Лекция №2. Определители и их свойства

План урока

1. Определители и их свойства

2. Алгоритм нахождения обратной матрицы

Определение: Пусть дана квадратная матрица второго порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. ***Определителем данной матрицы, или просто определителем второго порядка,*** называется число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Обозначается определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, т. е. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем квадратной матрицы третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, обозначаемое символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и равное

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Если из определителя третьего порядка вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ij}, то оставшиеся элементы образуют определитель второго порядка, который называется ***минором определителя третьего порядка*** к элементу a_{ij}. Обозначается минор M_{ij}.

Например, элементу a_{12} соответствует минор $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Минор к элементу a_{ij}, взятый со знаком «+», если сумма i+j номеров строк и столбца чётная, или со знаком «–», если сумма i+j нечётная, называется ***алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} и обозначается $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 1. Найти алгебраическое дополнение числа 3 в определителе $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Так как число 3 находится на пересечении второй строки и первого столбца, то вычёркиваем эти строку и столбец и получаем минор, соответствующий числу 3: $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2$. Алгебраическое дополнение этого элемента $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка ***n***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема Лапласа. *Определитель матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (любого столбца) матрицы на их алгебраические дополнения.*

Например, для первой строки $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$. Такая запись называется ***разложением определителя по элементам первой строки***.

Основные свойства определителя:

1) если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю;

2) при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный;

3) определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю;

4) общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя;

5) определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число;

6) при транспонировании определителя, т. е. при замене его строк, столбцами с теми же номерами, величина определителя не меняется.

Пример 2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Все элементы первой строки, кроме первого, обратим в нули. Для этого:

1) ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на -2;

2) к третьему столбцу прибавим первый, умноженный на 3;

3) к четвёртому столбцу прибавим первый, умноженный на -3.

В результате получим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 9 & -4 \\ -1 & 6 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 8 & -7 \end{vmatrix}$. Разложим этот определитель по элементам первой строки:

$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 9 & -4 \\ 6 & -2 & 7 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 9 & -4 \\ 6 & -2 & 7 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix}$. К первой строке прибавим третью, умноженную на -3, а ко второй прибавим третью, умноженную на 6. В результате получим определитель, который разложим по элементам первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -15 & 17 \\ 0 & 46 & -35 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -15 & 17 \\ 46 & -35 \end{vmatrix} = -(-15 \cdot (-35) - 17 \cdot 46) = 257.$$

Пример 3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ 248 & 256 & 254 \\ 167 & 169 & 170 \end{vmatrix}$.

Решение. Ко второй строке определителя прибавим первую, умноженную на -3, а к третьей прибавим первую, умноженную на -2.

Тогда $\Delta = \begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ {ко второй строке прибавим третью} $= \begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

{разложим определитель по элементам второй строки}=

$= 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 83 & 85 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4(-83-85) = 672$.

2.2. Обратная матрица. Теорема о существовании левой и правой обратной матрицы. Алгоритм нахождения обратной матрицы

О Квадратная матрица A n–го порядка называется **вырожденной**, если определитель этой матрицы равен нулю, $|A| = 0$, и **невырожденной**, если $|A| \neq 0$.

О Матрица A^{-1} называется **обратной матрицей** для некоторой квадратной матрицы A, если выполняется соотношение: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$.

Т **Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.**

Если матрица A не вырождена, то существует, и притом единственная, обратная матрица A^{-1}, равная $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(A^{\vee})^{T}$, где $A^{\vee} = \left(A_{ij}\right)$ - присоединенная матрица (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы).

Доказательство:

Пусть дана квадратная матрица порядка n:

$$A = (a_{ij})_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Доказательство существования (необходимость). Пусть существует A^{-1}. По определению $A^{-1}A = E$. По свойству 15° операции умножения матриц $\det(A^{-1}A) = \det E$, $\det A^{-1} \cdot \det A = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$, то есть матрица A не вырождена.

2. Доказательство существования (достаточность). Пусть матрица A не вырождена. Найдем вид элементов A^{-1}, для чего вычислим произведение

$$C = A\cdot(A^{\vee})^{T} = \left(a_{ij}\right)\cdot\left(A_{ij}\right)^{T},$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(A^{T})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

по теореме о разложении определителя по строке (столбцу),

откуда $C = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det A\cdot E$,

т.е. $A\cdot(A^{\vee})^{T} = \det A\cdot E$.

Так как $\det A \neq 0$, $A\cdot\dfrac{(A^{\vee})^{T}}{\det A} = E$ и $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(A^{\vee})^{T}$.

Свойства обратной матрицы

$\boxed{!}$ 1°. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

2°. $\left(\alpha\cdot A\right)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\cdot A^{-1}$.

3°. $\left(A\times B\right)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$.

4°. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Находим $\det A$, проверяем $\det A \neq 0$.
2. Находим M_{ij} - все миноры матрицы A.
3. Определяем $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.
4. Строим матрицу алгебраических дополнений $A^{\vee} = \left(A_{ij}\right)$ и транспонируем: $(A^{\vee})^{T} = \left(A_{ji}\right)$.
5. Делим каждый элемент матрицы на $\det A$: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(A^{\vee})^{T}$.

Пример:

Найти матрицу, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$.

2. $M_{11} = 4, M_{12} = 3, M_{21} = 2, M_{22} = 1$.

3. $A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{21} = -2, A_{22} = 1$.

4. $A^{\vee} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^{\vee})^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -0,5 \end{pmatrix}$.

Проверка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.