Лекция № 9.

Векторное произведение двух векторов и основные свойства. Смешанное произведение векторов и свойства

Векторное произведение двух векторов $\vec{a}\times\vec{b}$

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом

1) Модуль вектора $|\vec{c}|$ равен площади параллелограмма.

$|\vec{c}| = |\vec{a}|\times|\vec{b}| \sin\varphi$

2) Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3) Направление вектора $\vec{c}$ такое, чтобы с его конца видеть поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ против часовой стрелки.

Если один из векторов или угол φ будет равным нулю, то и векторное произведение также равно нулю.

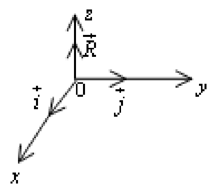
Свойства векторного произведения

а) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$, т.е. векторное произведение не обладает переместительным (коммутативным) законом

б) $(m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(m\vec{b}) = m(\vec{a}\times\vec{b})$, т.е. соблюдается сочетательный (ассоциативный) закон.

в) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$ соблюдается распределительный (дистрибутивный) закон.

Найдем теперь произведения координатных ортов



$\vec{i},\vec{j},\vec{k};\quad \vec{i}\times\vec{j} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{R}\times\vec{R} = 0$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{R};\ -(\vec{j}\times\vec{i}) = \vec{k};\ \vec{j}\times\vec{k} = -(\vec{k}\times\vec{j}) = \vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i} = -(\vec{i}\times\vec{k}) = \vec{j}$.

Теперь найдем $\vec{a}\times\vec{b}$, если они выражены через проекции

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};\quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec a\times\vec b+=(a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k)(b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k)=\cancel{a_xb_x(\vec i\times\vec i)}+a_xb_z(\vec i\times\vec j)+a_xb_z(\vec i\times\vec k)+a_yb_x(\vec j\times\vec i)+$$

$$+\cancel{a_yb_y(\vec j\times\vec j)}+a_yb_z(\vec j\times\vec k)+a_zb_x(\vec k\times\vec i)+a_zb_y(\vec k\times\vec j)+\cancel{a_z\cdot b_z(\vec k\times\vec k)}=$$

$$=a_xb_y\cdot\vec k+a_xb_z(-\vec j)+a_yb_x(-\vec k)+a_yb_z\cdot\vec i+a_zb_x\cdot\vec j+a_zb_y\cdot(-\vec i)=$$

$$=\vec i(a_yb_z-a_zb_y)+\vec j(a_zb_x-a_xb_z)+\vec k(a_xb_y-a_yb_x)$$

Это можно представить в виде $\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$ $\vec b=\vec i+2\vec j+\vec k$. Например, найти $(\vec a\times\vec b)$, если $\vec a=2\vec i+3\vec j+5\vec k$

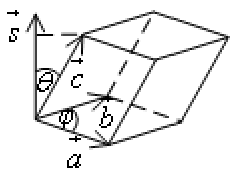
$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec j\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=\vec i(3-10)+\vec j(2-5)+\vec k(4-3)\quad \vec a\times\vec b=-7\vec i-3\vec j+\vec k$$

Векторно-скалярное (смешанное) произведение

Смешанным произведением векторов $\vec a,\vec b$ è ñ называется произведение вектора, полученного при $(\vec a\times\vec b)$ умножено скалярно на вектор $\vec c$, т.е. $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$.

Если мы перемножим $\vec a\times\vec b$, то получим новый вектор, численно равный площади параллелограмма $|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot sin\varphi$. Пусть это будет вектор $\vec s$.

Тогда $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=(\vec s\cdot\vec c)=|\vec s|\cdot|\vec c|cos\theta$. Так как $|\vec c|cos\theta=h$, то $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=|\vec s|\cdot h$. Это смешанное произведение численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.



