Лекция № 13. Общее уравнения плоскость

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π. Пусть точка

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, а ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен этой

плоскости (рис.1).

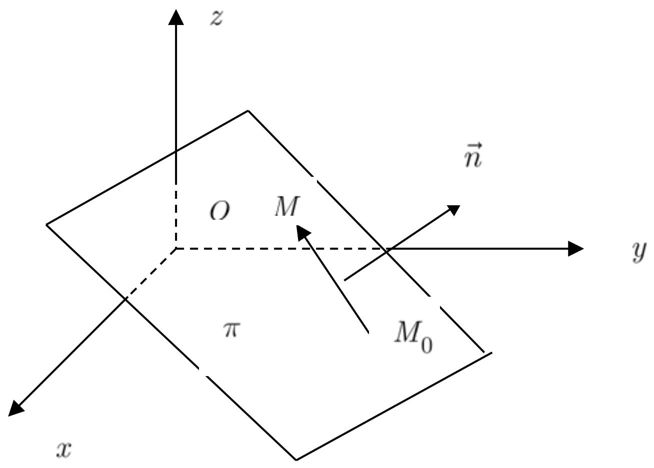

Рис. 1.

При таких условиях произвольная точка $M(x, y, z) \in \pi$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z_0 - z)$ ортогонален вектору $\vec{n}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю:

$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$. Отсюда

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z_0 - z) = 0.} \qquad (1)$$

Вектор $\vec{n}$ называют **нормальным вектором плоскости π.**

Уравнение (1) называют **уравнением плоскости, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору**.

2. Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (1) раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить уравнение

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,} \qquad (2)$$

называемое **общим уравнением плоскости**. Здесь A, B, $C, D \in \mathbf{R}$ и $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (т. е. *A, B* и *C* не равны нулю одновременно).

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

Значения коэффициентов	Вид общего уравнения	Графическое расположение
$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	Плоскость проходит через начало координат
$A=0$	$By+Cz+D=0$	Плоскость параллельна оси *Ox*
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	Прямая, параллельная оси *Oy*
$C=0$	$Ax+By+D=0$	Плоскость параллельна оси *Oz*
$A=B=0$	$Cz+D=0$	Плоскость параллельна плоскости xOy
$A=C=0$	$By+D=0$	Плоскость параллельна плоскости xOz
$B=C=0$	$Ax+D=0$	Плоскость параллельна плоскости yOz
$A=D=0$	$By+Cz=0$	Плоскость параллельна оси *Ox* и проходит через начало координат
$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	Прямая, параллельная оси *Oy* и проходит через начало координат
$C=D=0$	$Ax+By=0$	Плоскость параллельна оси *Oz* и проходит через начало координат
$A=B=D=0$	$z=0$	Уравнение плоскости xOy
$A=C=D=0$	$y=0$	Уравнение плоскости xOz
$B=C=D=0$	$x=0$	Уравнение плоскости yOz

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;5;1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1,2,-3)$.

Решение: Воспользуемся уравнением (1):

$$1 \cdot (x - (-2)) + 2 \cdot (y - 5) - 3 \cdot (z - 1) = 0.$$

Раскроем скобки и получим общее уравнение плоскости $x + 2y - 3z - 5 = 0$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости π, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Пусть произвольная точка $M(x, y, z) \in \pi$. Составим векторы:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Эти векторы лежат на плоскости π тогда и только тогда, когда они компланарны, т.е. их смешанное произведение $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$. Запишем это условие в координатной форме:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.} \qquad (3)$$

Уравнение (3) называют **уравнением плоскости, проходящей через три точки**.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1 = (2,3,-4)$, $M_2 = (1,0,-3)$ и $M_3 = (4,-1,3)$.

Решение: Воспользуемся уравнением (3):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-(-4) \\ 1-2 & 0-3 & -3-(-4) \\ 4-2 & -1-3 & 3-(-4) \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по элементам первой строки:

$$(x-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + (z+4)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)(-21+4) - (y-3)(-7-2) + (z+4)(4+6) = 0,$$

$$(-17)(x-2) + 9(y-3) + 10(z+4) = 0,$$

$17x - 9y - 10z - 47 = 0$ - общее уравнение плоскости.

4. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b, и c, т.е. проходит через три точки $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$ и $M_3(0,0,c)$(рис. 2).

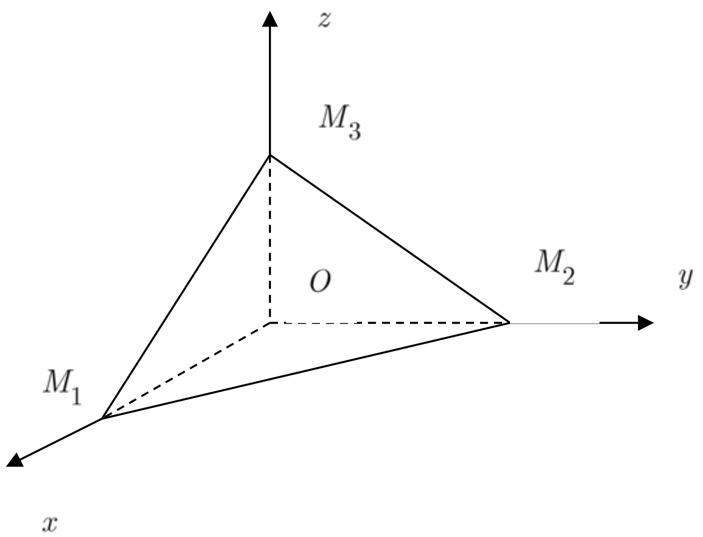

Рис. 2.

Подставим координаты этих точек в уравнение (3) и раскроим определитель. Получим

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \tag{4}$$

Уравнение (4) называют **уравнением плоскости в отрезках на осях.** Им удобно пользоваться при построении плоскости.

5. Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы своими общими уравнениями:

$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

1. Две плоскости либо совпадают, либо являются параллельными, либо пересекаются по прямой. Тогда

   а) если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;

б) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельны;

в) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то плоскости пересекаются по прямой, уравнением которой служит система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2. Под **углом между плоскостями** π_1 и π_2 понимается один из двугранных углов, образованный этими плоскостями. Угол между нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ этих плоскостей равен одному их таких углов. Поэтому

$$\boxed{\cos(\pi_1 \widehat{,} \pi_2) = \cos(\vec{n}_1 \widehat{,} \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\, \vec{n}_1 \,| \cdot |\, \vec{n}_2 \,|}.} \qquad (5)$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1 \,||\, \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \,||\, \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

Пример. Найти угол φ между плоскостями

$\pi_1 : 2x + 4y - 8 = 0$ и $\pi_2 : 2x - y + 2z = 0$

Решение: Координаты нормальных векторов плоскостей - $\vec{n}_1 = (2, 4, 0)$, $\vec{n}_1 = (2, 1, -2)$. Воспользуемся формулой (5)

$$\cos(\varphi) = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\ \vec{n}_1\ | \cdot |\ \vec{n}_2\ |} = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 0\,.$$

Следовательно, плоскости перпендикулярны.

6. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz\ D = +0$. Расстояние от некоторой точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π можно найти по формуле

$$\boxed{d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + D^2}}.} \qquad (6)$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_1(-1, 2, 6)$ до плоскости

$2 \quad +x \quad y \quad 4 \quad =-8 \quad 0 \quad .$

Решение: Воспользуемся формулой (6):

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + D^2}} = \frac{\left|2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 6 - 8\right|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$