1. Лекция 4. РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЕ СЛУ

Содержание

1. Произвольные системы линейных уравнений.

Рассмотрим производные системы линейных уравнений, в которых число уравнений и неизвестных может не совпадать.

Система m **уравнений с** n **неизвестными в общем виде** записывается следующим образом:

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1, \\ a_{21}\cdot x_1+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m \end{cases}}$$

где a_{ij} - коэффициенты, b_j - постоянные.

Для системы линейных уравнений матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей системы**, а матрица

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется **расширенной матрицей системы**.

Если все свободные члены равны нулю $b_1=\ldots=b_n=0$, то система называется ***однородной***. Однородная системы всегда имеет нулевое решение

2. Элементарные преобразования над уравнениями системы

В отличие от метода Крамера, метод Гаусса применяется к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Сущность метода Гаусса состоит в **последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований над уравнениями системы**.

К **элементарным преобразованиям над уравнениями** системы относятся:

1. Умножение уравнения на число, не равное нулю.
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения.
3. Перестановка уравнений местами.
4. Отбрасывание одного из одинаковых уравнений.
5. Отбрасывание уравнения вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$.

Элементарные преобразования не изменяют совместности системы. Поэтому они могут существенно упростить процесс нахождения решения системы.

Система линейных уравнений с помощью *элементарных преобразований* приводится к *равносильной системе*, из которой легко находится решение системы или делается вывод о несовместности системы.

3. Последовательность действий метода Гаусса

Первый шаг метода Гаусса - исключение x_1 из всех уравнений, кроме первого.

Предположим, что коэффициент при x_1 в первом уравнении не равен нулю ($a_{11} \neq 0$). Оставляя неизменным первое уравнение (оно будет ведущим), выполним элементарные преобразования так, чтобы коэффициенты при x_1 в других уравнениях обратились в нули:

А) умножим 1-ое уравнение на a_{21}, а 2-е уравнение – на a_{11}, тогда коэффициенты при x_1 в 1-ом и во 2-ом уравнении станут одинаковыми. Затем вычтем из 2-ого уравнения 1-ое и запишем результат вместо 2-го уравнения (в нем x_1 будет отсутствовать);

Б) умножим 1-ое уравнение на a_{31}, а 3-е уравнение – на a_{11}, тогда коэффициенты при x_1 в 1-ом и в 3-ом уравнении станут одинаковыми. Затем вычтем из 3-го уравнения 1-ое уравнение. Запишем результат вместо 3-го уравнения (в нем x_1 будет отсутствовать). И так далее.

Получим:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 & \qquad *a_{21} \quad *a_{31}\\ a_{21}\cdot x_1+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2 & \qquad *a_{11}\\ a_{31}\cdot x_1+\ldots+a_{3n}\cdot x_n=b_3 & \qquad\qquad *a_{31}\end{cases}$$

Получим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}x_2+\ \ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1\\ \qquad a'_{22}\cdot x_2+\ldots+a'_{2n}\cdot x_n=b'_2\\ \qquad a'_{32}\cdot x_2+\ldots+a'_{3n}\cdot x_n=b'_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Второй шаг метода Гаусса - *исключение* x_2 *из уравнений, следующих за вторым уравнением.* Далее повторяем эти же действия для 2-го ведущего уравнения системы. Затем – для 3-его. И так далее.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом исключения неизвестных (Гаусса).

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=-1\\ 4x_1-2x_2-5x_3=9\\ x_1+x_2+3x_3=-2\end{cases}$$

Решение

Шаг 1.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=-1 & \cdot(-4)\\ 4x_1-2x_2-5x_3=9 & +\\ x_1+x_2+3x_3=-2 & -\end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=-1\\ \quad -10x_2-13x_3=13\\ \qquad x_2-\ \ x_3=1\end{cases}$$

Шаг 2.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=-1\\ \quad -10x_2-13x_3=13 & +\\ \qquad x_2-\ \ x_3=1 & *10\end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=-1\\ \quad -10x_2-13x_3=13,\\ \qquad -23x_3=23\end{cases}$$

В процессе элементарных преобразований с каждой неизвестной **СЛУ приведена к треугольному виду**.

Шаг 3. Значения неизвестных находятся поочередно из <u>последнего</u> уравнения, предпоследнего и т.д. до первого уравнения. Указанное действие называется **обратным ходом Гаусса**.

$$x_3=\frac{23}{-23}-1;$$

$$-10x_2-13\cdot(-1)=13; \qquad x_2=0;$$

$$x_1=2\cdot 0+2\cdot(-1)=-1; \qquad x_1=1.$$

Система имеет единственное решение $\boxed{X=(1;\ 0;-1)}$.

