Лекция 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД КРАМЕРА

Содержание

1. Основные определения

- **Системой** m **линейных уравнений с** n **неизвестными** называется совокупность уравнений, в каждом из которых неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ присутствуют в первой степени:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n} \right)$ - коэффициенты при неизвестных, i - номер уравнения, j - номер неизвестной, b_i - свободные члены.

- **Решением СЛУ** называется упорядоченный набор значений неизвестных

$$\boxed{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)},$$

который при подстановке в каждое уравнение системы вместо неизвестных соответственно $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ обращает их в верные равенства.

- **Решить СЛУ** – это значит **указать все решения** системы, то есть такие наборы значений неизвестных, которые обращают уравнения системы в тождества.

Система линейных уравнений называется:

а) **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение;

б) **несовместной**, если она не имеет решений;

в) **определенной**, если она имеет единственное решение;

г) **неопределенной**, если она имеет бесконечное множество решений;

д) **однородной**, если все свободные члены равны нулю $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$;

е) **неоднородной**, если есть $b_i \neq 0$.

2. Метод Крамера (определителей) решения систем линейных уравнений

Правило (метод) Крамера применяется к системам, у которых <u>число уравнений равно числу неизвестных. Этот метод использует определители.</u>

2.1. Число уравнений и неизвестных равно 2

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}}$$

Вычисляются определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Здесь

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных;

$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ - это определитель, полученный из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при x на столбец свободных членов;

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ - это определитель, полученный из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при y на столбец свободных членов.

1. Если $\Delta \neq 0$, то **система совместная и определенная**, то есть **имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:**

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}}.$$

2. Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x , Δ_y отличен от нуля, то **система не имеет решений (несовместная)**.

3. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то **система имеет бесконечно много решений (совместная и неопределенная)**.

Пример 1. Решить с помощью метода Крамера систему уравнений
$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 3x + 4y = -5. \end{cases}$$

Решение

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11 \neq 0$, поэтому СЛУ имеет единственное решение.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 5 = 11$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$.

Тогда $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{11}{11} = 1$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-22}{11} = -2$.

Ответ: система уравнений совместна и определенна, ее единственное решение $X = (1;\ -2)$.

Пример 2. Решить с помощью метода Крамера система уравнений
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}.$$

Решение

Определитель системы равен нулю: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$, однако один из вспомогательных определителей не равен нулю: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \neq 0$, значит, СЛУ не имеет решений, то есть СЛУ *несовместная*.

Пример 3. Решить с помощью метода Крамера систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 9x + 15y = 12. \end{cases}$$

Решение

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 0$.

Поэтому система *имеет бесконечно много решений*.

Разделив коэффициенты 2-го уравнения на 3, получим: $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

Оставим только одно из этих уравнений: $3x + 5y = 4$.

Выразим y через x: $\boxed{y=\frac{4-3x}{5}}$, значение x - любое действительное число. Это и есть выражение для **общего решения** СЛУ. Ответ можно записать так: $\boxed{X=\left(x;\ \frac{4-3x}{5}\right),\text{ где } x\in R}$.

Придавая x различные значения, будем получать бесконечное множество *частных решений*. Например, при $x=3$ получим $y=\frac{4-9}{5}=-1$ и первое частное решение $(3;\ -1)$. При $x=-7$ получим $y=\frac{4+21}{5}=5$ и второе частное решение $(-7;5)$, и так далее.

2.2. Число уравнений и неизвестных равно 3

Рассмотрим СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3. \end{cases}$$

Вычисляются определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1. Если $\Delta\neq 0$, то система **имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:**

$$\boxed{x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ \ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}}.$$

2. Если $\Delta=0$, а хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то **система не имеет решений**.

3. Если $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, то система **имеет бесконечно много решений.**

Пример 4. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x \qquad +2z=-1 \\ \qquad y-z=1 \end{cases}$.

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных и вычислим его: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0+1-0-0-2-1 = -2 \neq 0$,

значит, СЛУ имеет единственное решение.
Найдем вспомогательные определители и значения неизвестных.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-2+1 = -2, \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1-2 = 0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Ответ: Система совместная и определенная, единственное решение $X = (x;\ y;\ z) = (1;\ 0; -1)$.

Рассмотрим пример, в котором ***СЛУ имеет бесконечное множество решений***, и они будут найдены с применением формул Крамера.

Пример 5. Решить СЛУ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 \qquad + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

Решение

Вычислим определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Заметим, что третье уравнение системы равно сумме первых двух уравнений, т.е. зависит от первых двух уравнений.

Отбросив третье уравнение, получим равносильную систему двух уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 \qquad + 2x_3 = -1. \end{cases}$

Оставим в левой части системы те неизвестные, коэффициенты при которых образуют определитель, не равный нулю.

Например, коэффициенты при x_1 и x_2 образуют определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

. Поэтому оставим в левой части уравнений слагаемые с x_1 и x_2, а слагаемые с x_3 перенесем в правую часть с противоположным знаком.

Неизвестное x_3 назовем *свободным*, а неизвестные x_1 и x_2 - *базисными неизвестными*.

Запишем систему в виде $\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3, \\ x_1 \qquad = -1 - 2x_3 \end{cases}$ и применим к ней правило Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -x_3 & 1 \\ (-1-2x_3) & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1)\cdot(-1-2x_3) = -1 - 2x_3;$$

;

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1-2x_3}{1} = -1 - 2x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -x_3 \\ 1 & (-1-2x_3) \end{vmatrix} = -1 - 2x_3 - (-x_3) = -1 - x_3;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1-x_3}{1} = -1 - x_3.$$

Выражение

$$\boxed{X = \left((-1-2x_3);\ \ (-1-x_3);\ \ x_3 \mid \ x_3 \in R\right)}$$ -

общее решение неопределенной СЛУ, где x_3 - любое действительное число.

Из общего решения можно получить ***частные решения***, если придать свободной неизвестной какое-то конкретное значение.

Например, пусть $x_3 = 1$, тогда $x_1 = -3$, $x_2 = -2$; тогда частное решение $X = (-3;\ -2;\ 1)$. И так далее.

Контрольные вопросы

1. Запишите общий вид системы 2 линейных уравнений с тремя неизвестными.
2. Что называется решением СЛУ?
3. Что значит «решить систему линейных уравнений»?
4. Какие системы линейных уравнений называются совместными и несовместными?
5. При каком условии система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение?
6. Напишите формулы Крамера для решения системы линейных уравнений. В каком случае они применимы?
7. Как, зная общее решение, записать частное решение неопределенной системы?