TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу

08

Даражали қаторнинг баъзи тақрибий ҳисоблашларга тадбиқи

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

Режа:

- **Функция қийматини тақрибий ҳисоблаш**
- **Интегралларни қаторлар ёрдамида ҳисоблаш**
- **Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш**
- **Логарифмларни ҳисоблаш**
- **Фойдаланилган адабиётлар**

Функция қийматини тақрибий ҳисоблаш

Баъзи ҳолларда функциянинг тақрибий қийматини берилган аниқликда ҳисоблаш учун унинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланилади.

Мисол-1: e сонини 0.00001 аниқлик билан топинг.

Ечиш x=1 да e^x нинг қатор ёйилмасидан фойдаланамиз:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

n сонни шундай аниқлаймизки,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Тақрибий тенгликнинг хатолиги 0.00001 дан ошмасин. Қолдиқни баҳолаймиз:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right]$$

$$< \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{n}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}$$

Энди, $R < \frac{1}{n!n} < 0.00001$ тенгсизликни ечиб, $n \geq 8$ ни топамиз.

Демак, $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$.

Буни ҳисоблаб, талаб қилинган аниқликдаги жавобни оламиз:

$$e \approx 2.71828$$

Мисол-2. $\sqrt[3]{130}$ ни 0.001 аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3 + 5} = 5\sqrt[3]{1 + \frac{1}{25}} = 5(1 + 0.04)^{\frac{1}{3}}$

Аввал танишган биномиал қатордан фойдаланамиз, бу ерда

$(m = \frac{1}{3}, x = 0.04)$

$$\sqrt[3]{130} = 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot 0.04 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot 0.04^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot 0.04^3 + \cdots\right] = 5 +$$

$$\frac{1}{3}\cdot 0.2 - \frac{1}{9}\cdot 0.008 + \frac{1}{81}\cdot 0.00032 - \cdots$$

Бу ишоралари навбатланувчи қатор Лейбниц аломатини қаноатлантиради, шунинг учун қолдиқ $R_n < u_{n+1}$ мазкур ҳолда тўртинчи ҳад $\frac{5}{81}\cdot 0.00032 < 0.001$, демак, $\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0.0667 - 0.0009 \approx 5.066$

Интегралларни қаторлар ёрдамида ҳисоблаш

Интеграл остидаги f(x) функцияни даражали қаторга ёйиб, даражали қаторларни интеграллаш тўғрисидаги теоремани қўллаб, $\int_0^x f(x)dx$ интегрални даражали қатор кўринишида тасвирлаш ҳамда унинг қийматини берилган аниқлик билан ҳисоблаш мумкин.

Мисол-3. $\int e^{-x^2}$ интегрални топинг.

Ечиш. e^{-x^2} функцияни даражали қаторга ёямиз

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

У бутун сонлар ўқида яқинлашади, демак, уни ҳадма ҳад интеграллаш мумкин:

$$\int e^{-X^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Даражали қаторни интеграллашда унинг яқинлашиш оралиғи ўзгармаганлиги сабабли, ҳосил қилинган қатор ҳам бутун сонлар ўқида яқинлашади.

Мисол-4. $\int_0^1 sinx^2dx$ ни 0.001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. $sinx$ функциянинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланамиз (у ерда х ни x^2 билан алмаштирамиз):

$$sinx^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \cdots$$

Қатор бутун сонлар ўқида яқинлашади, шунинг учун уни ҳадма ҳад интеграллаш мумкин, яъни

$$\int_0^1 sinx^2dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \cdots \right) \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)(2n-1)!} + \cdots$$

Ҳосил қилинган ишоралари навбатланувчи қаторнинг учинчи ҳади 0.001 дан кичик, шунинг учун

$$\int_0^1 sinx^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} = 0.295.$$

Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш

Агар дифференциал тенгламани элементар функциялар ёрдамида аниқ интеграллаб бўлмаса, унинг ечимини Тейлор ёки Маклореннинг даражали қатори кўринишида излаш қулайдир.

Мисол-5. Ушбу $y = y^3 - x, y|_{x=0} = 1$

Дифференциал тенглама ечимининг даражали қаторга ёйилмасининг дастлабки бешта ҳадини топинг.

Ечиш. Ечимни даражали қатор кўринишида излаймиз:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

x=0 да қуйидагига эгамиз

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^n(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Берилган $y' = y^3 - x$ дифференциал тенгламадан $y'(0) = 1$ ни топамиз. Берилган тенгламани дифференциаллаймиз ва ҳосилаларнинг $x_0 = 0$ даги қийматини ҳисоблаймиз:

$$y'' = 3y^2 \cdot y' - 1, \qquad y''(0) = 2;$$

$$y''' = 6y \cdot {y'}^2 + 3y^2 \cdot y'', \qquad y'''(0) = 12;$$

$y^{IV} = 6{y'}^3 + 18y \cdot y' \cdot y'' + 3y^2 \cdot y'''$, $\quad y^{IV}(0) = 78$ ва ҳ.к.

Топилган қийматларни қаторга қўйиб, изланаётган ечимни ҳосил қиламиз:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 + \frac{78}{4!}x^4 + \cdots =$$
$$= 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \cdots$$

Ўтган мавзуларимизда қисқача бошқа бир элементар функцияларнинг даражали қаторлар ёрдамида тақрибий ҳисобланишини ҳам кўриб ўтган эдик. Масалан $sinx, arcsinx, lnx$ функцияларнинг ёйилмасидан фойдаланиб айрим тақрибий ҳисоблашларни кўрсатиб ўтган эдик.

Логарифмларни ҳисоблаш

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

тенгликни ($|x|<1$ бўлганда) 0 дан x гача чегарада интегралласак

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)dx$$

yoki

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad (1)$$

Бу тенглик (-1,1) интервалда ўринлидир. Агар бу формуладаги х ни –х га алмаштирсак (-1,1) интервалда яқинлашувчи қатор ҳосил бўлади.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \qquad (2)$$

(1) ва (2) қаторлар ёрдамида нол ва икки орасидаги сонларнинг логарифмларини ҳисоблаш мумкин.

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й.
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

☎ + 998 71 237 0986

b.normuminov@tiiame.uz

@B.Normuminov