Лекция №8. Понятие вектора. Линейные действия над векторами. Проекция вектора на оси и компоненты. Скалярное произведение векторов и основные свойства.

Величина, которая характеризуется только своим численным значением, называется ***скалярной***. Примерами скалярных величин являются вес, температура, площадь, длина. Величина, которая характеризуется не только своим численным значением, но и направлением, называется ***векторной***. Примерами векторных величин являются скорость, ускорение, сила.

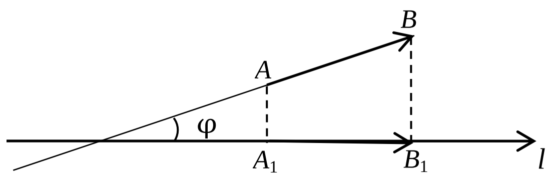
Вектором называется ***направленный отрезок***. Если начало вектора находится в точке A, а конец вектора находится в точке B, то вектор обозначается $\overline{AB}$ или просто $\bar{a}$. Длина вектора равна длине отрезка, соединяющего точки A и B. Если точки A и B совпадают, то длина вектора равна нулю и вектор называется ***нулевым***. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они имеют одинаковые направления либо противоположно направлены. Два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковые длины и одинаково направлены. Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Следовательно, если некоторую точку в пространстве взять за общее начало, то от этой точки можно отложить все рассматриваемые векторы. В этом смысле все векторы можно рассматривать как ***свободные***.

Если два вектора имеют одинаковые длины и противоположное направление, то они называются ***противоположными***. Для вектора $\bar{a}$ противоположный ему вектор обозначается $\bar{a}$.

Векторы, которые лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***. Если компланарные векторы привести к одному началу, то они будут лежать в одной плоскости.

Пусть дана ось l и вектор $\overline{AB}$. Пусть начало A вектора проектируется в точку A_1 на оси l, а конец B вектора – в точку B_1.



Рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$. ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ на ось l называется число $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси l, и число $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l имеют противоположные направления. Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается $\text{Пр}_l\,\overline{AB}$. Обозначим через φ угол между вектором $\overline{AB}$ и осью l. Тогда $\text{Пр}_l\,\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi$.

Если в качестве оси l взять какой-либо вектор, то можно говорить о проекции одного вектора на другой. Например, проекция вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$ равна $\text{Пр}_{\overline{CD}}\,\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Иногда вместо выражения «проекция вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$» используют выражение «проекция вектора $\overline{AB}$ на направление вектора $\overline{CD}$».

Рассмотрим вектор $\overline{AB}$ в прямоугольной системе координат. ***Координатами вектора*** $\overline{AB}$ называются его проекции на координатные оси. Запись $\bar{a} = (x, y, z)$ означает, что вектор $\bar{a}$ в пространстве имеет координаты x, y, z.

Два вектора $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ будут ***равны тогда и только тогда, когда равны их одноименные координаты***, т. е.

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Пусть начало вектора задано точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а конец векто-ра – точкой $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда для определения координат вектора $\overline{M_1M_2}$ ***от координат конца вектора вычитаются координаты его начала***, т. е. $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

В прямоугольной системе координат в пространстве единичные векторы направления осей *Ox*, *Oy* и *Oz* обозначим через $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$. Эти единичные векторы, называемые ***ортами,*** составляют ***прямоугольный базис***. Любой вектор $\bar{a} = (x, y, z)$ пространства может быть разложен единственным образом по ***прямоугольному базису*** $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т. е. представлен в виде $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, где числа *x, y, z* – координаты вектора $\bar{a} = (x, y, z)$.

Пример 4. Даны точки $M_1(1, -3, 5)$ и $M_2(4, 2, -3)$. Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ и записать разложение этого вектора по ортам.

Решение. Если заданы координаты начала и конца вектора, то для определения координат вектора из координат его конца вычитаются координаты начала: $\overline{M_1M_2} = (4-1,\ 2-(-3), -3-5) = (3,\ 5, -8)$.

