

**O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi  
“Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligini mexanizatsiyalash muhandislari  
instituti” Milliy tadqiqot universiteti**

---

**“Amaliy geometriya”**

**70111202-Muhandislik grafikasi va dizayn nazariyasi Magistratura  
yo‘nalishi magistrantlari uchun**

*Ma‘ruzachi: t.f.d. professor Kuchkarova D.F.*

## 10-мавзу. Tekis va fazoviy egri chiziqlar. 2 soat

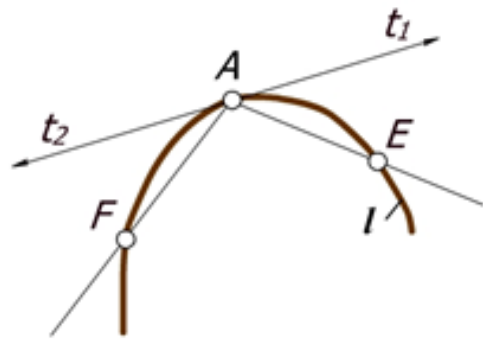
---

- Tekis egri chiziqlar analitik va grafik koʻrinishlarda berilishi mumkin. Analitik koʻrinishda quyidagi xollar bilan beriladi:
- dekart koordinatalar sistemasida  $f(x,u)=0$  koʻphad bilan;
- qutb koordinatalar sistemasida  $r=f(\varphi)$  bilan;
- parametrik koʻrinishda  $x=x(t)$  va  $u=u(t)$  bilan.
- Egri chiziqlarning grafik koʻrinishda berilishining turli xil usullari mavjud.
- Tekislikka tegishli biror nuqtaning uzluksiz harakati natijasida tekis egri chiziq hosil boʻladi. Tekis egri chiziqning har bir nuqtasidan unga bitta urinma va bitta normal oʻtkazish mumkin.

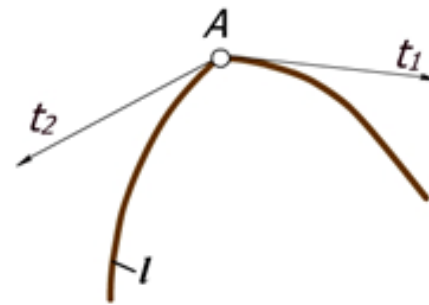


- 1-rasmda berilgan  $\ell$  tekis egri chizig'iga uning biror A nuqtasida urinma va normal o'tkazish ko'rsatilgan. Buning uchun A nuqta orqali egri chiziqni kesuvchi AE va AF to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. ye nuqtani A nuqtaga egri chiziq buylab yaqinlashtira boshlaymiz. Natijada, AE kesuvchi A nuqta atrofida burila boshlaydi. ye nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushganda AE kesuvchi  $t_1$  urinmani xosil qiladi. Uni  $\ell$  egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan **yarim urinma** deyiladi. F nuqtani ham egri chiziq ustida harakatlantirib A nuqta bilan ustma-ust tushiramiz. AF kesuvchi  $t_2$  yarim urinmani xosil qiladi. Qarama-qarshi yo'nalgan  $t_1$  va  $t_2$  yarim urinmalar xosil qilgan to'g'ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada o'tkazilgan **urinma** deyiladi. Shunday nuqtalardan tashkil topgan egri chiziq **ravon egri chiziq** deyiladi.

- Egri chiziqning  $A$  nuqtadagi  $t$  urinmaga o'tkazilgan perpendikulyar  $n$  to'g'ri chiziq uning normali deb ataladi. Ba'zan yarim urinmalar o'zaro ustma-ust tushmasdan o'zaro kesishishi mumkin. Bunday nuqtalar ***sinish nuqtasi*** deyiladi (2-rasm). Amaliyotda egri chiziq'larga urinma va normal o'tkazish masalalari ko'p uchraydi, shuning uchun urinma va normal o'tkazishning ba'zi bir grafik usullarini kurib chikamiz.



