Лекция 1.
Понятие матрицы. Действия над матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая и m строк и n столбцов. Числа таблицы называются ***элементами матрицы***.

Обозначается матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Запись a_{ij} означает, что элемент a_{ij} находится на пересечении строки с номером i и столбца с номером j.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется ***матрицей-столбцом***, а состоящая из одной строки – ***матрицей-строкой***.

Запись $A_{m\times n}$ означает, что матрица A имеет m строк и n столбцов, а запись $m\times n$ называется ***размерностью матрицы***. Если при этом m=n, то матрица называется ***квадратной***. Число строк (столбцов) квадратной матрицы называется её ***порядком***. У квадратной матрицы элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют ***главную диагональ***.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется ***диагональной***. Если все элементы главной диагонали диагональной матрицы равны единице, то матрица называется ***единичной*** и обозначается E. Если у квадратной матрицы поменять местами строки и соответствующие столбцы, то полученная матрица будет называться ***транспонированной***.

Действия над матрицами

Умножение матрицы на число, сложение и вычитание матриц называются ***линейными операциями над матрицами***.

При умножении матрицы на число на это число умножается каждый элемент матрицы:

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При сложении и вычитании матриц их размерности должны быть одинаковыми.

Суммой матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрица $C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$.

Обозначается сумма матриц $C = A+B$.

Разностью матриц A и B называется матрица

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначается разность матриц $C = A–B$.

Таким образом, при сложении матриц элементы, стоящие на одинаковых местах в обеих матрицах, складываются, а при вычитании – вычитаются.

Наиболее сложной операцией является умножение матрицы на матрицу. Пусть даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы A равна $m\times n$, а матрицы B – $n\times k$.

Произведением матриц A и B называется такая матрица C, элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B. Обозначается произведение $C=A\cdot B$ (или $C=AB$). Следует иметь в виду, что умножение двух матриц возможно лишь в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Такие матрицы называются ***согласованными*.** Поэтому в общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$. Размерность же матрицы C при умножении матриц A и B будет равна $m\times k$.

Пример 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $2A–3B$.

Решение. $2A-3B=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}--\begin{pmatrix} 6 & -3 & 15 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение. Так как размерность матрицы A равна 2×3, а размерность матрицы B равна 3×2, то в результате умножения матрицы A на матрицу B получится матрица размерности 2×2:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot3+1\cdot2+4\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot(-1)+4\cdot1 \\ 3\cdot3+2\cdot2+5\cdot1 & 3\cdot1+2\cdot(-1)+5\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}.$$

Результатом умножения матрицы B на матрицу A будет матрица размерности 3×3: $B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+1\cdot3 & 3\cdot1+1\cdot2 & 3\cdot4+1\cdot5\\ 2\cdot2+(-1)\cdot3 & 2\cdot1+(-1)\cdot2 & 2\cdot4+(-1)\cdot5\\ 1\cdot2+1\cdot3 & 1\cdot1+1\cdot2 & 1\cdot4+1\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 5 & 17\\ 1 & 0 & 3\\ 5 & 3 & 9\end{pmatrix}$

.

Из этого примера видно, что $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Пример 3. Найти A^2, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

Решение.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4+3 & 2+6-4 & -1-4-3\\ 2+6+6 & 4+9-8 & -2-6-6\\ -3+8-9 & -6+12+12 & 3-8+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4 & -8\\ 14 & 5 & -14\\ -4 & 18 & 4\end{pmatrix}.$$