Преобразование координат

п.1 Общее уравнение II степени

Общее уравнение II степени относительно переменных x и y может содержать члены второй степени x^2; y^2; xy первой степени x; y и свободный член.

Общее уравнение II степени имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Дx + Fy + E = 0$$

где, по крайней мере, один из коэффициентов отличен от нуля.

п. 2 Преобразование координат при параллельном сдвиге осей

Пусть ox и oy старые, а $o^|x^|$ и $o^|y^|$ новые координатные оси $ox^|$ // ox; $oy^|$ // oy (рис. 38)

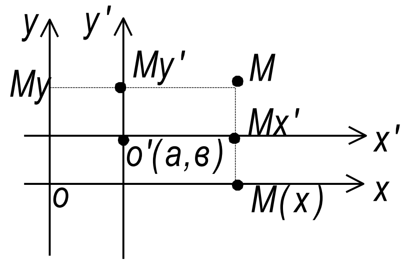

Рис. 38

Пусть положение новых осей относительно старой системы определяется заданием старых координат нового начала $o^|$ (а, в)

а – величина сдвига по направлению оси ox

в – величина сдвига по направлению оси oy.

Произвольная точка M имеет относительно старых осей координат M (x, y) относительно новых M ($x^|$, $y^|$).

Наша цель установить формулы, выражающие x и y через $x^|$, $y^|$ и наоборот.

Спроектируем точку M на оси ox и $o^|x^|$.

$OMx = o\,o^|_x + o^|_xMx$ или **$x = x^| + a$ (1) → выражение старых координат**

аналогично **$y = y^| + в$ через новые**

$x^| = x – a$ (1 а) выражение новых координат

$y^| = y – в$ через старые

п 3. Преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей

Пусть ox и oy – старые, а $ox^|$ и $oy^|$ - новые координатные оси. Положение новых осей относительно старых определяется заданием угла поворота, совмещающих старые оси с новыми (рис. 39).

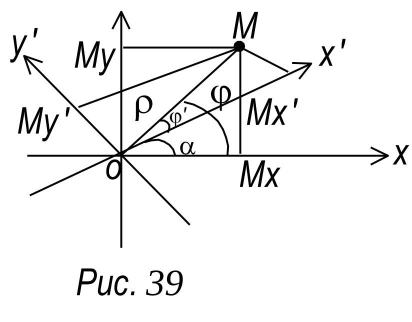

Рис. 39

Пусть α – угол поворота. Произвольная точка M имеет относительно старых осей координаты x; y, а относительно новых $x^|$; $y^|$. Наша цель установить формулы, выражающие x и y через $x^|$ и y и обратно.

Пусть ρ и φ полярные координаты точки M, если за полярную ось принять ось ox и ρφ', если за полярную ось принять ox'

$$\varphi = \varphi' + \alpha \qquad x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi$$

$$x' = \rho\cos\varphi' \qquad y' = \rho\sin\varphi'$$

Отсюда $x = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\varphi' + \alpha) = \rho\cos\varphi'\cos\alpha - \rho\sin\varphi'\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$

$$y = \rho\sin\varphi = \rho\sin(\varphi' + \alpha) = \rho\sin\varphi'\cos\alpha + \rho\cos\varphi'\sin\alpha = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha$$

Итак, $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = y'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ (2) **→ выражение старых координатных осей через новые.**

Формулы, выражающие новые координаты x' и y' через старые x и y'. Можно получить из следующих рассуждений.

Если новая система получается из старой путем поворота на угол α, то старая система получается из новой путем поворота на угол – α. Поэтому в равенствах (2) можно поменять местами старые и новые координаты, заменяя одновременно α на – α.

Тогда: $$\begin{aligned} x' &= x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha) \\ y' &= x\sin(-\alpha) + y\sin(-\alpha) \end{aligned}$$

или $$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$ (2а) → **выражение новых координатных осей через старые.**

п 4. Преобразование декартовых координат при изменении начала и поворота осей

Пусть а – величина сдвига в направлении оси ох; в – величина сдвига в направлении оси оу α – угол поворота

x, y координаты точки М в старых осях

x'; y' – координаты точки М в новых осях (рис. 40).

Введем вспомогательную систему координат $x''; y''$, направление осей которой совпадает с направлением осей старой системы, а начало координат совпадает с началом новой системы.