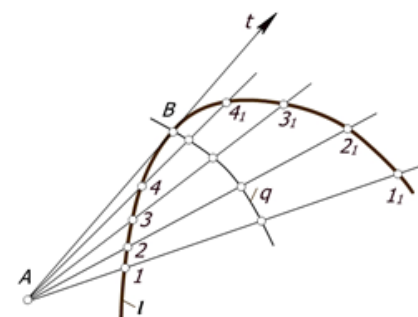
1-rasm



2-rasm



- **Egri chiziqqa undan tashqari olingan nuqta orqali urinma o'tkazish.** iror  $\ell$  egri chiziq va undan tashqarida olingan A nuqta berilgan (3-rasm) A nuqtadan  $\ell$  egri chiziqqa urinma o'tkazish talab qilinsin. Buning uchun A nuqta orqali  $\ell$  egri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Xosil bo'lgan vatarlarning uchlari  $1_1, 2_1, 3_1, \dots$  nuqtalar bilan belgilab, har bir vatarning o'rta nuqtalari topiladi. Vatarlarning o'rta nuqtalarini birlashtirib  $q$  egri chiziqni xosil qilinadi. Bu egri chiziq *xatoliklar egri chizig'i* deyiladi va uning  $\ell$  egri chizig'i bilan kesishish B nuqtasi A nuqtadan o'tuvchi urinmaning egri chiziqqa urinish nuqtasi bo'ladi. A va B nuqtalarni to'g'ri chiziq bilan birlashtirilsa,  $t$  urinma xosil bo'ladi.

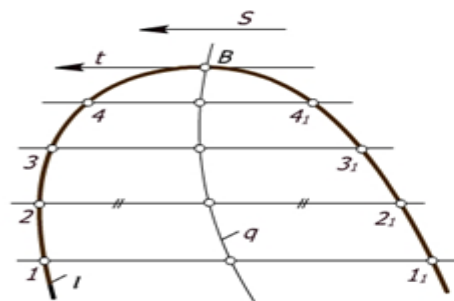


3-расм

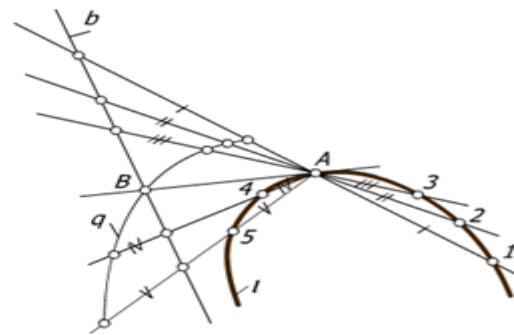
## Berilgan yoʻnalishga parallel urinma oʻtkazish.

- Biror  $\ell$  egri chiziqqa berilgan  $s$  yoʻnalishga parallel urinma oʻtkazish uchun  $\ell$  egri chiziqni  $s$  yoʻnalishga parallel chiziqlar bilan kesiladi va xosil boʻlgan  $11_1, 22_1, 33_1, \dots$  vatarlarni teng ikkiga buluvchi nuqtalar orqali  $q$  xatoliklar egri chizigʻini oʻtkaziladi (3-rasm).  $q$  egri chiziqning  $\ell$  bilan kesishish nuqtasi  $B$  ni topiladi.  $B$  nuqta orqali berilgan  $s$  yoʻnalishga parallel qilib  $t$  urinmani oʻtkaziladi.





