Лекция №6. Линии и их уравнения

п 1. Понятие уравнения линии

В элементарной геометрии достаточно исследуются лишь немногие линии: прямая, окружность, ломанная. Между тем потребности техники ставят перед математикой общую задачу исследования многочисленных линий, многообразных по своей форме и характеру своих свойств. Для решения этой задачи, требуется более совершенные методы. Такие методы дают алгебры и математический анализ. В основе применения методов алгебры и анализа лежит общий способ задания линии при помощи ее уравнения.

В аналитической геометрии всякую линию можно рассматривать как геометрическое место точек как геометрического места точек. В определении линии, как геометрического места точек содержится свойство общее всем ее точкам.

Возьмем на плоскости какую-нибудь линию и рассмотрим произвольную точку указанной линии. Если точка будет перемещаться по данной линии, то ее координаты х и у будут меняться, оставаясь, однако связанным некоторым условием, характеризующим точки данной линии. Таким образом, мы получим некоторое соотношение между Х и У, которое выполняется только при движении точки по линии и нарушается, если точка сойдет с линии.

Следовательно, линии на плоскости соответствует некоторое уравнение с двумя переменными Х и У.

Определение. Уравнением данной линии называется такое уравнение F (x, y) = 0 с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты х и у каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координатам никакой точки, не лежащей на ней.

Определение. Линия, определенная уравнением вида y = f (x) называется графиком функции y = f (x).

Поскольку величины Х и У рассматриваются как координаты переменной точки, их называют текущими координатами.

п 2. Примеры заданий линий при помощи уравнений

Уравнение y = f (x) между координатами х и у определяют линию как геометрическое место тех точек

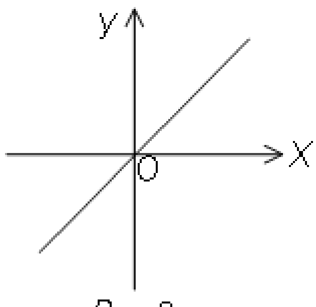

Рис.8

плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

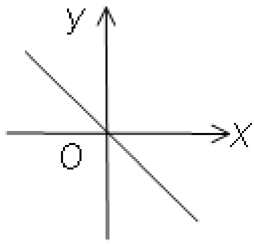

Рис.9

Примеры

1) $x - y = 0$; $y = x \Rightarrow$ Геометрическое место точек, для которых абсцисса равна ординате, представляет собой биссектрису I и III координатных углов (рис. 8).

2) $y + x = 0$ $\quad y = -x$

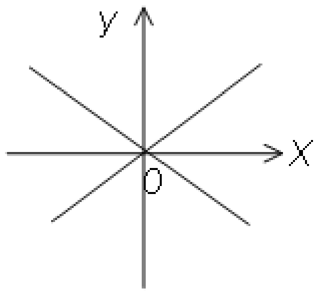

Рис. 10

Геометрическое место точек представляет биссектрису II и IV координатных углов (рис. 9).

Если левая часть уравнения F (x, y) = 0 раскладывается на множители, то приравнивая к нулю каждый множитель отдельно, получим несколько уравнений

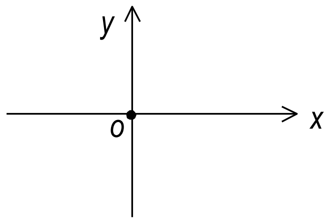

Рис.11

3) $x^2 - y^2 = 0$ $\quad (x - y)(x + y) = 0$

$x + y = 0$ $\quad x - y = 0$

Уравнение, определяет пару прямых (биссектрисы координатных углов) (рис. 10)

4) $x^2 + y^2 = 0$ представляет собой одну точку (начало координат) (рис. 11)

5) $x^2 + y^2 + 2 = 0$; $x^2 + y^2 = -2$ не определяет никакого геометрического места точек.

п 3. Получение линии как геометрического места точек

Дана линия как геометрическое место точек. Требуется составить уравнение этой линии.

Если линия определена как геометрическое место точек, подчиненных известному условию, то, выражая эти условия при помощи координат, мы получим некоторую зависимость между координатами. Это и будет уравнением этой линии.

Чтобы составить уравнение линии как геометрического места точек, обладающих заданным свойством нужно:

1) взять произвольную (текущую точку M (x, y) линии

2) записать равенством общее свойство всех точек линии

3) входящие в равенство отрезки выразить через текущие координаты точки M

(x, y) и через данные задачи4) упростить полученное уравнение и определить вид кривой.

