Лекция №7. Угол между двумя прямыми

Определение. Угол между прямыми (I) и (II) называется угол на который нужно повернуть прямую I, чтобы она совпала со II.

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \quad tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_1}$$

или $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

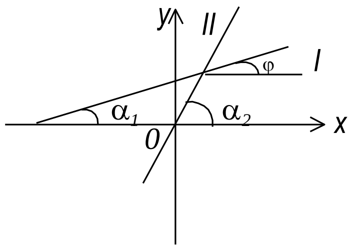

Рис. 19

п 6 Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если прямые параллельны, то $\varphi = 0$ $tg\,\varphi = 0$ $k_2 - k_1 = 0$

$$\mathbf{k_2 = k_1}$$

Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = 90^0$

$$tg\varphi = \infty \quad 1 + k_1 k_2 = 0 \quad \grave{e} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

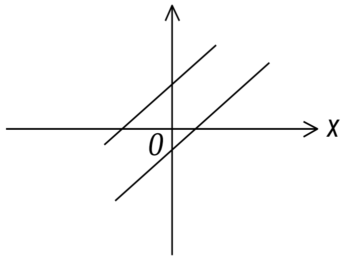

Рис. 20

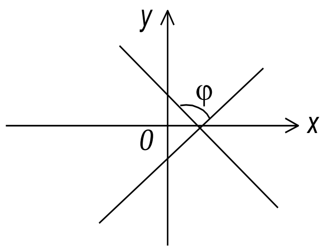

Рис. 21

п 7 Прямая как линия первого порядка. Общее уравнение прямой

<u>Теорема.</u> В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первого порядка и обратно, каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую.

<u>*ДОКАЗАТЕЛЬСТВО*</u>

1). Пусть дана произвольная прямая. Если она не перпендикулярна оси ох, то ее уравнение имеет вид $y = kx + b$; это есть уравнение I степени.

Если прямая перпендикулярна оси ох и отсекает на ней отрезок, то ее уравнение имеет вид: $x = a$ тоже уравнение I степени.

2). Дано уравнение первой степени АХ + ВУ +С = 0. Покажем, что оно определяет прямую.

Пусть $B \neq 0$, тогда $y = -\dfrac{A}{B}X - \dfrac{C}{B}$ обозначим $-\dfrac{A}{B} = k;\quad -\dfrac{C}{B} = b$

Получим $y = kx + b$ – уравнение прямой

Если $B = 0$, то $x = -\dfrac{C}{A} \quad -\dfrac{C}{A} = a;\quad x = a$ есть уравнение прямой

<u>Вывод.</u> **Каждая прямая линия I –го порядка и обратно каждая линия I –го порядка есть прямая.**

Определение. **Уравнение AX + DY + C = 0 называется общим уравнением прямой.**

п 8. Уравнение прямой в отрезках

Пусть дано уравнение $Ax + By + C = 0$ и пусть $A \neq 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$.

$Ax + By = -C$ поделим почленно на – С

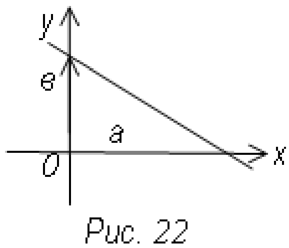

Рис. 22

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1 \; или \; \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \;\; обозначим \; -\frac{C}{A}=a; -\frac{C}{B}=b$$

Получим $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\Rightarrow$ **уравнение прямой в отрезках**

a и b отрезки, которые, прямая отсекает на координатных осях ох и оу

при у = 0 х = а; при х = 0 у = b

п 9. Нормальное уравнение прямой

Дана прямая. Проведем через начало координат нормаль $\vec{n}$ к прямой.

Р – точка пересечения нормали и прямой.

На нормали зададим положительное направление от точки О к точке Р.

Обозначим через Р длину отрезка ОР (рис. 23).

α – угол между нормалью и положительным направлением оси ох.

Возьмем на прямой произвольную точку М (х, у) $|OM|=p$ (рис 23). Обозначим через Р длину отрезка ОР (рис. 23).

А – угол между нормально и положительным направлением оси ох.

Возьмем на прямой произвольную точку М (х, у) $|OM|=\rho$.

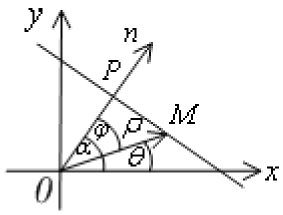

Рис. 23

$np_n\overrightarrow{OM}=p$

$$np_n\overrightarrow{OM}=\rho\cos\varphi=\rho(\alpha-\theta)=p(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=$$

$=p\cos\theta\bullet\cos\alpha+p\sin\theta\sin\alpha=x\cos\alpha+y\sin\alpha$ отсюда $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ или

$x=\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ **- нормальное уравнение прямой**

п. 10. Расстояние от точки до прямой

Пусть дана прямая и точка вне ее (рис. 24).

Определение. **Отклонением точки M_1 от данной прямой назовем число td, если точка М, и начало координат лежат по разные стороны от прямой и число –d, если прямая и точка M_1 лежат по одну сторону от начала координат.**

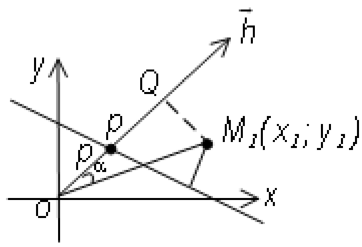

Рис. 24

$$d=OQ-OP=np_n\overline{OM}_1-P$$

Но $np_n=\overline{OM}=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha$ отсюда

$$d=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p$$

Пусть дано общее уравнение прямой Ax + By + C = 0 (1) и нормальное уравнение этой прямой $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ (2)

Так как уравнения (1) и(2) определяют одну и туже прямую, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Это означает, что умножив все числа уравнения (1) на одно и тоже число μ мы получим уравнение (2)

$$\begin{cases} MAx + MAy + MC = 0 \\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \end{cases} \quad \text{Тогда } MA = \cos\alpha; \quad MB = \sin\alpha$$

$$MC = -p$$

$$M^2A^2 = \cos^2\alpha \qquad M^2\left(A^2 + B^2\right) = 1 \quad M = \pm\frac{1}{\sqrt{B^2 + D^2}}$$

$$M^2B^2 = \sin\alpha$$

Число μ называется нормирующим множителем

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \ \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad -p = \pm\frac{C}{A^2 + B^2}$$

$$d = \pm\frac{1}{A^2 + B^2}\left(Ax_1 + By_1 + C\right) \quad \text{отсюда } d = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax_1 + By_1 + C)$$

или $d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$ **- формула расстояния от точки до прямой**