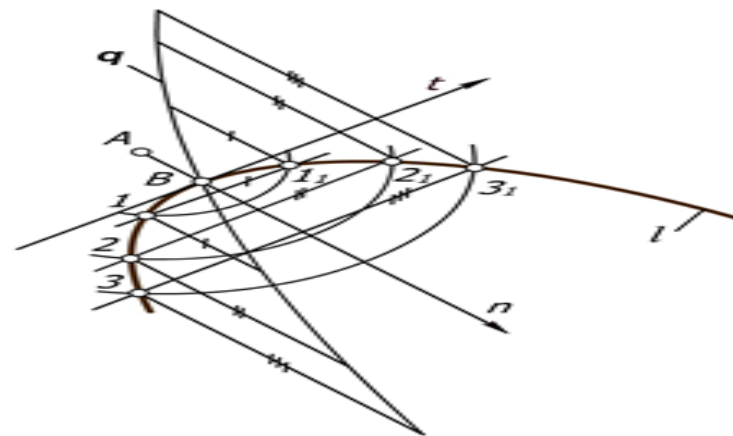
4-rasm



5-rasm

- **Egri chiziq ustida yotgan nuqta orqali unga urinma o'tkazish.** Berilgan  $\ell$  egri chiziqni uning ustida yotgan A nuqtadan chikuvchi to'g'ri chiziqlar bilan kesiladi (4-rasm). A nuqtadan o'tuvchi urinmaning taxminiy yo'nalishiga perpendikulyar qilib b to'g'ri chiziqni o'tkaziladi. kesuvchi nurlarga b to'g'ri chiziqni kesib o'tgan nuqtalardan boshlab usha chiziqning  $\ell$  dagi vatar uzunligi o'lchab quyiladi. Nuqtalar to'plami q egri chiziqni xosil qiladi. q egri chiziqning b bilan kesishish nuqtasi B ni A nuqta bilan birlashtirganda t urinmaga xosil bo'ladi.

- **Egri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan unga normal o'tkazish.**  $\ell$  egri chiziqdan tashqaridagi A nuqtani konsentrik aylanalarning markazi sifatida qabul qilib (6-rasm), undan berilgan egri chiziqni kesuvchi bir necha aylanalari chiziladi. Bu aylanalari  $\ell$  egri chiziqni  $11_1, 22_1, 33_1, \dots$  nuqtalarda kesadi. Mos nuqtalarni o'zaro birlashtirib, egri chiziqning  $11_1, 22_1, 33_1, \dots$  vatarlarini xosil qilinadi. Vatarlar uchlaridan qarama-qarshi yo'nalishda unga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi va ularga vatarlar uzunliglarini o'lchab quyiladi. Bu kesmalarining uchlarini tartib bilan birlashtirib q chiziq xosil qiladi. q va  $\ell$  egri chiziqlari o'zaro B nuqtada kesishadilar. A va B nuqtalarni birlashtiruvchi n to'g'ri chiziq  $\ell$  egri chiziqning normali bo'ladi.

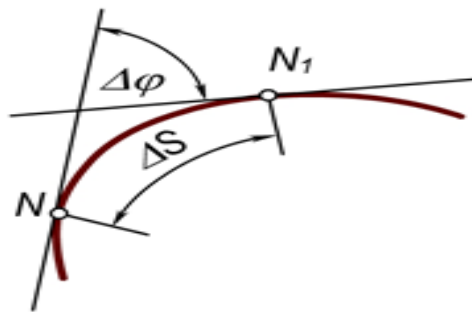


6-rasm



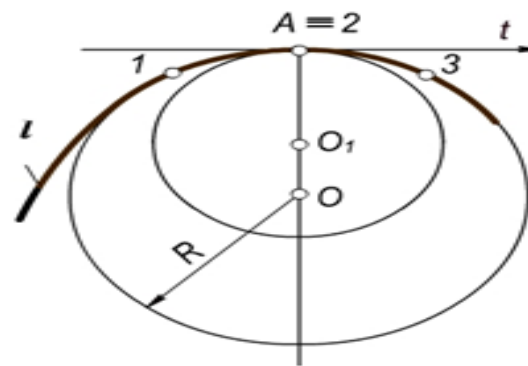
# Tekis egri chiziqning egriligi

- Qo'shni yarim urinmalar orasidagi  $\alpha$  burchakni ular orasidagi  $s$  yoy uzunligiga nisbatining limiti *egri chiziqning egriligi* deyiladi (7-rasm). Egrilikni  $k$  bilan belgilasak, u quyidagicha ifodalanadi:



