Mavzu : Ko'p o'zgaruvchi funksiya. Aniqlanish sohasi, Ikki o'zgaruvchili funksiya geometrik ma'nosi. Xussusiy va to'la orttirma. Xususiy xosila

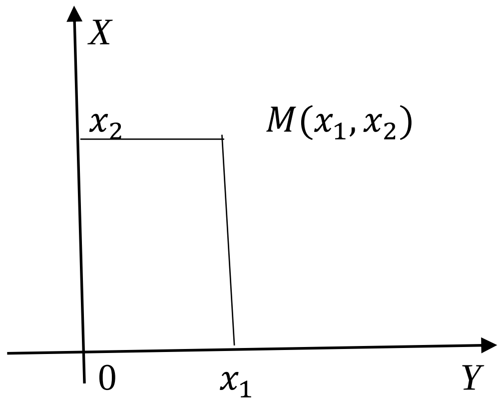
Reja :

1. Ko'p o'zgaruvchi funksiya.
2. Aniqlanish sohasi.
3. Ikki o'zgaruvchili funksiya geometrik ma'nosi.
4. Xussusiy va to'la orttirma.
5. Xususiy xosila

Ko'p o'zgaruvchili funksiya.

Hozirgacha biz faqat bir argumentli funksiyalar bilan ish ko'rib keldik. Lekin tabiatda, fanda va texnikada ko'pincha ko'p argumentli funksiyalarni uchratishga to'g'ri keladi. Masalan, doiraviy silindrning hajmi $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ ikki o'zgaruvchi r – radius hamda h – balandlikga bog'liq. Tok kuchi $I = \frac{E}{R}$ ham ikki o'zgaruvchi E – elektr yurituvchi kuch va R – qarshilikning funksiyasi bo'ladi. Agarda o'zgaruvchi u boshqa *x, y, z, …, t* o'zgaruvchilarga shunday bog'liq bo'lsaki, ulardan har birining o'zgarishi boshqa o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmasa, u holda u ni *x, y, z, …, t* ning funksiyasi va *x, y, z, …, t* larni erkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar deb ataladi. O'zgaruvchilar orasidagi bunday munosabatni $u = f(x, y, z, \dots, t)$ yoki $u = \varphi(x, y, z, \dots, t)$ ko'rinishlarda yozishimiz mumkin.

Bunday funksiyalardan eng oddiysi ikki argumentli funksiyalardir. Odatda ikki argumentli funksiyalarni o'rganish sifatida R^2 to'plamni qarashga mos keladi. Ma'lumki, $\{(x_1, x_2): x_1 \epsilon R, x_2 \epsilon R\}$ to'plam R^2 to'plam deb ataladi. Ravshanki, R^2 to'plam elementlari juftliklar bo'ladi. $x_1\ va\ x_2$ sonlar M nuqtaning mos ravishda birinchi va ikkinchi koordinatalari deyiladi. *OX* o'qida x_1 ni va *OY* x_2 ni ifodalovchi (x_1, x_2) juftlik tekislikda koordinatalari $x_1\ va\ x_2$ bo'lgan $M(x_1, x_2)$ ni ifodalaydi. Bu degani R^2 to'plam nuqtalari bilan tekislik nuqtalari orasida ham o'zaro bir qiymatli moslik ornatish mumkin.



1-ta'rif. R^2 fazoda biror D tuplamning bir-biriga bog'liq bo'lmagan x, y o'zgaruvchilari har bir haqiqiy (x, y) sonlari juftligiga biror qoidaga ko'ra E to'plamdagi bitta haqiqiy z son mos qo'yilgan bo'lsa, to'plamda ***ikki o'zgaruvchilining funksiyasi aniqlangan*** deyiladi.

Ikki o'zgaruvchining funksiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ funksiya u yoki z bilan o'zgaruvchilar mos ravishda x, y, s, t lar bilan belgilangan bo'lsa $u = f(x, y)$, $z = F(s, t)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin . Bunda o'zgaruvchilarga erkli x, y o'zgaruvchilar yoki argumentlar, z, u larga erksiz o'zgaruvchi yoki funksiyalar deb ataladi.