Вывод. Если в процессе элементарных преобразований СЛУ приведена к треугольному виду, то такая **СЛУ имеет единственное решение.**

4. Признак бесконечного множества решений СЛУ

Если **СЛУ приведена к трапецеидальному виду** (например,

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + a_{14}\cdot x_4 = b_1, \\ \qquad a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + a_{24}\cdot x_4 = b_2, \\ \qquad\qquad a_{33}\cdot x_3 + a_{34}\cdot x_4 = b_3. \end{cases}$$

то система трапецеидального вида имеет **бесконечное множество решений**.

Для нахождения общего решения нужно:

1. Выбрать *базисные* неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_k$, число которых равно числу уравнений в трапецеидальной системе. Коэффициенты при базисных неизвестных в трапецеидальной системе образуют определитель, не равный нулю. Тогда *свободные* неизвестные – это остальные неизвестные $x_{k+1}, \ldots, x_n$. (Заметим, что базисные неизвестные выбираются не единственным способом.).
2. В трапецеидальной системе *перенести в правую часть уравнений слагаемые со свободными неизвестными*. Тогда в левой части получится выражение треугольного вида.
3. Найти *выражения базисных неизвестных через свободные неизвестные* с помощью обратного хода Гаусса.
4. Записать *общее решение* системы. Если необходимо, из общего решения можно найти частные решения, придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя базисные неизвестные.

Пример 2. Решить систему уравнений методом исключения неизвестных.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу $\overline{A}$, которая состоит из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. Элементарные преобразования, проводимые над уравнениями, соответствуют элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы.

$$\overline{\mathrm{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&1&0\\2&-1&3&2&1\\3&1&2&3&1\\1&-3&4&1&1\\1&1&1&4&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-2)\quad\cdot(-3)\\ +\\ +\\ -\\ -\end{array}$$

$$\overline{\mathrm{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&1&0\\0&-5&5&0&1\\0&-5&5&0&1\\0&5&-5&0&-1\\0&1&-2&-3&-1\end{array}\right)$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&1&0\\0&-5&5&0&1\\0&1&-2&3&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ +\\ \cdot 5\end{array}$$

$$\overline{\mathrm{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&1&0\\0&-5&5&0&1\\0&0&-5&-15&-4\end{array}\right)$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 будут базисными, т.к. определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, не равен нулю: $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-5&5\\0&0&-5\end{vmatrix}=25\neq 0$. Тогда x_4 - свободная неизвестная.

Перенесем слагаемые с x_4 в правую часть уравнений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=-x_4,\\ \quad -5x_2+5x_3=1,\\ \qquad\quad -5x_3=-4+15x_4,\end{cases}$$

Применим обратный ход Гаусса. Выразим из последнего уравнения базисную неизвестную x_3:

$$x_3=-\frac{1}{5}\cdot(-4+15x_4)=\frac{4}{5}-3x_4.$$

Из предпоследнего уравнения найдем базисную неизвестную x_2:

$$x_2=-\frac{1}{5}\cdot(1-5x_3)=-\frac{1}{5}\cdot\left(1-5\left(\frac{4}{5}-3x_4\right)\right)=\frac{3}{5}-3x_4.$$

Из первого уравнения найдем базисную неизвестную x_1:

$$x_1=\frac{4}{5}-3x_4-x_4-\frac{6}{5}+6x_4=-\frac{2}{5}+2x_4.$$

Запишем **общее решение системы**:

$$\boxed{X=(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4)\ =\left(-\frac{2}{5}+2x_4;\ \frac{3}{5}-3x_4;\ \frac{4}{5}-3x_4; x_4\right)},\ \text{где}\ x_4\in R$$

Найдем несколько частных решений, придавая свободной неизвестной x_4 произвольные значения.

Пусть $x_4=0$, тогда $x_1=-\frac{2}{5};\ x_2=\frac{3}{5};\ x_3=\frac{4}{5}$, тогда частное решение $X_1=\left(-\frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{5};\ 0\right)$.

Пусть $x_4=\frac{1}{5}$, тогда $x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=\frac{1}{5}$, тогда частное решение $X_2=\left(0;\ 0;\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{5}\right)$, и т.д.

