Лекция № 11

Гипербола и парабола

Определение. **Гиперболой называется геометрическое место точек, разность от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная**

Возьмем систему координат, так чтобы фокусы лежали на оси абсцисс, а начало координат делило отрезок F_1 F_2 пополам (рис. 30). Обозначим F_1 F_2 = 2c. Тогда F_1 (c; 0); F_2 (-c; 0)

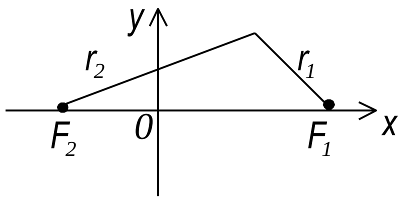

Рис. 30

MF_2 = r_2, MF_1 = r_1 – фокальные радиусы гиперболы.

Согласно определения гиперболы $r_1 - r_2$ = const.

Обозначим ее через 2a

Тогда r_2- r_1 = ±2a итак:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=x^2-2xc+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

$$4xc-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2};\quad xc-a^2=\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=ax^2-2xca^2+a^2c^2+a^2y^2)$$

$$x^2(c^2-a^2)-y^2a^2=a^2(c^2-a^2)\quad \textit{Пусть } c^2-a^2=в^2$$

$x^2в^2-y^2a^2=a^2в^2$ *или* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{в^2}=1$ => **каноническое уравнение гиперболы**

Так как уравнение гиперболы x и y в четных степенях, то если точка M_0 (x_0; y_0) лежит на гиперболе, то на ней лежат также точки M_1 (x_0; -y_0) M_2 (-x_0; -y_0) M_3 (-x_0; -y_0).

Следовательно, гипербола симметрична относительно обеих координатных осей.

При y = 0 $x^2 = a^2$ $x = \pm a$. Вершинами гиперболы будут точки A_1 (a; 0); A_2 (-a; 0).

$y = \pm\frac{в}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. В силу симметрии исследование ведем в I четверти $y = \frac{в}{a}\sqrt{x^2 - y^2}$ $(x \geq 0)$

1) при $0 \leq x < a$ y имеет мнимое значение, следовательно, точек гиперболы с абсциссами $0 \leq x < a$ не существует

2) при x = a; y = 0 A_1 (a; 0) принадлежит гиперболе

3) при x > a; y > 0. Причем при неограниченном возрастании x ветвь гиперболы уходит в бесконечность.

Отсюда следует, что гипербола представляет собой кривую, состоящую из двух бесконечных ветвей.

п 6. Асимптоты гиперболы

Рассмотрим вместе с уравнением $y = \frac{в}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ уравнение прямой $y = \frac{в}{a}x$

Кривая будет лежать ниже прямой (рис. 31). Рассмотрим точки N (x, Y) и M (x, y) у которой абсциссы одинаковы, а У - y = MN. Рассмотрим длину отрезка MN

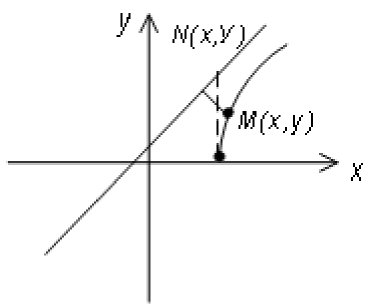

Рис. 31

$$|MN| = Y - y = \frac{в}{a}x - \frac{в}{a} = \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{в}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{в(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{в}{a} \cdot \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Найдем $\lim\limits_{x \to \infty} MN = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{aв}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$

Итак, если точка M, двигаясь по гиперболе в первой четверти удаляется в бесконечность, то ее расстояние от прямой $y = \frac{в}{a}x$ уменьшается и стремится к нулю.

В силу симметрии таким же свойством обладает прямая $y = -\frac{в}{a}x$.

Определение. Прямые к которым при $x \to \pm\infty$ кривая неограниченно приближается называются асимптотами.