Пример: вывести уравнение траектории точки М, которое в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке А (2, 0) чем к точке В (8, 0) (рис. 12)

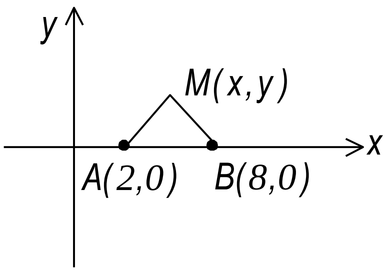

Рис. 12

Решение:

$$2\left|AM\right| = BM \quad \left|AM\right| = \sqrt{\left(x-2\right)^2 + y^2}$$

$$\left|BM\right| = \sqrt{\left(x-2\right)^2 + y^2}$$

$$2\sqrt{\left(x-2\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x-8\right)^2 + y^2}$$

$$4\left(x^2 - 4x + 64 + y^2\right) = x^2 + 16x + 4 + y^2$$

$$4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = x^{21} - 16x + 64 + y^2; 3x^2 + 3y^2 = 48$$

$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow$ - уравнение окружности

п 4. Параметрические уравнения линий

В некоторых случаях при составлении уравнения линий текущие координаты не связаны одним уравнением, а каждую координату в отдельности выражают в виде функции нового переменного, например t и получают уравнения вида:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Условные величины Х и У для каждого значения t рассматривать как координаты некоторой точки М. При изменении t величины Х и У меняются, следовательно точка М перемещается по плоскости.

Равенства (1) называются параметрическими уравнениями траектории точки М; аргумент t называется переменным параметром.

Параметрические уравнения играют важную роль в механики, где они используются в качестве уравнений движения. Параметр t играет в этом случае роль времени.

Если из уравнений (1) исключить параметр t, то получим уравнение между Х и

У вида F (x, y) = 0

Пример $\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}$ исключить параметр t

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2\cos^2 t \qquad & x^2 + y^2 &= r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \\ y^2 &= r^2\sin^2 t \qquad & x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Получим уравнение окружности с центром в начале координат.

п 5. Алгебраические линии

Определение. Уравнение F (x, y) называется алгебраическим, если выражение F (x, y) есть сумма конечного числа слагаемых вида $Ax^k y^m$***, где k и m - целые неотрицательные числа. A – действительное число.***

При этом наибольшая из степеней k + m называется степенью уравнения

x + y – 5 - уравнение 1-й степени;

xy + 7 - x + 4y - уравнение 2-й степени

$x^3y^4 - y^2x + 3 = 0$ - уравнение 7-й степени

Общий вид уравнения 1-й степени Ax + By + C = 0

Общий вид уравнения 2-й степени

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Fy + F = 0$

У нас линии 1-го и 2-го порядка

Прямая на плоскости

п 1. Угловой коэффициент

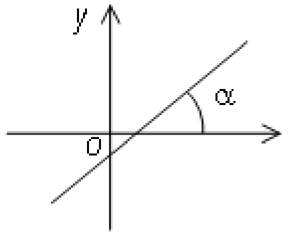

Рис. 13

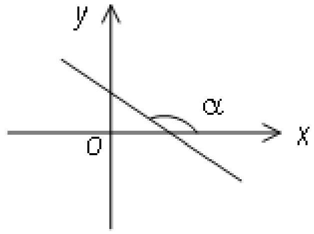

Рис. 14

α – угол наклона прямой к положительному направлению оси ox.

Определение. Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси ox называется угловым коэффициентом этой

прямой.

$k = tg\alpha$

$k = tg\alpha = \dfrac{M_2C}{M_1C}$ или $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow$ эта формула выражает угловой коэффициент прямой по двум ее точкам.

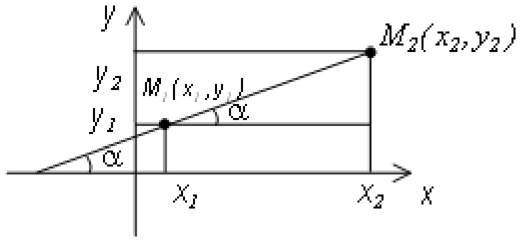

Рис. 15

п 2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть дана некоторая прямая. Выведем уравнения данной прямой, полагая известным ее угловой коэффициент k и величину b – направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$, который она отсекает на оси y (рис. 15).

