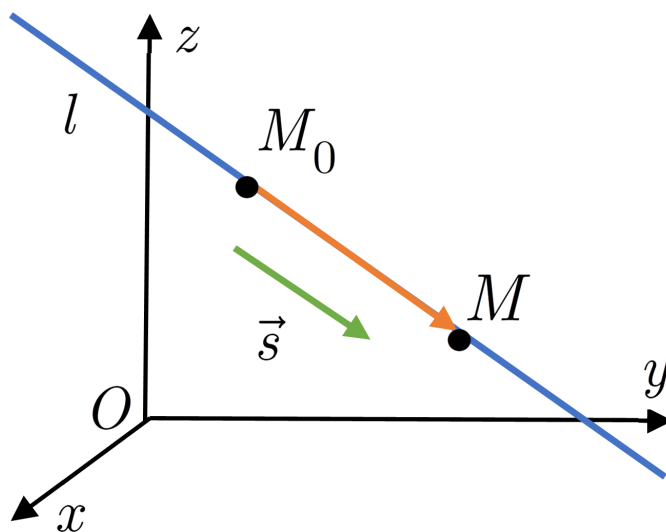


## Лекция № 14. Уравнения прямой в пространстве

### 1.1 Канонические уравнения прямой в пространстве

Рассмотрим в пространстве произвольную прямую  $l$ . Будем предполагать, что точка  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ , а ненулевой вектор  $\vec{s} = (m, p, q)$  параллелен этой прямой или лежит на ней. Вектор  $\vec{s}$  - **направляющий вектор** прямой  $l$ .



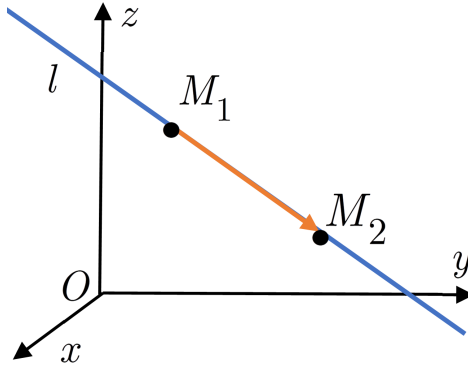
---

При таких условиях произвольная точка  $M(x, y, z)$  принадлежит прямой  $l$  тогда и только тогда, когда вектор  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  коллинеарен вектору  $\vec{s}$ . Отсюда получаем **канонические уравнения прямой в пространстве**:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}. \quad (1)$$

## 2 Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть в пространстве прямая  $l$  проходит через две заданные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Вектор  $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$  можно взять в качестве направляющего вектора прямой  $l$ .



Воспользовавшись уравнениями (1), составим уравнение прямой  $l$ , проходящей через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и имеющей направляющий вектор  $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$ . Получим **уравнения прямой, проходящей через две точки**:

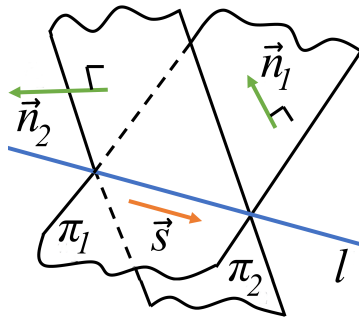
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2)$$

---

### 3 Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую  $l$  в пространстве можно рассматривать, как линию пересечения двух непараллельных плоскостей, система уравнений которых дает **общие уравнения прямой в пространстве**:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$



Так как прямая  $l$  перпендикулярна нормальным векторам  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ , то за направляющий вектор этой прямой можно взять векторное произведение

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

### 4 Параметрические уравнения прямой в пространстве

Приравнивая уравнения (1) к некоторому параметру  $t \in R$ , получим **параметрические уравнения прямой**:

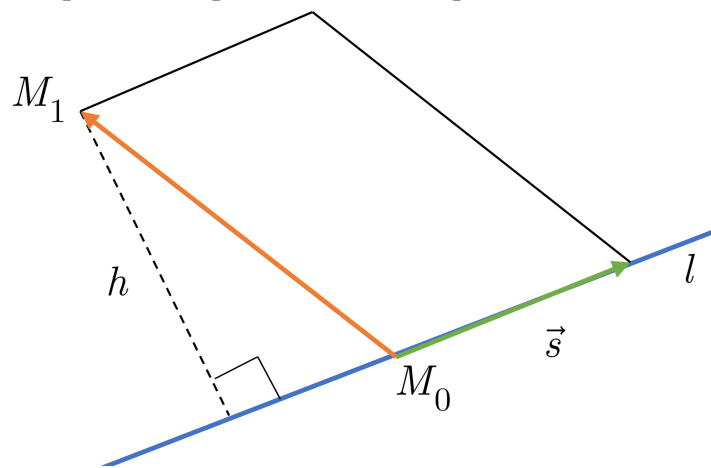
$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = pt + y_0, \\ z = qt + z_0. \end{cases} \quad (4)$$

---

## 5 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая  $l$  в пространстве задана своими каноническими уравнениями (1), точка  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ ,  $\vec{s} = (m, p, q)$  - направляющий вектор прямой  $l$ . Найдем расстояние  $d$  от точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  до прямой  $l$ .