$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S}.$$

7-rasm



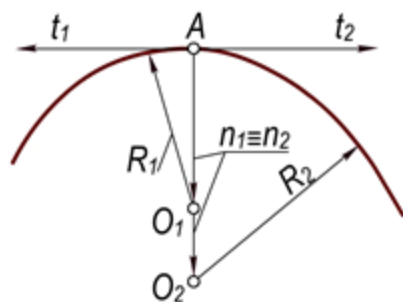
8-rasm

- Bunda  $\varphi$  burchak qancha katta bo'lsa, egri chiziq shuncha ko'p egilgan va, aksincha, qanchalik kichik bo'lsa, egri chiziq shuncha kam egilgan bo'ladi. Egrilik qiymati egri chiziqning har bir nuqtasida har xil bo'ladi. Aylananing hamma nuqtasidagi egrilik bir xildir, to'g'ri chiziqda esa egrilik nolga teng. Har qanday egri chiziqning egriligi aylana yordamida aniqlanadi. Bu aylana egri chiziqdagi cheksiz yaqin uchta 1, 2, 3 nuqtalardan o'tadi. Uning radiusi, ***egrilik radiusi***, markazi esa ***egrilik markazi*** deyiladi. Egrilik radiusi  $R$  va egrilik miqdori  $k$  o'zaro teskari proporsionaldir:  $k=1/R$ , ya'ni egrilik radiusi  $R$  qancha katta bo'lsa,  $k$  egrilik shuncha kichik va, aksincha, egrilik radiusi qancha kichik bo'lsa  $k$  egrilik shuncha katta bo'ladi. Masalan, to'g'ri chiziqda egrilik radiusi cheksiz katta bo'lganligi tufayli egrilik nolga teng.

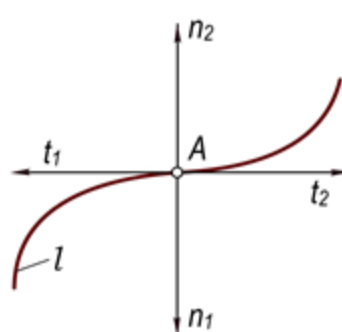


- Tekis egri chiziqlar *monoton* va *ulama* chiziqlarga bo‘linadi. Monoton egri chiziqning qator nuqtalarida egrilik radiusi uzluksiz o‘sib yoki kamayib boradi. Monoton egri chiziq yoylaridan tashkil topgan chiziq *ulama* chiziq deyiladi. Bu yoylarning ulanish nuqtalari ulama chiziqning *uchlari*, ulanuvchi yoylarning o‘zi esa ulama chiziqning tomonlari deb ataladi. Yoylarning ulanish xarakteriga qarab, ulama chiziqning uchlari *oddiy* va *maxsus* nuqtalar bo‘lishi mumkin. Egri chiziqning oddiy nuqtasida yarim urinmalar qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘lib, bitta to‘g‘ri chiziq ustida yotadi va egrilik markazlari ustma-ust tushadi. Egri chiziqlarning maxsus nuqtalari quyidagilardan iborat:

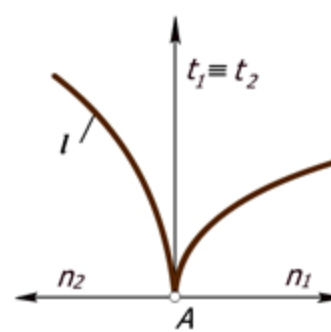
- **Qo'sh nuqta.** Yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishga ega, normallar ustma-ust tushadi, egrilik markazlari esa har xil joylashadi (9-rasm).
- **Egilib o'tish nuqtasi.** Yarim urinmalar ham, normallar ham qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi (10-rasm).
- **Birinchi turdagi qaytish nuqtasi.** Yarim urinmalar ustma-ust tushadi va bir xil yo'nalishda bo'ladi, normallar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bir chiziq ustida yotadi (11-rasm).



9-rasm



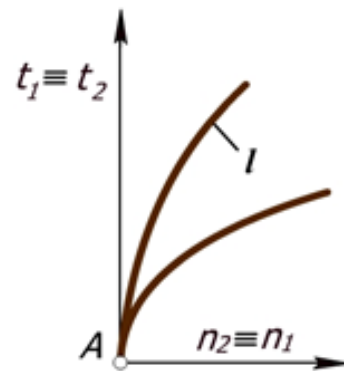
10-rasm



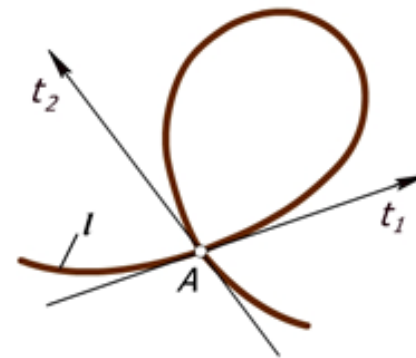
11-rasm



- **Ikkinchi turdagi qaytish nuqtasi.** Yarim urinmalar va normallar juft-juft boʻlib bir xil yoʻnalishga ega boʻladi (12-rasm);
- **Sinish nuqtasi.** Yarim urinmalar va normallar har xil yoʻnalishda boʻladi (12-rasm);
- **Tugun nuqta.** Tugun nuqtada egri chiziq oʻzini-oʻzi bir va bir necha marta kesib oʻtadi (13-rasm).



