TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу **02**

Ўзгарувчан ишорали қаторлар. Абсолют ва шартли яқинлашиш.

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

Режа:

- Ўзгарувчан ишорали қаторлар
- Абсалют ва шартли яқинлашиш
- Фойдаланилган адабиётлар

Ўзгарувчан ишорали қаторлар

Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик элементлари мусбат бўлса

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... \qquad (1)$$

кўринишидаги қатор ишораси алмашувчан қатор дейилади.

Лейбниц теоремаси: Агар (1) ишораси алмашувчан қаторда $a_1 > a_2 > a_3 > .... > a_n > ....$ бўлиб, унинг умумий хади нолга интилса ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), у ҳолда у яқинлашувчи қатор бўлади.

Исботи: Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ чекли лимит эканлигини кўрсатолсак теорема ўринлиги келиб чиқади. Бу ишни қуйидагича амалага оширамиз.

Аввал: S_{2m} хусусий йиғиндини олиб, уни

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

кўринишида ёзиб олайлик. Теорема шартидан

$a_{k-1} - a_k > 0$ ва $S_{2m} > 0$ эканлигини ҳамда m ўсиши билан S_{2m} ҳам ўсувчилигини аниклаймиз.

Шу билан бирга

Энди S_{2m} йиғиндисининг

$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$ кўринишидан $S_{2m} < a_1$ эканлигини аниқлаймиз.

Шундай қилиб $\{S_{2m}\}$ юқоридан чегараланган монотон ўсувчи кетма-кетлик экан.

Бундай S_{2m} кетма-кетлик $m \to \infty$ да чекли S элемент эга бўлади, яъни $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Энди $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ тенгликни ва теораманинг $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$ шартини ҳисобга олсак,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

тенгликка эга бўламиз.

Шундай қилиб n жуфтми ёки тоқми $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ чекли ечими мавжуд. Демак (1) яқинлашувчи қатордир.

Мисоллар.

1. Қуйидаги

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+\cdots$$

қатор яқинлашувчи катордир.

Чунки,

1) $\frac{1}{3}>\frac{2}{9}>\frac{1}{9}>\frac{4}{81}>\cdots$ ва

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

2. Ушбу

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

қаторда Лейбниц теоремаси шартлари бажарилгани сабабли, у ҳам яқинлашувчи қатор бўлади.

Лекин бу қаторларнинг бир-биридан ажралиб турувчи хоссалари борки, уларни биз кейинроқ келтирамиз.

Абсалют ва шартли яқинлашиш

Бизга ҳадлари ихтиёрий ишорали сонлардан ташкил топган,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

қатор берилган.

Шу қатор ҳадлари модулларидан иборат бўлган,

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (2)$$

қатор тузайлик.

Теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

TIQXMMI
Toshkent Irrigatsiya va Qishloq Xo'jaligini Mexanizatsiyalash Muhandislari Instituti

Исботи. Ёрдамчи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+|a_n|\right)=\left(a_1+|a_1|\right)+\left(a_2+|a_2|\right)+\cdots \qquad (3)$$

қаторни кўрайлик.

Модуль хоссасига кўра

$$0<a_n+|a_n|\leq 2|a_n|,\ n=1,2,3,\cdots$$

бўлиб, теорема шартидаги $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ яқинлашувчилигига асосан $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2|a_n|\right)$ қатор ҳам яқинлашувчи қатор бўлади. Ўз навбатида солиштириш теоремасига кўра (3) қатор яқинлашувчилигини аниқлаймиз. Энди

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+|a_n|\right)-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

тенгликдан қаралаётган $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашиши келиб чиқади.

Тескари тасдиқ ўринли эмас.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ яқинлашувчи бўлса $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ яқинлашувчи бўлиши шарт эмас. У узоқлашувчи қатор бўлиб қолиши мумкин.

Шундай ҳолатлар бўладики $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ яқинлашувчи, лекин $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ узоқлашувчи бўлади.

Бундай ҳолларни тартибга келтирувчи қуйидаги тушунчалар киритилади.

4-Таъриф. Агар берилган $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам унинг ҳадлари модулларидан тузилган қатор ҳам яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолют якинлашувчи қатор дейилади.

5-Таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ яқинлашувчи қатор бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ узоқлашувчи бўлса, берилган қатор шартли яқинлашувчи қатор дейилади.

Мисоллар: 1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$ қатор текширилсин.

Ечиш. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ қатор махражи $q=\frac{1}{2}<1$ бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг барча ҳадлари йигиндииси сифатида яқинлашувчи қатордир. Демак

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

абсалют яқинлашувчи қатор бўлади.

2-мисол. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ қатор текширилсин.

Ечиш. Бу қатор ишораси алмашувчан қатор бўлиб, Лейбниц теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Яъни яқинлашувчи қатор.

Лекин унинг ҳадлари модулларидан тузилган:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

қатор гармоник қатор бўлиб, унинг узоқлашувчи қатор эканлиги бизга маълум.

ТЕОРЕМА: Агар

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

қатор абсолют яқинлашса, унинг ҳадларининг ўринлари ихтиёрий равишда алмаштирилганда ҳам у абсолют яқинлашувчанлигича қолади.

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й.,
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

+ 998 71 237 0986

b.normuminov@tiiame.uz

@B.Normuminov