Свойства смешанного произведения трех векторов

1). Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:

а) хотя бы один из перемноженных векторов = 0

б) два из перемноженных векторов коллинеарны (т.е. одно из трех измерений параллелепипеда равно 0).

в) три ненулевых вектора компланарны.

2). Смешанное произведение не изменится, если в нем поменять местами знаки векторного $(\times)$ и скалярного $(\cdot)$ умножения, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

§ 1. <u>Вычисление объема параллелепипеда</u>

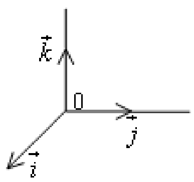
В силу этого свойства смешанное произведение векторов условились записывать в виде $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

3). Смешанное произведение не изменится , если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

4). При перестановке двух любых векторов смешанное произведение меняет только знак

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}=-\vec{b},\vec{a},\vec{c};\quad \vec{c},\vec{a},\vec{b}=-\vec{a},\vec{c},\vec{b};\quad \vec{b},\vec{c},\vec{a}=-\vec{b},\vec{a},\vec{c}$.

Таким образом, объем параллелепипеда $V=\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Но он может быть не только положителен, но и отрицателен, это зависит, образуют ли три вектора $\vec{a},\vec{b}$ è $\vec{c}$ систему, одноименную с основой или нет. Основная



Поэтому записывают

$V=\left|\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right|$.

Пусть заданы векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ через их проекции:

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};\ \vec{b}=b_x\vec{c}+b_y\vec{j}+b_z\cdot\vec{k};\ c=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$.

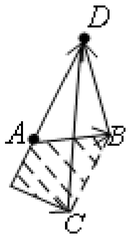
Тогда смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ или $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ можно записать в виде определителя

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Например:

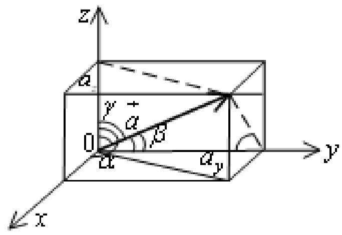
Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k};\ \vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k};\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k};$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&3&-1\\1&1&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-1\\1&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=2(12+1)+1(4=1)-1(1-3)=26+5+2=33$$



Если задана треугольная пирамида тремя векторами-ребрами $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ è $\overrightarrow{AD}$, то ее объем $V_{\text{ïèð}}=\frac{1}{6}V_{\text{ïàðàëë.}}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD})\right|$.

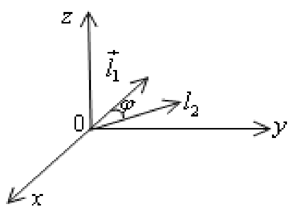
§ 3. <u>Направляющие косинусы</u>



Пусть мы имеем в пространстве вектор $\vec{a}$, который образует с осями x, y и z соответственно углы α,β è γ. Возьмем проекцию вектора $\vec{a}$ на ось z; $\frac{a_z}{|\vec{a}|}=cos\,\gamma$.

Аналогично $\frac{a_y}{|\vec{a}|}=cos\,\beta$ и $\frac{a_x}{|\vec{a}|}=cos\,\alpha$;

или $cos\,\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ $cos\,\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ è $cos\,\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$. При этом $cos\,\alpha,cos\,\beta$ è $cos\,\gamma$ называются *<u>направляющими косинусами</u>*. Можно легко показать, что $cos^2\,\alpha=\frac{a_x^2}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$; $cos^2\,\beta=\frac{a_y^2}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ è



$cos^2\,\gamma=\frac{a_z^2}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$; èëè $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1$ т.е. сумма квадратов направляющих косинусов вектора всегда равна 1. Если же мы имеем два вектора, которые образуют с координатными осями соответственно углы $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ è $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$, то можно доказать, что угол φ между ними можно найти из равенства $cos\,\varphi=cos\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2+cos\,\beta_1\,cos\,\beta_2+cos\,\gamma_1\cdot cos\,\gamma_2$.