Разложение вектора по ортам имеет следующий вид: $\overline{M_1M_2} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 8\bar{k}$.

2. Линейные операции над векторами

Сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число называются ***линейными операциями над векторами***.

Пусть даны векторы $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$,

т. е. ***при сложении векторов их одноименные координаты складываются***. Аналогично $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$,т. е. ***при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются***.

При ***умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число***: если $\bar{c} = a\bar{a}$, то $\bar{c} = (ax_1, ay_1, az_1)$. В этом случае вектор $\bar{c}$ будет коллинеарен вектору $a\bar{a}$. Обозначим $\bar{c} = (x, y, z)$. Тогда из равенства $\bar{c} = a\bar{a}$ следует, что $x = ax_1$, $y = ay_1$, $z = az_1$. А это означает, что $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = a$. Таким образом, ***если два ненулевых вектора коллинеарны, то их одноименные координаты***

пропорциональны. Верно и обратное: ***если одноименные координаты двух векторов пропорциональны, то эти векторы коллинеарны***.

Пример 5. Даны векторы $\bar{a}=(2,-3,1)$ и $\bar{b}=(1,-1,0)$. Найти координаты вектора $2\bar{a}-3\bar{b}$.

Решение. Так как при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, а при вычитании векторов вычитаются их соответствующие координаты, то

$$2\bar{a}-3\bar{b}=(2\cdot2-3\cdot1,\ 2\cdot(-3)-3\cdot(-1),\ 2\cdot1-3\cdot0)=(1,-3,\ 2).$$

Пример 6. При каких значениях m и n векторы $\bar{a}=(3,\ 2,\ m)$ и $\bar{b}=(6,\ n,10)$ коллинеарные?

Решение. Если векторы коллинеарные, то их координаты пропорциональны: $\frac{3}{6}=\frac{2}{n}=\frac{m}{10}$. Тогда $\frac{2}{n}=\frac{1}{2}$ и $\frac{m}{10}=\frac{1}{2}$, т. е. $n = 4$ и $m = 5$.

3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ ***и*** $\bar{b}$ ***называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:*** $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.

Так как $|\bar{a}|\cdot\cos\varphi=\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}$, а $|\bar{b}|\cdot\cos\varphi=\text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b}$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{b}|\cdot\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b}.$$

Таким образом, ***скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого вектора на направление первого***.

Пусть векторы $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ заданы своими координатами. Тогда ***скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных координат***:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Если же два вектора равны, т. е. $\bar{a}=(x,y,z)$ и $\bar{b}=(x,y,z)$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z=x^2+y^2+z^2$. Отсюда следует, что $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, т. е.

длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Из определения скалярного произведения двух векторов можно найти ***угол между векторами***:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}, \text{ или } \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если два вектора взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, так как $\cos\varphi = \cos 90° = 0$. И, обратно, если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы взаимно перпендикулярны. Таким образом, ***необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения***:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0, \text{ или } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Пример 7. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}\cdot\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 3\sqrt{3},\ |\bar{b}| = 6$, а угол между векторами $\varphi = 30°$.

Решение. По определению скалярного произведения

$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, т. е. $\bar{a}\cdot\bar{b} = 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot\cos 30° = 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 27$.

Пример 8. Вычислить скалярное произведение векторов

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}, \text{ если } A(3,-1,\ 0), B(2,\ 1,\ 4), C(2,\ -1,\ -2).$$

Решение. Найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = (2-3,\ 1-(-1),\ 4-0) = (-1,\ 2,\ 4)$,

$\overline{AC} = (2-3, -1-(-1), -2-0) = (-1,\ 0,\ -2)$.

Так как известны координаты векторов, то их скалярное произведение равно: $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = -1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 4\cdot(-2) = -7$.

Пример 9. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$.

Решение. По условию примера $\bar{a} = (3,-4,\ 1)$ и $\bar{b} = (2,\ 3,\ 1)$. Тогда $\bar{a}\cdot\bar{b} = 3\cdot 2 + (-4)\cdot 3 + 1\cdot 1 = -5$.