Aniqlanish sohasi.

D to'plamga *funksiyaning aniqlanish* sohasi, to'plamga o'zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta nuqta va bitta nuqtaga bir juft haqiqiy son mos kelganligi uchun ikki argumentli funksiyani nuqtaning funksiyasi ham deb qaraladi, hamda o'rniga ham deb yozish mumkin.

Misol: $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin

Yechish: bu funksiya Oxy tekisligida radiusi *r* ga teng bo`lgan

$x^2 + y^2 \leq r^2$ shartni qanotlantiruvchi markazi koordinatalar boshida bo`lgan aylanadan iborat.

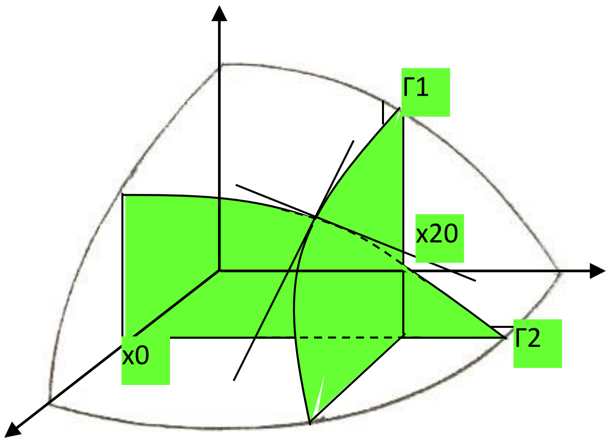
Uch o'zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi fazoning biror nuqtalar to'plami yoki butun fazo bo'lishi mumkin.

Ikki o'zgaruvchili funksiya geometrik ma'nosi.

Xususiy hosilaning geometrik ma'nosi. Soddalik uchun ikki o'zgaruvchili funksiya xususiy hosilalarining geometrik ma'nosini keltiramiz.

$f(x_1, x_2)$ funksiya ochiq $M\left(M \subset R^2\right)$ to'plamda berilgan bo'lib, $\left(x_1^0, x_2^0\right) \in M$ bo'lsin. Bu funksiya $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ nuqtada $f'_{x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right)$, $f'_{x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right)$ xususiy hosilalarga ega deylik. Ta'rifga ko'ra $f'_{x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right)$ va $f'_{x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right)$ xususiy hosilalar mos ravishda ushbu $y_1 = f\left(x_1, x_2^0\right)$ va $y_2 = f\left(x_1^0, x_2\right)$ bir o'zgaruvchili funksiyalarning x_1^0 va x_2^0 dagi hosilalaridan iborat.

Faraz qilaylik, $y = f\left(x_1, x_2\right)$ funksiyaning grafigi 1-chizmada ko'rsatilgan sirtni tasvirlasin.



1-chizma

Unda $y_1 = f\left(x_1, x_2^0\right)$ va $y_2 = f\left(x_1^0, x_2\right)$ funksiyalarning grafiklari mos ravishda $y = f\left(x_1, x_2\right)$ sirt bilan $x_2 = x_2^0$ tekislikning hamda shu sirt bilan $x_1 = x_1^0$ tekislikning kesishidan hosil bo'lgan Γ_1 va Γ_2 chiziqlardan iborat.

Ma'lumki, bir o'zgaruvchili $u = \varphi(x)$ funksiyaning biror $x_0\left(x_0 \in R\right)$ nuqtadagi hosilasining geometrik ma'nosi (1-qism, 6-bob, 1-§) bu funksiya tasvirlangan egri chiziqqa $(x_0, \varphi(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientidan iborat edi. $f'_{x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right)$ va $f'_{x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right)$ xususiy hosilalar mos ravishda Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlarga $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ nuqtada o'tkazilgan urinmalarning ox_1 va ox_2 o'qlari bilan tashkil etgan burchakning tangensini bildiradi. Demak, $f'_{x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right)$ va $f'_{x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right)$ xususiy hosilalar $y = f\left(x_1, x_2\right)$ sirtning mos ravishda ox_1 va ox_2 o'qlar yo'nalishi bo'yicha o'zgarish darajasini ko'rsatadi.

