Mavzu: Ratsional kasrlarni eng sodda kasrlarga ajratish. Noma'lum koeffitsientlar usuli.

Har qanday to'g'ri ratsional kasrni eng soda kasrlar yig'indisiga ajratish mukinligini ko'rsatamiz.

Ushbu to'g'ri ratsional kasr

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

berilgan bo'lsin.

Bu kasrga kirgan ko'phadlarning koeffitsientlari haqiqiy sonlar va berilgan kasr qisqarmaydigan kasr deb faraz qilamiz(bu esa surat va maxraj umumiy ildizga ega emas degan so'zdir).

1 – teorema. *$x=a$ maxrajning k karrali ildizi, ya'ni $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$ bo'lsin, bu yerda $f_1(a) \neq 0$, u holda $\frac{F(x)}{f(x)}$ to'g'ri kasrni boshqa ikki to'g'ri kasr yig'indisi shaklida quyidagicha tasvirlash mumkin:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \qquad (1)$$

bu yerda A nolga teng bo'lmagan o'zgarmas son, $F_1(x)$ ko'phad, buning darajasi $(x-a)^{k-1}f_1(x)$ maxrajning darajasidan past.

Isbot. Ushbu ayniyatni yozamiz:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \qquad (2)$$

(bu ayniyat har qanday A uchun to'g'ri) va o'zgarmas A uchun shunday qiymat topamizki, $F(x)$-$Af_1(x)$ ko'phad $x-a$ ga bo'linsin. Buning uchun Bezu teoremasiga ko'ra

$$F(a) - Af_1(a) = 0$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli. $f_1(a) \neq 0, F(a) \neq 0$ bo'lgani uchun A soni

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}$$

tenglikdan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. A ning shunday qiymati uchun

$$F(x) - Af_1(x) = (x - a)F_1(x)$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $F_1(x)$ ko'phad, buning darajasi $(x–a)^{k-1}f_1(x)$ ko'phadning darajasidan past. (2) kasrni $(x–a)$ ga qisqartirib, (1) formulani hosil qilamiz.

Natija. (1) tenglikdagi

$$\frac{F(x)}{(x-a)^k f_1(x)}$$

to'g'ri kasrga yuqoridagidek muhokamani qo'llash mumkin. Shunday qilib, maxraj k karrali $x=a$ ildizga ega bo'lsa, ushbu tenglikni yozish mumkin:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

bu yerda $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ qisqarmaydigan to'g'ri kasr. Agar $f_1(x)$ boshqa haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, ohirgi kasrga ham hozirgina isbot qilingan teoremani qo'llash mumkin.

Endi maxraj kompleks ildizlarga ega bo'lgan holni qaraymiz. Haqiqiy koeffitsientlarga ega bo'lgan ko'phadning ildizlari ikkitadan o'zaro qo'shma bo'lishini eslatib o'tamiz. Ko'phadni haqiqiy ko'paytuvchilarga ajratganda har ikki qo'shma kompleks ildizga $x^2 + px + q$ ko'rinishdagi ifoda mos keladi. Agar kompleks ildizlar μ karrali bo'lsa, ularga $(x^2 + px + q)^\mu$ ifoda mos keladi.

2 – teorema. *Agar* $f(x) = (x^2 + px + q)^{\mu}\varphi_1(x)$ *bo'lsa (bu yerda* $\varphi_1(x)$ *ko'phad* $x^2 + px + q$ *ga bo'linmaydi),* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *to'g'ri ratsional kasrni boshqa ikki to'g'ri kasrning yig'indisi ko'rinishida quyidagicha tasvirlash mumkin:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)}$$

bu yerda $\Phi_1(x)$ *– ko'phad, buning darajasi maxrajidagi* $(x^2 + px + q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$ *ko'phadning darajasidan past.*

Isbot. Ushbu ayniyatni yozamiz:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{f(x)}{(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_{1(x)}}{(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)} \qquad (4)$$

bu ayniyat har qanday M va N uchun to'g'ri; M va N ning shunday qiymatini topamizki, unda $F(x) - (Mx + N)\varphi_{1(x)}$ ko'phad x^2+px+q ga bo'linsin. Buning uchun

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_{1(x)} = 0$$

x^2+px+q ning $\alpha \pm i\beta$ ildizlariga teng ildizlarga ega bo'lishi zarur va yetarlidir. Demak,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

yoki

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$$

lekin $\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ aniq bir kompleks son, buni K+iL ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda K va L haqiqiy sonlar. Shunday qilib,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL,$$

bundan

$$M\alpha + N = K, \quad M\beta = L$$

yoki

$$M = \frac{L}{\beta}, \quad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