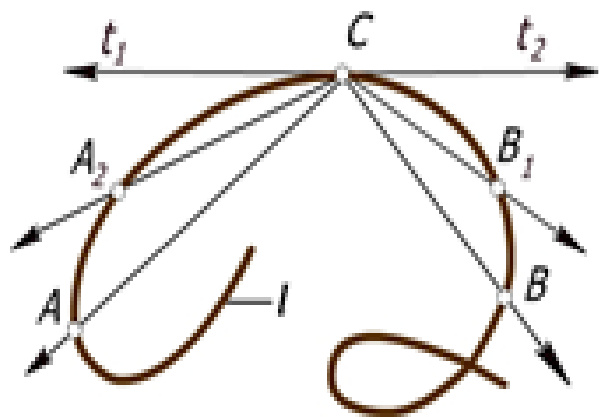
12-rasm



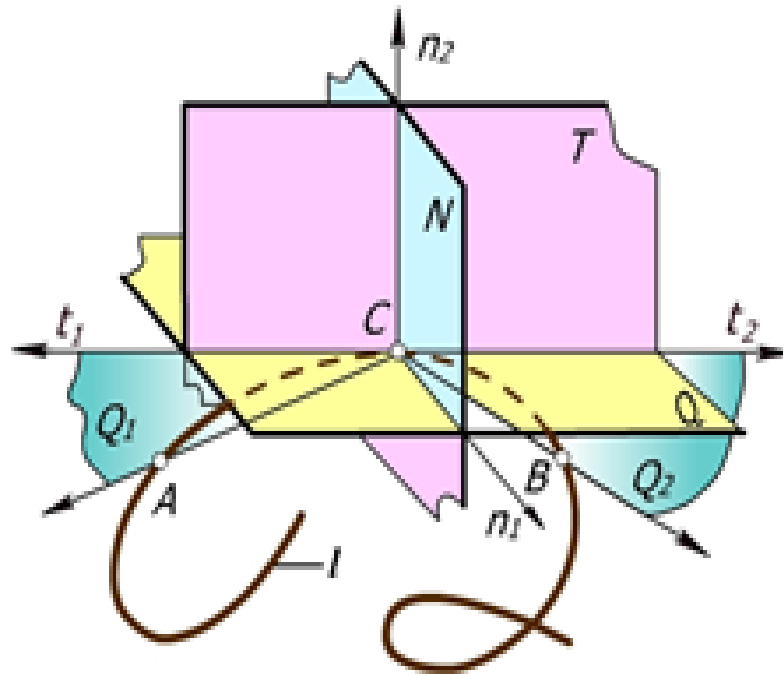
13-rasm

- **Ta'rif.** Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq fazoviy egri chiziq deyiladi.
- Fazoviy egri chiziqni ikki xil egrilikka ega chiziq ham deb yuritiladi, 7.16-rasmda tasvirlangan fazoviy  $\ell$  egri chiziqqa uning  $S$  nuqtasida urinma o'tkazish ko'rsatilgan. Egri chiziq ustidagi  $S$  nuqta orqali  $SA$  va  $SB$  kesuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. So'ngra  $A$  nuqtani egri chiziq buylab  $S$  nuqtaga yaqinlashtira boramiz.
- $A$  nuqta  $S$  nuqtaga cheksiz yaqinlashganda  $SA$  kesuvchining limiti  $\ell$  egri chiziqning  $S$  nuqtasidagi  $t_1$  urinmaga aylanadi. Bunda  $t_1$  urinma  $\ell$  egri chiziqning  $S$  nuqtasida o'tkazilgan yarim urinma deyiladi.  $S$  nuqta orqali o'tuvchi  $t_2$  yarim urinma ham  $SB$  kesuvchi orqali xuddi shunday yasaladi. U o'zining limit vaziyatida  $t_1$  yarim urinma bilan bitta  $\ell$  to'g'ri chiziqda yotadi (192-rasm).  $\ell$  fazoviy egri chiziqqa o'tkazilgan urinma orqali tekisliklar dastasi o'tadi. Egri chiziqning xarakterini aniqlash uchun ana shu tekisliklar dastasidan yopishma, to'g'rilovchi va ularga perpendikulyar bo'lgan normal deb ataluvchi tekisliklar muhim rol o'ynaydi.