To'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida haqiqiy sonlarning har bir uchligiga fazoning yagonanuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o'zgaruvchining fuksiyasini nuqtaning funksiyasi sifatida qarash mumkin. Shunday qilib, o'rniga, deb yozish ham mumkin.

Biror oraliqda olingan x va y o`zgaruvchilarning bir juft qiymatlariga $z$ o`zgaruvchilarning aniq bir qiymati mos keltirilgan bo`lsa, $z$ `zgaruvchiga x va y o`zgaruvchilarning *ikki argumentli funksiyasi* deyiladi va $z = (x, y)$deb yoziladi. $z = (x, y)$ da x va y lar XOY tekisligida qandaydir nuqtani aniqlaydi, va $z = (x, y)$ esa sirtdagi $M(x; y; z)$ nuqtaning applikatasini aniqlaydi.

$z = (x, y)$ funksiyaga aniq qiymat beradigan x va y larning qiymatlari to`plamiga uning aniqlanish (mavjudlik) sohasi deyiladi.

$z = (x, y)$ funksiyaning sath chizig`i deb $XOY$ *tekisligida* $f(x, y) = c$ chizig`iga aytiladi. $u = f(x, y, z)$ funksiyaning sath sirti deb $f(x, y)$=c sirtga aytiladi.

Teorema: $z = (x, y)$ funksiyaning to`la diferensiali $= x_0$ , $y = y_0$ da $z = (x, y)$ funksiyaga $M_0\,(x_0, \ \ y_0, z_0)$ nuqtada o`tkazilgan urinma tekisligini ifodalaydi.

Xususiy va to'la orttirma.

1. 1-ta'rif. funksiyada o'zgaruvchiga biror orttirma berib, ni o'zgarishsiz qoldirsak, funksiya orttirma olib, bu orttirmaga z funksiyaning *x* ***o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

Xuddi shunday, **y** o'zgaruvchiga orttirma berib x o'zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning **y** ***o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

2-ta'rif. x va y o'zgaruvchilar mos ravishda orttirmalar olsa, funksiya

$$\Delta z = f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

to'liq orttirma oladi. $z'_x = f'_x(x, y)$

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning hosilalari

Funksiya xususiy hosilasining ta'rifi. $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiya ochiq $M(M \subset R^m)$ to'plamda berilgan bo'lsin. Bu to'plamda $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ nuqta olib, uning birinchi koordinatasi x_1^0 ga shunday Δx_1 $(\Delta x_1 \gtrless 0)$ orttirma beraylikki, $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in M$ bo'lsin. Natijada $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiya ham $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ nuqtada x_1 o'zgaruvchisi bo'yicha

$$\Delta_{x_1} f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

xususiy orttirmaga ega bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $\Delta x_1 \to 0$ da ushbu limit

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_1}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiyaning $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ nuqtada x_1 o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasi deb ataladi va

$$\frac{\partial f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad f'_{x_1}\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right),\quad f'_{x_1}$$

belgilarning biri bilan belgilanadi. Demak,

$$f'_{x_1}\left(x^0\right)=\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1}.$$

$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$ funksiyaning $\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)$ nuqtada x_1 o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasini quyidagi

$$f'_{x_1}\left(x^0\right)=\lim_{x_1\to x_1^0}\frac{f\left(x_1,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)}{x_1-x_1^0}$$

ham ta'riflash mumkin.