Выберем текущую точку прямой M (x,y) (рис. 16) и точку B (o; b)

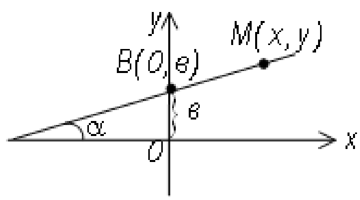

Рис. 16

$k = \dfrac{y - b}{x - 0}$ отсюда y = kx + b $\Rightarrow$ **уравнение прямой с угловым коэффициентом**

п 3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1 (x_1; y_1) и заданным угловым коэффициентом

Возьмем на прямой произвольную точку M (x, y)

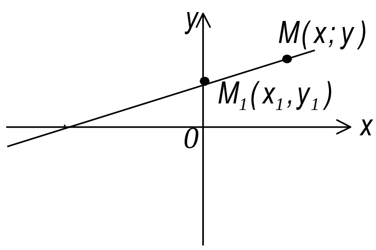

Рис. 17

Тогда $k = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ или **$y - y_1 = k(x - x_1)$**

п 4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки прямой M_1 и M_2 (рис. 18).

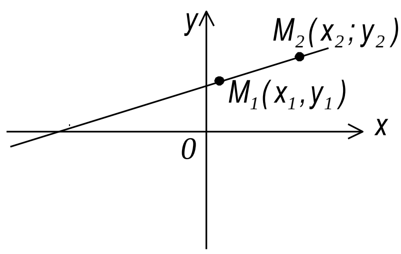

Рис. 18

Тогда $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Подставим k в предыдущее равенство

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right) \text{ или } \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,-4)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(3,\,2)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)==0.$ Так как по условию примера $x_0=2$, $y_0=-4$, $A=3$, $B=2$, то $3(x-2)+2(y+4)=0,$ или $3x+2y+2=0$.

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,\,3)$ под углом 135° к оси Ox.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом, имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$. По условию примера $x_0=-2, y_0=3$. Так как $k=\operatorname{tg}\alpha$, а $\alpha=135^{\circ}$, то угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}135^{\circ}=-1$. Подставим в уравнение прямой: $y-3=-1\cdot(x+2),$ или $y-3=-x-2$. Искомым уравнением прямой является $x+y-1=0$.

Пример 3. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2,-3)$ и $M_2(1,-5)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, имеет вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Так как по условию примера $x_1=2,$ $y_1=3$, $x_2=1$, $y_2=-5$, то $\dfrac{x-2}{1-2}=\dfrac{y+3}{-5+3}$, $-2x+y+7=0$.

Пример 4. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями
$y = 3x-4$ и $y = 2x+1$.

Решение. Угол между двумя прямыми определяется по формуле $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. По условию $k_1=2$ и $k_2=3$. Подставим в формулу:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3-2}{1+2\cdot3}=\frac{1}{7},\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}.$$

Пример 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,\ 5)$ параллельно прямой $2x+3y-5=0$.

Решение. Так как искомая прямая должна быть параллельна данной, то по условию параллельности прямых их угловые коэффициенты должны быть равными, т. е. $k_1=k_2$. Найдём угловой коэффициент k_1 данной прямой: $3y=-2x+5$, $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}$, т. е. $k_1=-\dfrac{2}{3}$. Тогда и $k_2=-\dfrac{2}{3}$. Подставим в уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом: $y-5=-\dfrac{2}{3}(x+2)$, $3(y-5)=-2(x+2)$, $2x+3y-11=0$.

Пример 6. Прямая задана уравнением $3x-4y+3=0$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1,\,4)$ перпендикулярно данной прямой.

Решение. Так как искомая и данная прямые по условию перпендикулярны, то их угловые коэффициенты должны удовлетворять условию перпендикулярности $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Найдём угловой коэффициент k_1 данной прямой: $3x - 4y + 5 = 0$, $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, $k_1 = \frac{3}{4}$. Следовательно, $k_2 = -\frac{4}{3}$. Подставим в уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом: $y - 4 = \frac{4}{3}(x+1)$,

$4x + 3y - 8 = 0$. Последнее уравнение является уравнением искомой прямой.

Пример 7. Уравнение $3x - 4y - 24 = 0$ записать в виде уравнения прямой в отрезках.

Решение. Запишем уравнение в виде $3x - 4y = 24$ и разделим обе части на 24: $\frac{3x}{24} - \frac{4y}{24} = \frac{24}{24}$, или $\frac{x}{8} + \frac{y}{-6} = 1$.