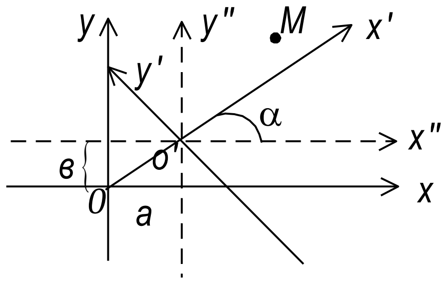

Рис. 40

Тогда согласно (1) $$\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y'' + в \end{aligned}$$

Согласно (2) $$\begin{aligned} x'' &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y'' &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}$$ тогда

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + в \end{cases}$$

Решим систему относительно x' и y'

$$+\begin{cases} x\cos\alpha = x'\cos^2\alpha - y'\sin\alpha\cos\alpha + a\cos\alpha \\ y\sin\alpha = x'\sin^2\alpha + y'\sin\alpha\cos\alpha + в\sin\alpha \end{cases}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = x' + a\cos\alpha = x' + a\cos\alpha + в\sin\alpha$$
$$x' = (x-a)\cos\alpha + (y-в)\sin\alpha$$

$$+\begin{cases} x\sin\alpha = x'\sin\alpha\cos\alpha - y'\sin^2\alpha + a\sin\alpha \\ -y\cos\alpha = -x'\sin\alpha\cos\alpha - y'\cos^2\alpha - в\sin\alpha \end{cases}$$

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = -y' + a\sin\alpha - в\cos\alpha$$
$$y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-в)\cos\alpha$$

Итак $$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-в)\sin\alpha \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-в)\cos\alpha \end{cases} \qquad (3а)$$

п. 5 Преобразование общего уравнения второй степени не содержащего произведения переменных

Запишем общий вид такого уравнения $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Выделим полный квадрат

$$(Ax^2+Dx)+(Cy^2+Ey)+F=0,\ A\left(x^2+\frac{D}{A}x\right)+c\left(y^2+\frac{E}{c}y\right)+F=0$$

$$A\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{D}{2A}+\frac{D^2}{4A^2}-\frac{D^2}{4A^2}\right)+c\left(y^2+2y\cdot\frac{E}{2c}+\frac{E^2}{4c^2}-\frac{E}{4c^2}\right)+F=0$$

$$A\left[\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\frac{D^2}{4A^2}\right]+C\left[\left(Y+\frac{E}{2c}\right)^2-\frac{E^2}{4c^2}\right]+F=0$$

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(Y+\frac{E}{2c}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4c}+F$$

Перенесем начало координат в точку $O'\left(-\frac{D}{2A};-\frac{E}{2c}\right)$

Тогда по формуле (1а)

$x'=x+\frac{D}{2A};\ y'=y+\frac{E}{2c}$ обозначим $\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4c}+F=U$

Получим $A(x')^2+B(y')^2=U$ (4)

Рассмотрим различные случаи

I А и В одного знака (всегда можно сделать А > 0 В > 0)

1) U > 0 Поделим (4) почленно на U, тогда

$$\frac{A(x')^2}{u}+\frac{C(y')^2}{u}=1 \quad \frac{A}{u}=\frac{1}{a^2};\ \frac{c}{u}=\frac{1}{в^2}$$

$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{в^2}=1$ Получим уравнение эллипса, его центр имеет координаты

$O'\left(-\frac{D}{2A};-\frac{E}{2c}\right)$, а оси параллельны координатным осям

2) $U=0\ \ A(x')^2+B(y')^2=0$ - это уравнение определяет одну точку, для которой $x'=0 и\, y'=0$ или $O'\left(-\frac{D}{2A};-\frac{E}{2c}\right)$

3) U < 0 правая часть уравнения (4) отрицательна и нет ни одной точки, удовлетворяющей этому уравнению (т.е. оно не определяет ни какой линии)

II. А и С разных знаков Пусть А > 0; С < 0

1) U > 0 разделим уравнение (4) на U

$$\frac{A(x')^2}{u}+\frac{C}{u}(y')^2=1 \quad \frac{A}{u}=\frac{1}{a^2};\ \frac{c}{u}=-\frac{1}{в^2}$$

$\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{в^2}=1$ → уравнение гиперболы, имеющей действительную ось $o'y'$, а мнимую ось $o'x'$

3) $U=0\ \ A(x')^2+C(y')^2=0$

Пусть А = m^2, с = - n^2

$$m^2(x')^2-n^2(y')^2=0 \quad (mx'+ny')(mx'-ny')=0$$

Это уравнение распадается на два уравнения первой степени $mx'-ny'=0 и\ \ mx'-ny'=0$

Каждое из них проходит через точку, $x'=0\ и\ \ y'=0$ т.е. через точку O'.

III. C = 0, E $\neq$ 0 Выделим полный квадрат

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x\right)+Ey+F=0 \quad A\left(x^2+2x\cdot\frac{D}{2A}+\frac{D^2}{4A^2}-\frac{D^2}{4A^2}\right)+Ey+F=0$$

$$A\left(x^2+\frac{D}{2A}\right)^2-\frac{D^2}{4A}+Ey+F=0 \quad Ey=-A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\frac{D^2}{4A^2}-F$$

$$y=-\frac{A}{E}\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\frac{D^2}{4AE}-\frac{F}{E}$$

$$y-\left(\frac{D^2}{4AE}-\frac{F}{E}\right)=-\frac{A}{E}\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2$$

Обозначим $-\frac{D}{2A}=a \qquad \frac{D^2}{4AE}-\frac{F}{E}=в; \ -\frac{A}{E}=k$

Тогда у – в = к (х - а)^2

Перенесем начало координат в точку $O'(a;в)$

Полагая $\begin{array}{l} x'=x-a \\ y'=y-в \end{array}$

Тогда мы получим уравнение параболы. Ее вершина находится в точке O', а осью симметрии является ось $o'y'$ параллельная оси оу.

