Лекция № 10

. Кривые второго порядка: окружность, эллипс

п.1 Общее уравнение II степени

Общее уравнение II степени относительно переменных x и y может содержать члены второй степени x^2; y^2; xy первой степени x; y и свободный член.

Общее уравнение II степени имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Дx + Fy + E = 0$$

где, по крайней мере, один из коэффициентов отличен от нуля.

Мы рассмотрим следующие кривые второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу, параболу.

п 2. Окружность

Определение. **Окружностью называется геометрическое место точек равноудаленных от одной точки, называемой центром окружности.**

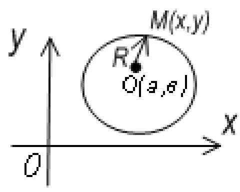

Рис.26

Выведем уравнение окружности.

Пусть точка O (a, в) – центр окружности. R ее радиус.

M (x, y) – текущая точка окружности (рис. 26). Тогда по формуле расстояние между двумя точками имеем:

$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-в)^2}$ или

$\mathbf{(x - a)^2 + (y - в)^2 + R^2}$ (1) => **уравнение окружности**

Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение имеет вид: $\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$ (2)

$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2ay + в^2 = R^2$ или

$x^2 + y^2 - 2ax - 2вy + \left(a^2 + в^2 - R^2\right) = 0$ или

$x^2 + y^2 + Дx + Ey + F = 0$ $(1^{|})$

где $Д = -2a,\ E = -2в,\ F = a^2 + в^2 - R^2$

Итак, уравнение окружности – есть уравнение II степени

Вывод: Но не всякое уравнение II степени есть окружность. Чтобы уравнение II степени определяло окружность нужно, чтобы коэффициенты при x^2 и y^2 были одинаковы, а член с произведением xy должен отсутствовать.

п. 3 Эллипс и его каноническое уравнение

Определение. **Эллипсом называется геометрическое место точек , сумма расстояний которых до двух данных точек (F_1 и F_2) , называемых фокусами есть величина постоянная.**

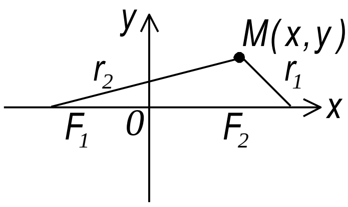

Рис. 27

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат ХОУ, чтобы фокусы эллипса F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс, а начало координат делило бы расстояние между фокусами пополам (рис. 27)

Обозначим $F_1 F_2 = 2c$

Тогда F_1 (c, 0); F_2 (-c; 0).

Возьмем произвольную точку М (x, y), лежащую на эллипсе, тогда $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$. Числа r_r и r_2 называются фокальными радиусами эллипса.

Согласно определению эллипса $r_1 + r_2 = const$.

Обозначим ее через 2а.

Тогда $r_1 + r_2 = 2a$; $F_1 F_2 = 2c$, отсюда $a > c$

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \;\; r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Упростим это выражение, избавившись от иррациональности $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$$x^2 - 2c + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 + 2xctc^2ty^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc; \;\; a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2; \;\; x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Обозначим $\mathbf{a^2 - c^2 = в^2}$, тогда $x^2в^2 + y^2a^2 = a^2в^2$ делим почленно на $a^2в^2$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1 \Rightarrow$ **каноническое уравнение эллипса**

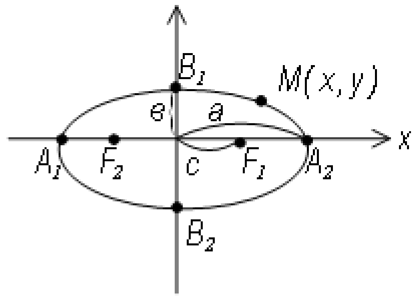

Рис. 28

Так как уравнение эллипса содержит x и y в четных степенях, то если точка M (x, y) находится на эллипсе, то и точки с координатами M_1 (x; -y), M_2 (-x; -y), M_3 (-x; -y) тоже находятся на эллипсе. Следовательно, оси координат являются осями симметрии эллипса.

Ось симметрии, на которой расположены фокусы называются фокальной осью.

Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются вершинами.

Найдем координаты вершин эллипса при

$y=0 \quad \frac{x^2}{a^2}=1 \quad x=\pm a \quad при \quad x=0 \qquad \frac{y^2}{в^2}=1 \qquad y=\pm в$

Следовательно вершинами эллипса будут точки с координатами A_1 (a; 0);

A_2 (-a; 0); B_1 (0; в); B_2 (0; -в).

Отрезок A_1A_2 – большая ось эллипса

B_1B_2 – малая ось эллипса

a – большая полуось; в – малая полуось

п.4 Эксцентриситет и директрисы эллипса

Определение. **Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине его большой оси.**

$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ так как c < a, то ε< 1

Так как $c^2=a^2-в^2, то\ \varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-в^2}{a^2}=1-\left(\frac{в}{a}\right)^2$

$\varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{в}{a}\right)^2} \quad и \quad \frac{в}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Чем ближе ε к единице, тем меньше $\frac{в}{a}$ и тем сильнее вытянут эллипс.

Чем ближе ε к нулю, тем меньше вытянут эллипс. Для окружности ε = 0

$\left(\frac{в}{a}=1\right)$, $в=a$.

Выразим фокальные радиусы эллипса через эксцентриситет

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2};\quad r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2};\quad r_1+r_2=2a$$

$$r_1^2=(x-c)^2+y^2;\quad r_2^2=(x+c)^2+y^2$$

$$r_2^2-r_1^2=x^2+2xc+c^2+y^2-x^2+2xc-c^2-y^2\quad r_2^2-r_1^2=4xc$$

$(r_2-r_1)\left(r_2+r\right)=4xc;\quad (r_2-r_1)\cdot 2a=4xc\; r_2-r_1=2\frac{c}{a}x;\quad \frac{c}{a}=\varepsilon\quad r_2-r_1=2\varepsilon x$ имеем

$$+\begin{cases} r_2-r_1=2\varepsilon x \\ r_2+r_1=2a \end{cases}\qquad \begin{aligned} &r_2=a+\varepsilon x \\ &r_1=2a-r_2=2a-a-\varepsilon x=a-\varepsilon x \end{aligned}$$

$$\overline{2r_2=2a+2\varepsilon x}$$

итак $\begin{aligned} r_1=a-\varepsilon x \\ r_2=a+\varepsilon x \end{aligned}$

Рассмотрим прямую $x=\ell(\ell\succ a)$ параллельную оси y (рис. 29). Расстояние d_1 от произвольной точки эллипса до прямой ℓ равно: $d_1=\ell-x$

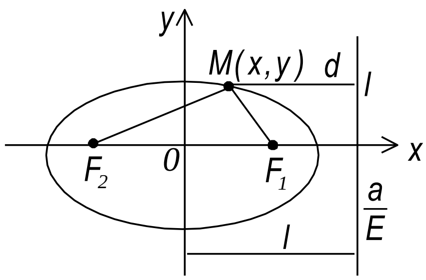

Рис. 29

$r_1 = a - \varepsilon$. Поделим $\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{l-x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{l-x}$

Пусть $l=\frac{a}{\varepsilon}$; тогда $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$

То есть соотношение $\frac{r_1}{d_1}$ сохраняет постоянное значение. В силу симметрии тоже заключение можно сделать относительно левого фокуса F_2 и прямой с уравнением $x=-\frac{a}{\varepsilon}$.

Определение. **Две прямые, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра называются директрисами эллипса.**

Свойство директрис: **отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная ε.**