Xuddi shunga o'xshash $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$ funksiyaning boshqa o'zgaruvchilari buyicha xususiy hosilalari ta'riflanadi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{\Delta_{x_2} f}{\Delta x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{f\left(x_1^0,x_2^0+\Delta x_2,x_3^0,\ldots,x_m^0\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)}{\Delta x_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}=\lim_{\Delta x_m\to 0}\frac{\Delta_{x_m} f}{\Delta x_m}=\lim_{\Delta x_m\to 0}\frac{f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{m-1}^0,x_m^0+\Delta x_m\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)}{\Delta x_m}.$$

Demak, ko'p o'zgaruvchili $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$ funksiyaning biror $\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)$ nuqtada x_k $\left(k=1,2,\ldots,m\right)$ o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasini ta'riflashda bu funksiyaning x_k $\left(k=1,2,\ldots,m\right)$ o'zgaruvchidan boshqa barcha o'zgaruvchilari o'zgarmas deb hisoblanar ekan. Shunday qilib, $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$ funksiyaning xususiy hosilalari $f'_{x_1}, f'_{x_2},\ldots,f'_{x_m}$ 1-qism, 6-bob, 1-§ da o'rganilgan hosila – bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi kabi ekanligini ko'ramiz. Demak, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning xususiy hosilalarini hisoblashda bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilasini hisoblashdagi ma'lum bo'lgan qoida va jadvallardan to'liq foydalanish mumkin.

Ikki argumentli funksiyalar xususiy xosilasi.

Faraz qilaylik $z = f(x, y)$- $x\ va\ y$ ga bogliq bo'lgan ikki argumentli funksiya bo'lsin. Agar berilgan funksiyada *y* argumentni o'garmas deb qabul qilsak, hamda *x* argumentga nisbattan differensiyallanuvchi bo'lsa u holda bu funksiyaning *x* argument bo'yicha hosilasi $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ ga teng bo'ladi. Bu limitni $f'_x(x, y)$ deb belgilaymiz, indeksda joylashgan *x*, *y* o'zgarmas bo'lganda shu argument bo'yicha xususiy hosilani beradi. Xuddi shunday *y* argumentga nisbattan ham xususiy hosila kiritiladi.

Ta'rif. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning *x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi* deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_x = f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi.

$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, $z = f(x, y)$ unga funksiyaning *y* o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi $\frac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_y = f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Misol 1. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1 + x_2}{2}}$$

funksiyaning $(x_1, x_2) \in R^2$ $(x_2 > 0)$ nuqtadagi xususiy hosilalari topilsin.

$$◀ \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x_2^3}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x_2}\right). ▶$$

Misol 2. Ushbu

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, \text{agar } (x_1,x_2)\neq(0,0) \text{ bo'lsa,}\\ 0 \quad , \text{agar } (x_1,x_2)=(0,0) \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

funksiyaning xususiy hosilalari topilsin.

◀ Aytaylik, $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ bo'lsin. U holda

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)=\frac{2x_2(x_1^2+x_2^2)-2x_1x_2 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2}=\frac{2x_2(x_2^2-x_1^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)=\frac{2x_1(x_1^2+x_2^2)-2x_1x_2 2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}=\frac{2x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

bo'ladi.

Endi $(x_1,x_2)=(0,0)$ bo'lsin. U holda ta'rifga binoan

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(\Delta x_1,0)-f(0,0)}{\Delta x_1}=0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{f(0,\Delta x_2)-f(0,0)}{\Delta x_2}=0$$

bo'ladi.

Demak, berilgan $f(x_1,x_2)$ funksiya $\forall(x_1,x_2)\in R^2$ da xususiy hosilalarga ega. ▶

Misol 3: $z = x^3\sin y + y^4$ funksiyaning xususiy hosilasi topilsin.

Yechish: $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y+4y^3$.

Mustaqil yechish uchun misollar :

Xususiy hosilalar topilsin

1. $z = 2^{xy}+\sin(2xy)$
2. $z = e^{xy}+\ln(x+\ln y)$
3. $z = arctg\,\frac{x}{y}$
4. $z = x^y+\mathrm{arctg}(x+y)$
5. $z = tg\,\frac{y}{x}$