Построим параллелограмм на векторах  $\overrightarrow{M_0M_1}$  и  $\vec{s}$ .



Тогда расстояние от точки  $M_1$  до прямой  $l$  будет равно высоте  $h$  параллелограмма:

$$d = \frac{S_{\text{пар}}}{|\vec{s}|} = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}. \quad (5)$$

## 6 Расстояние между двумя прямыми

Если две прямые в пространстве пересекаются или совпадают, то расстояние между ними равно нулю. Поэтому имеет смысл говорить о расстоянии между скрещивающимися или параллельными прямыми.

Пусть в пространстве прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими каноническими уравнениями:

---


$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{p_1} = \frac{z - z_1}{q_1}, l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{p_2} = \frac{z - z_2}{q_2}.$$

*Случай 1.* Прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны.

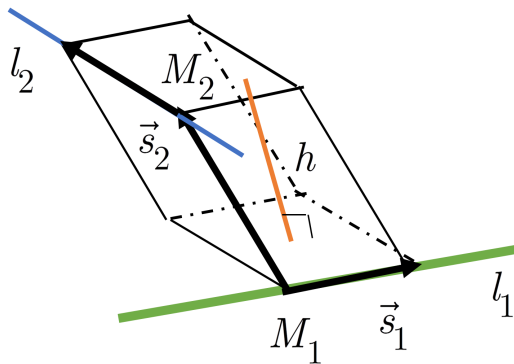
Тогда расстояние между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  есть расстояние от произвольно выбранной точки прямой  $l_1$  до прямой  $l_2$  и вычисляется по формуле (5).

*Случай 2.* Прямые  $l_1$  и  $l_2$  скрещиваются.

*Определение*

**Скрещивающимися** называются прямые, которые невозможно поместить в одну плоскость, т.е. они не параллельны и не пересекаются.

Через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости единственным образом. Расстояние между скрещивающимися прямыми есть расстояние между этими плоскостями и может быть найдено, как высота параллелепипеда, построенного на векторах  $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ,  $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$  и  $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$ .



В результате получаем формулу для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми с помощью смешанного произведения векторов:

---


$$d = \frac{V_{\text{пар}}}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{|\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}. \quad (6)$$

## 7 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть две прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{p_1} = \frac{z - z_1}{q_1}, \quad l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{p_2} = \frac{z - z_2}{q_2}.$$

*Определение*

Под **углом между прямыми**  $l_1$  и  $l_2$  будем понимать угол между их направляющими векторами  $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$  и  $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$ :

$$\cos(\widehat{l_1 l_2}) = \cos(\widehat{\vec{s}_1 \vec{s}_2}) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}. \quad (7)$$

*Условие параллельности прямых:*

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

*Условие перпендикулярности прямых:*

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 = 0.$$

**Прямые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости** (т.е. либо пересекаются, либо параллельны), если векторы  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_2$  и  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  лежат в одной плоскости, т.е. компланарны:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

---

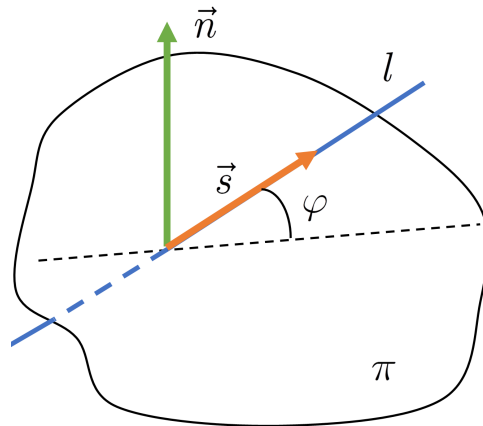
## 8 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы прямая  $l$  своим каноническим уравнением и плоскость  $\pi$  общим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}, \quad \pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

*Определение*

**Углом  $\varphi$  между прямой и плоскостью** называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.



Тогда

$$\cos(\widehat{\vec{s} \vec{n}}) = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}. \quad (9)$$

*Условие параллельности прямой и плоскости:*

$$l \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am + Bp + Cq = 0.$$

*Условие перпендикулярности прямой и плоскости:*

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{p}{B} = \frac{q}{C}.$$

Для нахождения **точки пересечения** прямой  $l$  и плоскости  $\pi$  удобно от канонических уравнений прямой  $l$  перейти к параметриче-

---

ским (4). Подставив эти выражения для  $x$ ,  $y$  и  $z$  в общее уравнение плоскости  $\pi$ , найдем значение параметра  $t$ , при котором прямая  $l$  и плоскость  $\pi$  пересекаются:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bp + Cq}.$$

Затем подставим найденное значение  $t$  в параметрические уравнения прямой  $l$  и найдем координаты точки пересечения.

Одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bp + Cq = 0 \end{cases} \quad (10)$$

является **условием принадлежности прямой  $l$  плоскости  $\pi$** .

Если прямая  $l$  и плоскость  $\pi$  пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Если же они параллельны, то **расстояние от прямой до плоскости** есть расстояние от любой точки прямой до плоскости и может быть найдено по формуле (6).