Итак, уравнение асимптот гиперболы $y = \pm\frac{в}{a}x$.

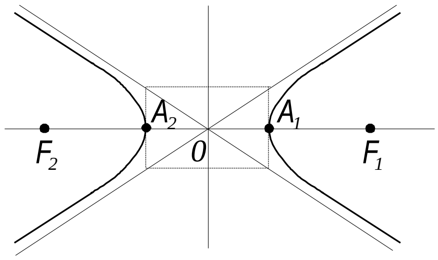

Рис. 32

Асимптоты гиперболы располагаются по диагоналям прямоугольника, одна сторона которого параллельна оси ох и равна 2а, а другая параллельна оси оу и равна 2в, а центр лежит в начале координат (рис. 32).

п 7. Эксцентриситет и директрисы гиперболы

$r_2 - r_1 = \pm 2a$ знак + относится к правой ветви гиперболы

знак – относится к левой ветви гиперболы

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_1^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \qquad r_2^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 4xc \qquad (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4xc$$

$$\pm 2a(r_1 + r_2) = 4xc \qquad r_1 + r_2 = \pm 2\frac{c}{a}x$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2\frac{c}{a}x \\ r_2 - r_1 = 2a \end{cases} \to \textit{правая ветвь} \quad \begin{cases} r_1 + r_2 = -2\frac{c}{a}x \\ r_2 - r_1 = -2a \end{cases} \to \textit{левая ветвь}$$

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x \qquad r_2 = -a - \frac{c}{a}x$$

$$r_1 = -a + \frac{c}{a}x \qquad r_1 = -a - \frac{c}{a}x$$

Определение. **Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к расстоянию между ее вершинами.**

$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$. Так как c > a, $\varepsilon > 1$

Выразим фокальные радиусы гиперболы через эксцентриситет:

$$\begin{cases} r_1 = -a + \varepsilon x \\ r_2 = a + \varepsilon x \end{cases} \to \textit{правая ветвь} \qquad \begin{cases} r_1 = -a - \varepsilon x \\ r_2 = -a - \varepsilon x \end{cases} \to \textit{левая ветвь}$$

Определение. **Назовем прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные фокальной оси гиперболы и расположенными на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от ее центра директрисами гиперболы, соответствующие правому и левому фокусам.**

Так как для гиперболы $\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$ следовательно, директрисы гиперболы, располагаются между ее вершинами (рис. 33). Покажем, что отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная ε.

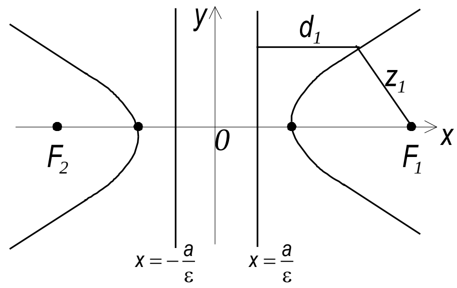

Рис. 33

$$d_1 = x - \frac{a}{\varepsilon}$$

$$r_1 = -a + \varepsilon x \qquad \frac{r_1}{d_1} = \frac{-a+\varepsilon}{x - \frac{a}{2}} = \frac{(-a+\varepsilon x)\varepsilon}{(\varepsilon x - a)}$$

п. 8 Парабола и ее уравнение

Определение. **Парабола есть геометрическое место точек равностоящих от данной точки, называемой фокусом и от данной прямой называемой директрисой.**

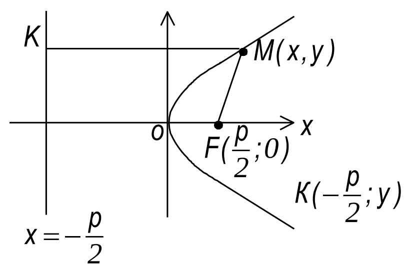

Рис. 34

Чтобы составить уравнение параболы примем за ось x прямую, проходящую через фокус F_1 перпендикулярную к директрисе и будем считать ось x направленной от директрисы к фокусу. За начало координат возьмем середину O отрезка от точки F до данной прямой, длину которого обозначим через р (рис. 34). Величину р назовем параметром параболы. Точка координат фокуса $F(\frac{p}{2};0)$.