2) E = 0 имеем Ax^2 +Dx + F = 0 пусть x_1 и x_2 корни этого характеристического уравнения, тогда A (x - x_1) (x – x_2) = 0

Мы получили два уравнения первой степени x = x_1 и x = x_2. т.е. получили уравнения двух прямых параллельных оси оу (т.е парабола выродилась в пару параллельных прямых), а если x_1 = x_2, то они сливаются в одну.

Если уравнение Ax^2 + Dx + F не имеет действительных корней, то нет ни одной точки, которая удовлетворяла бы заданному уравнению.

п 6. Преобразование общего уравнения второго порядка

Рассмотрим общее уравнение второй степени

Ax^2 +Bxy +Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 где B $\neq$ 0

Покажем, что при помощи поворота координатных осей его всегда можно привести к виду не содержащему члена с произведением переменных.

Повернем координатные оси на угол α. Тогда согласно формуле (2) имеем

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \quad и \quad y=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha$$

Подставим x и y в исходное уравнение

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0$$
$$A(x')^2\cos^2\alpha-2x'y'\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha t(y')^2\sin^2\alpha+B(x')^2\cos\alpha\sin\alpha+$$
$$+x'y'\cos^2\alpha-x'y'\sin^2\alpha-(y')^2\sin\alpha\cos\alpha+C(x')^2\sin^2\alpha+$$
$$+2x'y'\sin^2\alpha\cos\alpha+(y')^2\cos^2\alpha)+D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0$$
$$(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)(x')^2+\left[2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B()\cos^2\alpha-\sin\alpha\right]x'y'+$$
$$+(A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha)(y')^2+$$
$$+(D\cos\alpha+E\sin\alpha)x'+(-D\sin\alpha+F\cos\alpha)y'+F=0$$

Выберем угол α таким, чтобы коэффициент x',y' равнялся нулю

Т.е. $2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$ или

$(C-A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0 \quad \sin 2\alpha \neq 0 \ (\text{тогда бы } B=0)$

Делим на sin2α

$$(C-A) + Bctg 2\alpha = 0 \ \text{ или } \ ctg 2\alpha = \frac{A-C}{B} \qquad (5)$$

Таким образом, всегда можно выбрать угол α таким, чтобы после поворота осей на этот угол в уравнении исчезает член с произведением xy. Угол α будем выбирать так чтобы $0 \prec \alpha \prec \pi/2$.

<u>Пример</u> упростить уравнение

$$x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 3 = 0 \quad A=1, B=1, C=1$$

$$ctg 2\alpha = \frac{A-C}{B} = \frac{1-1}{1} = 0 \quad 2\alpha = 90^0 \ \alpha = 45^0$$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\alpha \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Согласно формуле (2) $\begin{array}{l} x = x'\cos 45^0 - y'\sin 45^0 \\ y = x'\sin 45^0 \,|+ y'\cos 45^0 \end{array}$

$x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}};\ y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ Подставляем x и y в исходное уравнение

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) - 3\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} - 6\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} + 3 = 0$$

$$(x')^2 - \cancel{2x'y'} + \cancel{(y')^2} + (x')^2 - \cancel{(y')^2} + (x')^2 + \cancel{2x'y'} +$$
$$+(y')^2 - 3\sqrt{2}x' + 3\sqrt{2}y' - 6\sqrt{2x'} - 6\sqrt{2y'} + 3(\sqrt{2})^2 = 0$$

или $3(x')^2 + (y')^2 - 9\sqrt{2}x' - 3\sqrt{2}y' + 6 = 0$ выделяемый полный квадрат

$$3\left[(x')^2 - 3\sqrt{2}x'\right] + \left[(y')^2 - 3\sqrt{2}y'\right] + 6 = 0$$

$$3\left[(x')^2 - 2x'\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right] + \left[(y')^2 - 2y'\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right] + 6 = 0$$

$$3\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{27}{2} + \left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \frac{9}{2} + 6 = 0$$

$$3\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 12;$$

$$\frac{\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} + \frac{\left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{12} = 1$$

Мы получили эллипс с полуосями $a = 2;\ в = 2\sqrt{3}$

координаты центра в системе координат $x'y'\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}; \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

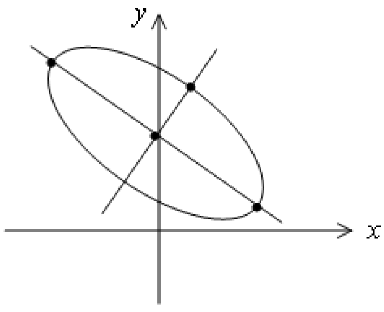

Рис. 41

Найдем координаты эллипса в системе xоу (рис. 41)

$$x = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 0;\ y = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 3$$