chiziqli hisoblanadi, bundan tashqari, bir pallali giperboloid va giperbolik paraboloid ham.

Xuddi bir pallali giperboloidga (197-chizma), o`xshash giperbolik paraboloidda ( 198-chizma) ham har bir nuqtadan ikkita to`g`ri chiziqli hosil qiluvchilar o`tadi.



197-chizma



198-

Shu tarzda 197-chizmada A nuqta orqali UU` va VV`, V nuqta orqali – VA va VB hosil qiluvchilar o`tadi.

Ikki pallali giperboloid ellipsoidida va elliptik paraboloidda to`g`ri chiziqli hosil qiluvchilari (haqiqiy) yo`q.

Misol. Bir pallali giperboloidning x=a (197-chizmada P tekisligi) tekislik bilan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

Kesishishi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi $\frac{a^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, yani

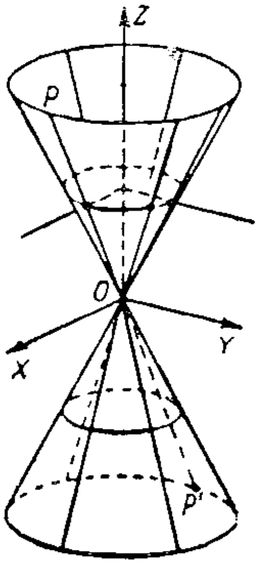
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

(2)

Bu- bir juft to`g`ri chiziq (UU` va VV`). Ular tomoq ellipsining A (a; 0; 0) cho`qqisidan o`tadilar. Xuddi shunga o`xshash B (0; b; 0) cho`qqi orqali bir juft to`g`ri chiziqli hosil qiluvchilar o`tadi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad y = b. \qquad (3)$$

Bir pallali aylanish giperboloidni (a = b) OZ o`qi atrofida UU` to`g`ri chiziqning (yoki VV`) aylanishi natijasida hosil qilish mumkin. [1])



199-chizma

Izoh. Bir pallali giperboloidning chiziqliligi muhandis V.G. Shuxov tomonidan “ Shuxov binosi” konstruktsiyasining qurilishi uchun ishlatilgan. U to`g`ri chiziqli bir pallali giperboloid hosil qiluvchida joylashgan temir chiziqlardan quriladi. Chiziqlar ikki hosil qiluvchilar tizimi kesishuvida yopishtiriladi. Xomashyoning kamxarchligiga qaramay V.G. Shuxov konstruktsiyasi juda ham mustahkam.

Aylanish sirtlari

XOZ tekisligida yotadigan L chiziq bor deylik. Shunda OZ o`qi atrofida aylanishi natijasida L chiziq sirt tenglamasini hosil qiladi, L chiziq tenglamasidan kelib chiqib x ni $\sqrt{x^2 + y^2}$ bilan almashtish mumkin.

Misol 1. OZ atrofida aylanadigan, y = 0 (199-chizmada PP` to`g`ri chiziq) tekisligida yotadigan, z = 2x to`g`ri chiziq deylik. Shunda PP` to`g`ri chiziq aylanishi natijasida hosil bo`ladigan  konus sirti tenglamasi, keyingi ko`rinishga ega bo`ladi

$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, yani $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0$ (§ 176 ga qarang).

L chiziq boshqa koordinatalar sirtida yotganida va aylanish o`qi boshqa koordinata o`qi bo`lganida shunga o`xshash qoidalar aml qiladi.

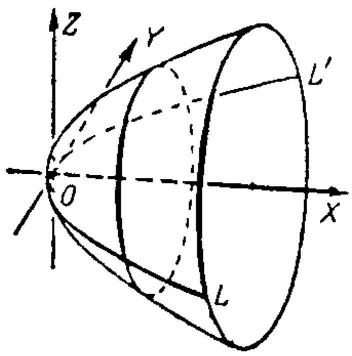
Misol 2. OX o`qi atrofida  $y^2 = 2px$ ( LOL` 200-chizmada) parabolalar aylanib hosil qiladigan tekislik tenglamasini aniqlash.

---

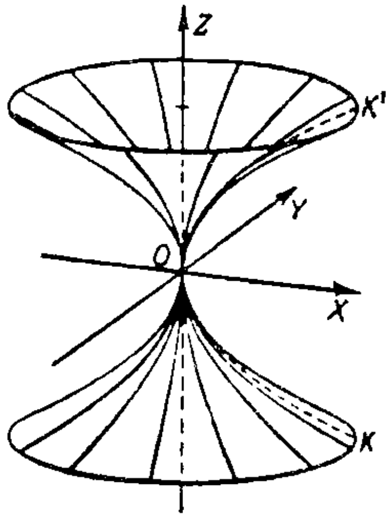
[1]) Agar bir tekislikda yotmagan ikkita gugurt cho`pini, bittasini pastki qismidan olib igna bilan teshsak va uning atrofida modelning barcha qismini aylantirsak, shunda boshqa gugurt cho`pi yaqqol bir chiziqli giperbloid chizadi.

Yechilishi. Y ni $\sqrt{y^2 + z^2}$ ga almashtirib, yani y^2 $y^2 + z^2$ ga, $y^2 + z^2 = 2px$ (OX o`qli aylanish paraboloidi) olamiz.

Misol 3. Z o`qi atrofida $z^2 = 2px$ ( KOK` 201-chizmada) parabolalar aylanishi natijasida hosil bo`lgan sirt tenglamasini topish.



200-chizma



Yechilishi. x ni $\sqrt{x^2 + y^2}$ ga almashtirib, $z^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ yoki $z^4 = 4p^2 (x^2+y^2)$ (to`rtinchi tartib sirti) tenglamalarni olamiz.

Ikkinchi va uchinchi tartib determinantlar

Ikkinchi tartib determinantlar deb $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ifodaga (§ 12) aytiladi $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Uchinchi tartib determinantlar deb

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Ifodaga (§ 118) aytiladi

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + b_1 c_2 a_3 - b_1 c_3 a_2 + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2 \qquad (2)$$

Yoki, xuddi shunday,

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

MUNDARIJA

Содержание

CONTENTS

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Mixaylenko V.Y., Kovalyov S.N., Sedletskaya N.I., Anpiloova V.A. "Injenernaya geometriya s elementami teorii parametrizatsii" Kiev, 1989.UMK 80, 84.
2. Foks A, Pratt M. "Vichislitelnaya geometriya. Primeneniya v proektirovanii i na proizvodstve" – M.,Mir. 1982, 324.
3. Ordashev T.X. "Razrabotka metoda postriyeniya 5-parametricheskix nesostavnix setchatix nomogram i ix primeneniya" Almati, 2010. Avtoreferat … kond. texn. nauk, KazNTU.
4. Karimsakov U.T. "Isledovaniya I razrabotka krugovix korrelyativnix preobrazovaniy I ix primeneniya" Almati, 2008. Avtoreferat … kond. texn. nauk, KazNTU.
5. Vigodskiy M.Y. "Spravochnik po visshey matematike" M., 1976, "Nauka", 878.