Пусть М (х, у) – произвольная точка параболы.

Согласно определению $|MK| = |MF|$

$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$ *или* $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ $\mathbf{y^2 = 2px}$ – **каноническое уравнение параболы**

Для определения вида параболы преобразуем ее уравнение $y = \pm\sqrt{2px}$ отсюда следует $x \geq 0$ *при* $x = 0$ $y = 0$. Следовательно, вершина параболы находится в начале координат и осью симметрии параболы является ох. Уравнение $y^2 = -2px$ при положительном р сводится к уравнению $y^2 = 2px$ путем замены х на –х и ее график имеет вид (рис. 35).

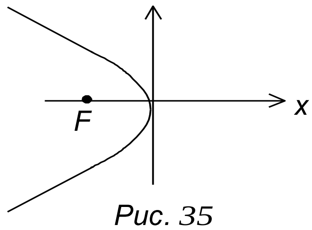

Рис. 35

Уравнение $x^2 = 2py$ является уравнением параболы с вершиной в точке О (0; 0) ветви которой направлены вверх.

$x^2 = -2py$ – уравнение параболы с центром в начале координат симметричная относительно оси у, ветви которой направлены вниз (рис. 36).

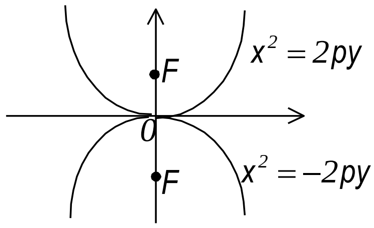

Рис. 36

У параболы одна ось симметрии.

Если х в первой степени, а у во второй, то ось симметрии есть х.

Если х во второй степени, а у в первой, то ось симметрии есть ось оу.

Замечание 1. **Уравнение директрисы параболы имеет вид** $x = -\frac{p}{2}$**.**

Замечание 2. **Так как для параболы** $\frac{r}{d} = 1$**, то ε параболы равен 1. ε = 1**.

п. 9 Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах

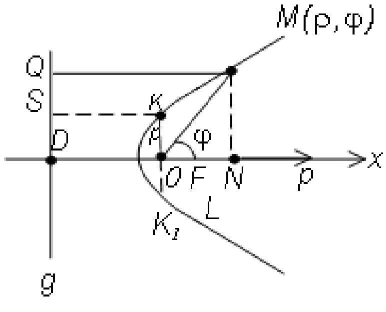

Рис. 37

Пусть дана одна из названных линий (L). Пусть F – фокус линии, g – соответствующая этому фокусу директриса. Введем полярную систему координат, так чтобы фокус совпадал с полюсом, а полярную ось направим в сторону противоположную директрисе, перпендикулярной ее (рис. 37).

Возьмем произвольную точку M (ρ, φ) на линии L. Возьмем соотношение $\frac{r}{d} = \varepsilon$ (1). В нашем случае r = ρ

d = MQ = DF + FN = DF + ρ cosφ. Проведем фокальную хорду KK' (KK' перпендикулярно фокальной оси).

Пусть KF = p (фокальный параметр)

Вследствие (1) $\frac{KF}{SK} = \varepsilon \qquad SK = \frac{KF}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}$

Отсюда $MQ = d = \frac{p}{\varepsilon} + \rho cos\varphi$, то $\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho cos\varphi} = \varepsilon \qquad \frac{\rho\varepsilon}{p + \varepsilon\rho cos\varphi} \qquad \rho = p + \varepsilon\rho cos\varphi$

$$\rho(1 - \varepsilon cos\varphi) = p$$

$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon cos\varphi}$ **- полярное уравнение кривой второго порядка**.