M va N ning shu qiymatlarida $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ ko'phad $\alpha + i\beta$ ildizga, demak, $\alpha - i\beta$ qo'shma ildizga ham ega bo'ladi. Bu holda ko'phad $x - (\alpha + i\beta)$ va $x - (\alpha - i\beta)$ ayirmalarga, demak, ularning ko'paytmasiga, ya'ni x^2+px+q ga qoldiqsiz bo'linadi. Bo'linmani $\Phi_1(x)$ bilan belgilab, quyidagicha yoza olamiz:

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = (x^2 + px + q)\Phi_1(x).$$

(4) tenglikdagi ohirgi kasrni x^2+px+q ga qisqartirib, (3) tenglikni hosil qilamiz, bunda $\Phi_1(x)$ ning darajasi maxrajning darajasidan past ekani ravshan.

Shuni isbot qilish talab qilingan edi.

Endi $\frac{F(x)}{f(x)}$ to'g'ri kasrga 1- va 2- teoremalarining natijalarini qo'llab, $f(x)$ maxrajning hamma ildizlariga mos eng sodda kasrlarni ketma-ket ajratish mumkin. Shunday qilib yuqoridagi aytilganlardan ushbu natija chiqadi:

Agar

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x^2+px+q)^{\mu} \ldots (x^2+lx+s)^{\nu}$$

bo'lsa, $\frac{F(x)}{f(x)}$ *kasr quyidagi ko'rinishda tasvirlanishi mumkin:*

$$
(5)\begin{cases}
\dfrac{F(x)}{f(x)} = \dfrac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \dfrac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \dfrac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ \dfrac{B}{(x-b)^{\beta}} + \dfrac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \dfrac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\
+ \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \dfrac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \dots + \dfrac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ \dfrac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}} + \dfrac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \dots + \dfrac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.
\end{cases}
$$

$A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ koeffistsientlarni quyidagi mulohazalardan aniqlash mumkin. Yozilgan tenglik ayniyatdan iborat, shuning uchun kasrlarni umumiy maxrajga keltirib, ikki tomondagi suratlarda aynan bir xil ko'phadlar hosil qilamiz. Bir xil darajadagi x larning koeffitsientlarini tenglashtirib, noma'lum $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ koeffitsientlarni aniqlash uchun tenglamalar sistemasi hosil qilamiz.

Shu bilan bir qatorda koeffitsientlarni topishda ushbu izohdan fordalanish mumkin: kasrlarni umumiy maxrajlarga keltirgandan so'ng tenglikning o'ng va chap qismlarida hosil bo'lgan ko'phadlar aynan teng bo'lishi kerak, shunga ko'ra ular x ning har qanday xususiy qiymatlarida ham tengdir. x ga xususiy qiymatlar berib, koeffitsientlarni aniqlash uchun tenglamalar hosil qilamiz.

Shunday qilib, har qanday to'g'ri ratsional kasrni eng sodda kasrlarning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin ekanligini ko'rdik.

Misol. Ushbu $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ kasr eng sodda kasrlarga ajratilsin. (5) formulaga asosan kasrni ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Umumiy maxrajga keltirib va suratlarni tenglashtirib, ushbuni hosil qilamiz:

$$x^2 + 2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^3, \quad (6)$$

yoki

$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+(-2A-2A_1-2A_2+B)$

.

x^3, x^2, x^1, x^0(ozod had) yonidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, noma’lum koeffitsientlarni aniqlash uchun ushbu tenglamalar sistemasini topamiz:

$$\begin{gathered}0=A_2+B,\\ 1=A_1+3B,\\ 0=A-A_1-3A_2+3B,\\ 2=-2A-2A_1-2A_2+B\end{gathered}$$

Bu sistemani yechib, quyidagilarni topamiz:

$$A=-1,\ \ A_1=\frac{1}{3},\ \ A_2=-\frac{2}{9},\ \ B=\frac{2}{9}.$$

Koeffitsientlardan ba’zilarini *x* ga nisbatan ayniyatdan iborat bo’lgan (6) tenglikda *x* ga xususiy qiymatlar berishdan hosil bo’lgan tenglamalardan topish ham mumkin.

Chunonchi, $x=-1$ faraz qilib, $3=-3A$ yoki $A=-1$ hosil qilamiz; $x=2$ faraz qilib, $6=27B$ yoki $B=\frac{2}{9}$ ni hosil qilamiz. Agar bu ikki tenglamaga bir xil darajali *x* lar yonidagi koeffitsientlarni tenglashdan hosil bo’ladigan yana ikkita tenglamani birlkashtirsak, to’rtta noma’lum koeffitsientni topish uchun to’rtta tenglama hosil qilamiz. Natijada ushbu ajralmaga ega bo’lamiz:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

Ratsional kasrlarni integrallash. $\frac{Q(x)}{f(x)}$ ratsional kasrning integralini, ya’ni

$$\int\frac{Q(x)}{f(x)}dx$$

integralni hisoblash talab etilsin.