5. Признак несовместности СЛУ

Признаком **несовместности системы** является:

- появление уравнения вида
$$\boxed{0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b(\neq 0),}$$
- наличие двух уравнений, у которых левые части одинаковые, а правые - нет.

Контрольные вопросы

1. Запишите общий вид системы m линейных уравнений с n неизвестными.
2. Что называется решением СЛУ?
3. Что значит «решить систему линейных уравнений»?
4. Какие системы линейных уравнений называются совместными и несовместными?
5. В чем суть метода исключения неизвестных (метода Гаусса) решения системы линейных уравнений?
6. Какие преобразования в системе линейных уравнений называются элементарными? С какой целью они проводятся?
7. Как решить «треугольную» СЛУ, сколько решений она имеет?
8. Как, зная общее решение, записать частное решение системы?
9. Как определить, что СЛУ несовместна? Приведите пример несовместной СЛУ.

4.2 Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с помощью обратной матрицы (иногда этот способ именуют ещё матричным методом или методом обратной матрицы) требует предварительного ознакомления с таким понятием как матричная форма записи СЛАУ. Метод обратной матрицы предназначен для решения тех систем линейных алгебраических уравнений, у которых определитель матрицы системы отличен от нуля. Естественно, при этом подразумевается, что матрица системы квадратна (понятие определителя существует только для квадратных матриц). Суть метода обратной матрицы можно выразить в трёх пунктах:

1. Записать три матрицы: матрицу системы A, матрицу неизвестных X, матрицу свободных членов B.
2. Найти обратную матрицу A^{-1}.
3. Используя равенство $X = A^{-1} \cdot B$ получить решение заданной СЛАУ.

Пример №1

Решить СЛАУ $\left\{\begin{aligned} & -5x_1 + 7x_2 = 29; \\ & 9x_1 + 8x_2 = -11. \end{aligned}\right.$ с помощью обратной матрицы.

Решение

Запишем матрицу системы A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} 29 \\ -11 \end{pmatrix};\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу к матрице системы, т.е. вычислим A^{-1}. В примере №2 на странице, посвящённой нахождению обратных матриц, обратная матрица была уже найдена. Воспользуемся готовым результатом и запишем A^{-1}:

$$A^{-1} = -\frac{1}{103} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь подставим все три матрицы (X, A^{-1}, B) в равенство $X = A^{-1} \cdot B$. Затем выполним умножение матриц в правой части данного равенства.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{103} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ -11 \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{103} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 29 + (-7) \cdot (-11) \\ -9 \cdot 29 + (-5) \cdot (-11) \end{pmatrix} = -\frac{1}{103} \cdot \begin{pmatrix} 309 \\ -206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы получили равенство $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Из этого равенства имеем: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Пример №2

Решить СЛАУ $\left\{\begin{aligned} & x_1+7x_2+3x_3=-1; \\ & -4x_1+9x_2+4x_3=0; \\ & 3x_2+2x_3=6. \end{aligned}\right.$ методом обратной матрицы.

Решение

Запишем матрицу системы A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X.

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right);\; B=\left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 6 \end{array}\right);\; X=\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right).$$

Теперь настал черёд найти обратную матрицу к матрице системы, т.е. найти A^{-1}. В примере №3 на странице, посвящённой нахождению обратных матриц, обратная матрица была уже найдена. Воспользуемся готовым результатом и запишем A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{26}\cdot\left(\begin{array}{ccc} 6 & -5 & 1 \\ 8 & 2 & -16 \\ -12 & -3 & 37 \end{array}\right).$$

Теперь подставим все три матрицы (X, A^{-1}, B) в равенство $X=A^{-1}\cdot B$, после чего выполним умножение матриц в правой части данного равенства.

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right)=\frac{1}{26}\cdot\left(\begin{array}{ccc} 6 & -5 & 1 \\ 8 & 2 & -16 \\ -12 & -3 & 37 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 6 \end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{26}\cdot\left(\begin{array}{c} 6\cdot(-1)+(-5)\cdot 0+1\cdot 6 \\ 8\cdot(-1)+2\cdot 0+(-16)\cdot 6 \\ -12\cdot(-1)+(-3)\cdot 0+37\cdot 6 \end{array}\right)=\frac{1}{26}\cdot\left(\begin{array}{c} 0 \\ -104 \\ 234 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ -4 \\ 9 \end{array}\right)$$

Итак, мы получили равенство $\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ -4 \\ 9 \end{array}\right)$. Из этого равенства имеем: $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=9$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=9$.