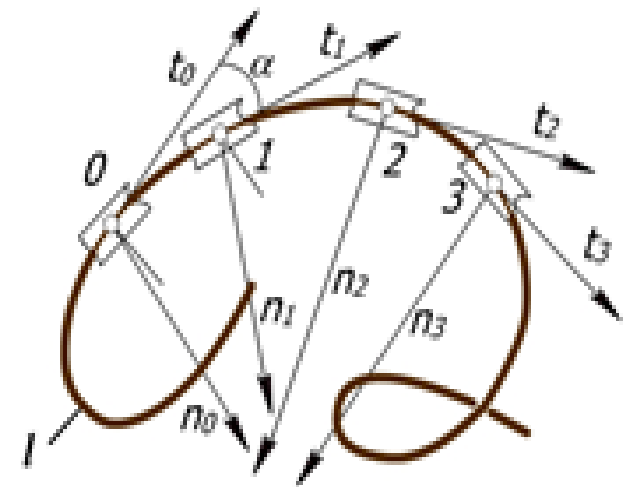




14-rasm



15-rasm



16-rasm

- Egri chiziqning *yopishma* tekisligi quyidagicha yasaladi. Berilgan  $\ell$  fazoviy egri chiziqda yotgan  $S$  nuqta orqali unga  $t_1, t_2$  yarim urinmalar o'tkazilgan bo'lsin. 14-rasmda  $SA$  va  $SB$  kesuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazib  $t_1SA$  ( $Q_1$ ) va  $t_2SB$  ( $Q_2$ ) kesuvchi tekisliklarni hosil qilamiz.  $A$  va  $B$  nuqtalarni  $S$  nuqtaga yaqinlashtirganda  $Q_1$  va  $Q_2$  tekisliklar  $t_1$  va  $t_2$  yarim urinmalar atrofida aylanib, ular ustma-ust tushib,  $Q$  tekisligini hosil qiladi.  $Q$  tekislik  $\ell$  fazoviy egri chiziqqa uning berilgan  $S$  nuqtasida o'tkazilgan *yopishma* tekisligi deyiladi.
- Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasida unga cheksiz ko'p normal o'tkazish mumkin. Normallar to'plami hosil kilgan  $N$  tekislik egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan *normal tekisligi* deyiladi.
- Normallar to'plamidagi chiziqlardan biri  $n_1$  yopishma tekislik ustida yotadi ( $n_1 \in Q$ ), boshqa biri  $n_2$  esa unga perpendikulyar joylashgan ( $n_2 \perp Q$ ) bo'ladi. Shulardan birinchisi  $n_1$ –bosh normal, ikkinchisi  $n_2$  – binormal deyiladi. Binormal  $n_2$  va urinma  $t$  hosil kilgan  $T$  tekislik to'g'rilovchi (rostlovchi) *tekislik* deb ataladi.



- O‘zaro perpendikulyar  $N$ ,  $Q$ ,  $T$  tekisliklar uchyoqlikni tashkil qiladi. Buni 1847 yilda birinchi bo‘lib taklif qilgan fransuz matematigi Jan Frederik Frene nomi bilan Frene uchyoqligi deb yuritiladi. Frene uchyoqligidan fazoviy egri chiziqni proeksiyalash uchun tekisliklar sistemasi o‘rnida foydalaniladi. Shuningdek,  $Q$ -gorizontal,  $T$ -frontal va  $N$ -profil proeksiyalar tekisliklari sifatida qabul qilinadi. Biror fazoviy egri chiziq xossalari uning Frene uchyoqlik tekisliklaridagi proeksiyalari bo‘yicha tekshiriladi.

# Adabiyotlar:

---

- Xalimov M.K. «Chizma geometriya va muxandislik grafikasi» Toshkent, 2013y.
- Муродов Ш.К. Амалий геометрия., ТДПУ-2020 дарслик-320 б.т.  
китобини киритинг
- Murodov Sh.K. “Chizma geometriya kursidan ma’ruzalar to’plami”. – T: TIMI 2004 y.
- 1. Adrian B. Biran, An analytical introduction to Descriptive Geometry. Prepared for Elsevier (Butterworth-Heinemann), Oxford, UK-2005