Пример 10. Найти длину вектора $\bar{a} = (4,\ 3,-1)$.

Решение. Так как длина вектора $\bar{a}=(x,y,z)$ и определяется по формуле $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то $|\bar{a}|=\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$.

Пример 11. Найти длину вектора $\bar{b}-\bar{a}$, если известны векторы $\bar{a}=(3,2,-1)$ и $\bar{b}=(6,6,-1)$.

Решение. Вначале вычислим координаты вектора $\bar{b}-\bar{a}$:

$\bar{b}-\bar{a}=(6-3,\ 6-2,-1-(-1))=(3,\ 4,\ 0)$. Тогда $|\bar{b}-\bar{a}|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$.

Пример 12. Даны векторы $\bar{a}=(3,-1,-1)$ и $\bar{b}=(1,3,5)$. Найти проекцию вектора $2\bar{a}-\bar{b}$ на вектор $\bar{a}+\bar{b}$.

Решение. Найдём координаты этих векторов:

$2\bar{a}-\bar{b}=(5,-5,-7)$, $\bar{a}+\bar{b}=(4,\ 2,\ 4)$.

Тогда $\text{Пр}_{\bar{a}+\bar{b}}(2\bar{a}-\bar{b})=\dfrac{(2\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})}{|\bar{a}+\bar{b}|}=\dfrac{5\cdot4+(-5)\cdot2+(-7)\cdot4}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}=-3$.

Пример 13. Найти угол между векторами $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\bar{k}$.

Решение. Так как по условию $\bar{a}=(1,1,0)$ и $\bar{b}=(1,0,1)$, то

$\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\dfrac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, угол между векторами $\varphi=60^\circ$.

Задания для самостоятельной работы

1. Даны векторы $\bar{a}=(2,-3,5)$, $\bar{b}=(6,4,-7)$, $\bar{c}=(-2,9,1,)$. Найти векторы $3\bar{a},\ \ 4\bar{a}+\bar{b}$, $2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}$.

2. Даны векторы $\bar{a}=(3,-5,8)$, $\bar{b}=(-1,1,-4)$. Найти длины векторов $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$.

3. Даны вершины треугольника $A(7,5,-4)$, $B(4,9,1)$, $C(6,-3,-7)$. Найти длину медианы, проведённой из вершины *A*, и периметр треугольника.

4. Точки $A(9,-11,5)$, $B(7,4,-2)$, $C(-7,13,-3)$ являются последовательными вершинами ромба. Найти четвёртую вершину, вычислить периметр ромба и длины его диагоналей.

5. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

6. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a} = (4,\ 2,\ -5)$ и $\bar{b} = (2,\ 6,\ 4)$.

7. Найти угол между векторами $\bar{a} = (4,\ -10,\ 1)$ и $\bar{b} = (11,\ -8,\ -7)$.

8. Дан треугольник с вершинами $A(1,\ 7,\ 2)$, $B(5, -3,\ 3)$, $C(12,\ -1,\ -5)$. Найти внутренние углы этого треугольника.

9. Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = (1,\ -2,\ 2)$ на вектор $\bar{b} = (2,\ 10,\ 11)$.

10. Даны векторы $\bar{a} = (2, -3,\ 5)$ и $\bar{b} = (6,\ 4, -7)$. Найти проекцию вектора $3\bar{a} - 2\bar{b}$ на вектор $\bar{a} + \bar{b}$.

11. Найти угол между векторами $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$.

12. Найти, при каком значении m векторы $\bar{a} = m\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - m\bar{k}$ будут взаимно перпендикулярными.

13. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$, если известны точки $A(2, -3,\ 4), B(5, -5, -2), C(1,\ 2,\ 3)$ и $D(7,\ 4,\ 6)$.

14. Даны вершины четырёхугольника $A(1, -2,\ 2)$, $B(1,\ 4,\ 0)$, $C(-4,\ 1,\ 1)$ и $D(-5, -5,\ 3)$. Вычислить угол между его диагоналями.