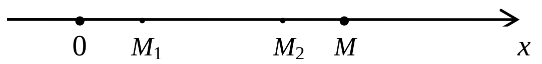
Лекция №5

Координаты на прямой, на плоскости и в пространстве. Деление отрезка в данном отношении

Возьмём произвольную прямую *X* и выберем на ней положительное направление слева направо. Прямую с выбранным на ней направлением назовём осью. На оси возьмём произвольную точку *O* и назовём её началом отсчёта, относительно которого будем определять положение всех точек этой оси. Затем выберем единицу масштаба для измерения длин. Ось с выбранным на ней масштабом называют ***числовой осью,*** или ***числовой прямой***. Числовая прямая представляет простейшую ***декартову систему координат***.



Пусть на числовой прямой отрезок задан точками M_1 и M_2 и указано, что точка M_1 называется началом, а точка M_2 – концом отрезка. Такой отрезок называется ***направленным*** и обозначается $\overline{M_1M_2}$. ***Величиной направленного отрезка*** называется его длина, взятая со знаком «+», если направление отрезка совпадает с направлением оси, и со знаком «–», если эти направления противоположны.

Возьмём на координатной оси точку *M*. Отрезок $\overline{OM}$ является направленным. ***Координатой точки*** *M* называется величина направленного отрезка $\overline{OM}$. Обозначим координату точки *M* через *x*, т. е. *x* = =*OM*. Тогда запись *M*(*x*) означает, что точка *M* имеет координату *x*.

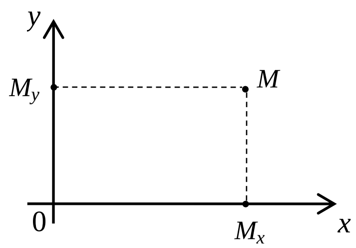
Пусть на координатной оси даны точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$. В этом случае величина направленного отрезка $M_1M_2 = x_2 - x_1$. Расстояние *d* между точками определяется по формуле

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1| .$$

Пример 1. Даны точки $M_1(5)$ и $M_2(-1)$. Величина направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ равна –6, а расстояние между точками M_1 и M_2 равно $|M_1M_2| = |-1-5| = 6$.

Положение точки на прямой определяется одним числом – её координатой.

Положение точки на плоскости определим следующим образом. Возьмём на плоскости две взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в точке *O*, зададим масштаб для измерения длины. Точку *O* назовём ***началом координат***. В результате получим ***декартову прямоугольную систему координат на плоскости***. Одна ось *Ox* называется ***осью абсцисс***, а другая ось *Oy* – ***осью ординат***. Эти оси называются ***координатными осями***.



Возьмём в прямоугольной системе координат произвольную точку *M*. Пусть Mx – проекция точки *M* на ось *Ox*, My – проекция точки *M* на ось *Oy*. Тогда $x = Mx,\ y = My$ называются ***прямоугольными координатами точки*** на плоскости. Запись *M*(*x, y*) означает, что точка *M* имеет координаты *x* и *y*.

Пусть на плоскости в прямоугольной системе координат даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тогда расстояние между этими точками определяется по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Пример 2. Даны точки $M_1(5, 2)$ и $M_2(-3, 8)$. Найти расстояние между ними и расстояние от точки M_1 до начала координат.

Решение. По условию примера $x_1 = 5,\ y_1 = 2,\ x_2 = -3,\ y_2 = 8$. Тогда $|M_1M_2| = \sqrt{(-3-5)^2 + (8-2)^2} = 10$. Расстояние от точки M_1 до начала координат равно $d = \sqrt{(5-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{29}$.

Пример 3. Даны точки *A*(1, 1), *B*(-3, 4), *C*(3, 12). Вычислить периметр треугольника *ABC*.

Решение. Периметр *p* треугольника *ABC* равен сумме длин всех его сторон. Найдём длины сторон треугольника:

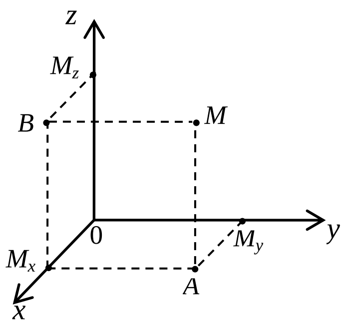
$|AB| = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-1)^2} = 5$,

$|BC|=\sqrt{(3-(-3))^2+(12-4)^2}=10$,

$|AC|=\sqrt{(3-1)^2+(12-1)^2}=5\sqrt{5}$.

Тогда $p=5+10+5\sqrt{5}=5(3+\sqrt{5})$.

Возьмём в пространстве три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке *O*, которую назовём ***началом координат***, и зададим единицу измерения длины (масштаб). Одну ось *Ox* назовём ***осью абсцисс***, вторую *Oy* – ***осью ординат*** и третью ось *Oz* – ***осью аппликат***. Координатные оси, взятые попарно, определяют три взаимно перпендикулярные плоскости *xOy*, *yOz*, *xOz*, которые называются ***координатными плоскостями***.



Пусть *M* – произвольная точка пространства. Спроектируем точку *M* на координатные плоскости *xOy* и *xOz* (точки *A* и *B*). Проекцией точки *A* на ось *Ox* является точка M_x, а на ось *Oy* – точка M_y. Проекцией точки В на ось *Oz* является точка M_z. Таким образом, точки M_x, M_y и M_z являются проекциями точки *M* на координатные оси. Величины OM_x, OM_y и OM_z ***называются координатами точки M***. Первая координата $x=OM_x$ называется ***абсциссой***, вторая $y=OM_y$ – ***ординатой*** и третья $z=OM_z$ – ***аппликатой***. Запись *M*(*x*,*y*,*z*) означает, что точка *M* имеет координаты *x*, *y*, *z*.

Если в пространстве известны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние между ними определяется по формуле

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Пусть через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ проходит некоторая ось. Пусть известно, что точка *C*(*x*, *y*, *z*) делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ на два направленных отрезка $\overline{M_1C}$ и $\overline{CM_2}$ в отношении λ. Это означает, что $\overline{M_1C} = \lambda \cdot \overline{CM_2}$, т. е. $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$. Отсюда находим координаты точки C:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$