Agar berilgan kasr noto’g’ri kasr bo’lsa, uni *M(x)* ko’phad bilan $\frac{F(x)}{f(x)}$ to’g’ri ratsional kasr yig’indisi shaklida ifodalashimiz mumkin. To’g’ri kasrni esa (5) formulaga asosan eng sodda kasrlar yig’indisi ko’rinishida ifodalaymiz. Shunday qilib, har qanday ratsional kasrni integrallash ko’phadni va bir nechta eng sodda kasrlarni integrallashga keltiriladi.

Yuqoridagi natijalardan eng sodda kasrlarning ko’rinishi funksiya maxrajining ildizlari bilan aniqlanishi kelib chiqadi. Bunda quyidagi hollar bo’lishi mumkin.

I h o l. Maxrajning ildizlari haqiqiy va har xil, ya’ni

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-d).$$

Bu holda $\frac{F(x)}{f(x)}$ kasr I tipdagi eng sodda kasrlarga ajratadi:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{D}{x-d}.$$

va bu tenglikning ikkala tomonini integrallasak:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \cdots + \int \frac{D}{x-d} dx = A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \cdots + D\ln|x-d| + C$$

.

II h o l. Maxrajning ildizlari haqiqiy va ulardan ba’zilari karrali:

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x-d)^{\delta}.$$

Bu holda $\frac{F(x)}{f(x)}$ kasr I va II tipdagi eng sodda kasrlarga ajraladi.

1 – misol.

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}ln|x+1| + \frac{2}{9}ln|x-2| + C = -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9}ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$$

.

III h o l. Maxrajning ildizlari orasida takrorlanmaydigan (ya’ni turlicha) kompleks ildizlar bor:

$$f(x) = (x^2+px+q)\dots(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}\dots(x-d)^{\delta}.$$

Bu holda $\frac{F(x)}{f(x)}$ kasr I, II, III tipdagi soddaroq kasrlarga ajraladi.

2 – misol. Ushbu integral hisoblansin:

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

integral ostidagi kasrni soddaroq kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Demak,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

$x=1$ deb faraz qilsak: $1 = 2C, \ \ C = \frac{1}{2},$

$x=0$ deb faraz qilsak: $0 = -B + C, \ \ B = \frac{1}{2}.$

x^2 oldidagi koeffitsientlarni tenglab, $0=A+C$ tenglikni hosib qilamiz, bunda $A = -\frac{1}{2}$. Shunday qilib,

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4}ln|x^2+1| + \frac{1}{2}arctgx + \frac{1}{2}ln|x-1| + C$$

.

IV h o l. maxrajning ildizlari orasida, karrali kompleks ildizlar bor:

$$f(x) = (x^2+px+q)^{\mu} \dots (x^2+lx+s)^{\nu}(x-a)^{\alpha} \dots (x-d)^{\delta}.$$

Bu holda, $\frac{F(x)}{f(x)}$ kasrni soddaroq kasrlarga ajratish IV tipdagi sodda kasrlarni ham o'z ichiga oladi.

3 – misol. Ushbu

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx$$

integralni hisoblash talab etiladi.

Yechish. Kasrni soddaroq kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} + \frac{E}{x+1},$$

bundan

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 = (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1) + E(x^2+2x+3)^2$$

.

Yuqorida keltirilgan koeffitsientlarni aniqlash usullarini kombinatsiyalab,

A=1, B= –1, C=0, D=0, E=1

ekanini topamiz. Shunday qilib,

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx + \int \frac{dx}{x+1} = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + ln|x+1| + C$$

.

O’ng tomondagi birinchi integral oldingi paragrafdagi ikkinchi misolda qaralgan edi. Ikkinchi integral bevosita hisoblanadi.

Yuqorida bayon etilganlarning hammasidan, har qanday ratsional funksiyadan olingan integral ohirida elementar funksiyalar orqali ifoda etilishi mumkin ekanligi kelib chiqadi, jumladan

1) I tipdagi sodda kasrlar bo’lgan holda – logarifmlar bilan;

2) II tipdagi sodda kasrlar bo’lgan holda – ratsional funksiyalar bilan;

3) III tipdagi sodda kasrlar bo’lgan holda – logarifmlar va arktangenslar bilan;

4) IV tipdagi sodda kaslar bo’lgan holda – ratsional funksiyalar va arktangenslar bilan chekli shaklda ifoda etiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Claudio Canuto, Mathematical Analysis I. 2008.
2. PETER V. O’NEIL, ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS. 2010.
3. Crowell and Slesnick, Calculus with Analytic Geometry. 2008